УДК 517.9

**Кошманенко В.Д., Тугай Г.В.**[1]
(Інститут математики НАН України, Київ)

# Матриці Якобі асоційовані з оберненою задачею на власні значення в теорії сингулярних збурень

В рамках теорії сингулярних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі. Відомо, що наступна обернена задача на власні значення є розв'язною. Для необмеженого додатнього оператора $A$, довільної послідовності чисел $E_j$ та послідовності векторів $\psi_j,\ j = 1, 2, ...$ з умовою $(\mathrm{span}\{\psi_j\})^{\mathrm{cl}} \cap \mathrm{dom}(A) = \{0\}$ треба побудувати послідовність сингулярно збурених операторів $A_n, n = 1, 2, ...,$ які розв'язують задачу на власні значення: $A_n\psi_j = E_j\psi_j, \quad j = 1, ..., n \leq \infty$. Показано, що з послідовністю $A_n$ природним чином асоційована послідовнсть матриць Якобі $J_n$ рангу $n$. Ці матриці узгоджені в тому сенсі, що $J_{n-1}$ є правильною частиною $J_n$ для кожного $n$. Тому існує гранична матриця Якобі $J = J_{n=\infty}$ нескінченого рангу. Тут ми показуємо, що і навпаки, виходячи з довільної наперед заданої матриці Якобі $J$ в деякому підпросторі $\mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \cap \mathrm{dom}(A) = \{0\}$ можна побудувати послідовність сингулярно збурених операторів $A_n$, які розв'язують задачу на власні значення: $A_n\psi_j = E_j\psi_j,\ j = 1, ..., n$, де вектори $\psi_j$, та числа $E_j$ визначаються по $J$. При цьому, відповідна послідовність асоційованих з $A_n$ матриць Якобі $J_n$ збігається до заданої матриці $J$.

The connection between the inverse eigen-values problem and the Jacoby matrices is established in the framework of singular perturbation theory for unbounded self-adjoint operators. It is well-known that the next inverse eigen-values problem is solvable. A given unbounded self-adjoint operator $A$, any sequence of numbers $E_j$, and a sequence of vectors $\psi_j,\ j = 1, 2, ...$ under the condition $(\mathrm{span}\{\psi_j\})^{\mathrm{cl}} \cap \mathrm{dom}(A) = \{0\}$ it is need to construct the sequence of singularly perturbed operators $A_n, n = 1, 2, ...,$ which solve the eigen-values problem : $A_n\psi_j = E_j\psi_j, \quad j = 1, ..., n \leq \infty$. It is shown that the sequence

[1]Ця робота частково підтримана DFG 436 UKR 113/67, 113/78 та INTAS 00-257 проектами.

of $A_n$ is naturely associated with a sequence of Jacoby matrices $J_n$ of rank $n$. These matrices is coordinated in the sense that $J_{n-1}$ is the right part of $J_n$ for any $n$. Therefore there exists the limiting Jacoby matrix $J = J_{n=\infty}$ of the infinity rank. In the paper we show that conversely starting of a Jacoby matrix $J$ in some subspace $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \cap \operatorname{dom}(A) = \{0\}$ we able to consruct a sequence singularly perturbed operator $A_n$, which solved the inverse eigenvalues problem: $A_n \psi_j = E_j \psi_j,\ j = 1, ..., n$, with vectors $\psi_j$, and numbers $E_j$ which are defined by $J$. That is, the corresponding sequence of the associated with $A_n$ Jacoby matrices $J_n$ converges to given matrix $J$.

# 1 Вступ

Нехай $A \geq 1$ – необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\operatorname{dom} A \equiv \mathcal{D}(A)$ в комплексному сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$ з скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$ .

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається [1]-[5] (чисто) сингулярно збуреним відносно $A$ (пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$), якщо множина

$$\mathfrak{D} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) : A\varphi = \tilde{A}\varphi \right\}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що $A$ і $\tilde{A}$ мають спільний симетричний оператор

$$\dot{A} = A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}$$

із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$.

Тут ми досліджуємо так звані слабо сингулярно збуренні оператори $\tilde{A}$ з класу $\mathcal{P}_{ws}(A)$ [2]. Це означає, що образ різниці резольвент операторів $A, \tilde{A}$ належить області визначення оператора $A^{1/2}$:

$$\operatorname{ran}[(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1}] \subset \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

В цьому випадку є два варіанти представлення для збуреного оператора $\tilde{A}$. Якщо $\tilde{A}$ не є розширенням за Фрідріхсом оператора $\dot{A}$, то його можна представити у вигляді узагальненої суми: $\tilde{A} = A \tilde{+} T$, де оператор $T$ діє в $A-$шкалі $\mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ гільбертових просторів [6], $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, при цьому, $\operatorname{ran} T \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Тут $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в нормі $\|\varphi\|_1 := \|A^{1/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-1}$ позначає дуальний простір до $\mathcal{H}_1$ відносно $\mathcal{H}$. В будь-якому випадку оператор $\tilde{A}$ визначається формулою Крейна для резольвент

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + B^{-1}(z), \quad Imz \neq 0,$$

де операторна фунуція $B(z)$ задовольняє певну тотожність (див. наприклад [7, 8]) і, головне, $\mathrm{ran}B^{-1}(z) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) \backslash \mathcal{D}(A)$ Зокрема, резольвентне представлення для $\tilde{A}$ ми будемо використовувіти у випадку, коли $\tilde{A} = A_\infty$ є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A}$. При цьому множина $\mathfrak{D}$ утворює правильний підпростір в $\mathcal{H}_1$, тобто не є щільною в $\mathcal{H}_1$ і $A_\infty \neq A$.

Пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$, якщо різниця резольвент $(\tilde{A}-z)^{-1} - (A-z)^{-1}$, $\mathrm{Im} z > 0$ є оператором рангу $n \leq \infty$.

Нехай $E_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, ...$ - деяка послідовність дійсних чисел, а $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ довільна послідовність векторів ортонормованих в $\mathcal{H}$ така, що виконується умова:

$$\mathrm{span}\{\psi_j, j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{1}$$

де cl позначає замикання в $\mathcal{H}$. З результатів робіт [9, 10] (див. також [11, 12]) випливає, що для кожного скінченого $n$ існує єдиний сингулярний збурений самоспряжений оператор $A_n \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$ що розв'язує задачу на власні значення,

$$A_n \psi_j = E_j \psi_j, j = 1, ..., n. \tag{2}$$

Більше того, при необтяжливих умовах існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n=\infty}_s(A)$, який розв'язує задачу на власні значення для усіх $E_j$ і при цьому, послідовність $A_n$ збігається до нього в сильному резольвентному смислі.

Як правило, оператори $A_n$ мають вигляд $A_n = A \tilde{+} T_n$ і будуються індуктивно з використанням на кожному кроці сингулярного збурення рангу 1. Виключенням є випадок, коли на якомусь кроці оператор $A_n$ є розширенням за Фрідріхсом деякого симетричного оператора. Тоді $A_n$ визначається формулою Крейна для резольвент. А саме, резольвента оператора $A_n$ записується через резольвенту $A_{n-1}$ та пару $E_n \in \mathbf{R}$, $\psi_n \in \mathcal{H}$ у вигляді:

$$(A_n - z)^{-1} = (A_{n-1} - z)^{-1} + B_n^{-1}(\cdot, \eta_n)\eta_n, \ Imz \neq 0, \tag{3}$$

де

$$B_n(z) = (E_n - z)(\psi_n, \eta_n), \quad \eta_n = \eta_n(z) = (A_{n-1} - E_n)(A_{n-1} - z)^{-1}\psi_n.$$

В роботі [9] вперше було помічено, що рекурентна процедура побудови

$A_n$ природним чином породжує послідовність асоційованих матриць Якобі:

$$J_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & \\ & a_2 & b_3 & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & 0 & & \bullet & \bullet & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ці матриці узгоджені в тому сенсі, що на $n$-кроці матриця $J_n$ містить у собі матрицю $J_{n-1}$, як частину. При $n \to \infty$ ми одержуємо матрицю Якобі $J$ нескінченого рангу, яку називаємо асоційованою з оберненою задачею на власні значення для заданих $E_j \in \mathbf{R},\ \psi_j \in \mathcal{H},\ j = 1, 2, ...$

Матричні елементи $a_n, b_n$ якобієвих матриць виражаються рекурентним чином через оператори $A_j$, вектори $\psi_j$ та власні значення $E_j, j \leq n$. А саме,

$$b_1 = \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - E_1,$$

$$a_1 = |\, \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_2 \rangle \,|,$$

$$b_2 = \langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_2 \rangle - E_2,$$

$$a_2 = |\, \langle \psi_2, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle \,|,$$

$$...$$

$$b_n = \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_n \rangle - E_n,$$

$$a_n = |\, \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-1} \psi_{n+1} \rangle \,|,\ n = 1, 2, ...,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - дуальний скалярний добуток між $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_{-1}$, а $\mathbf{A}_j$ позначає замикання оператора $A_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1},\quad A_0 = A$.

В цій роботі показано, що виходячи з довільної матриці Якобі $J$ заданої в деякому ортонормованому базисі $\{\varphi_j\}$, що утворює підпростір $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_1(A)$, який задовольняє умову: $\mathcal{N} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$ можна неєдинним чином відновити послідовності $\psi_j$ і $E_j$ такі, що розв'язуючи по ним обернену задачу на власні значення (2) виникає послідовність сингулярно збурених операторів $A_n \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$, з якими асоційовані матриці Якобі $J_n$, які є правильними частинами матриці $J$ і які збігаються до неї при $n \to \infty$. Процедура відновлення $\psi_j$ і $E_j$ конструктивна і формально не однозначна.

## 2 Побудова матриці Якобі асоційованої з сингулярно збуреним оператором

Нехай задано: необмежений самоспряжений оператор $A \geq 0$ в $\mathcal{H}$, послідовність від'ємних чисел $E_j$, $j = 1, 2, ...$ та послідовність $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ ортонормованих в $\mathcal{H}$ векторів, яка задовольняє умову (1). Зараз ми покажемо, що для заданої послідовності від'ємних чисел $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ та послідовності векторів $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ існує послідовність сингулярно збурених операторів скінченого рангу $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$, що розв'язують задачу на власні значення (2). При цьому, з кожним оператором $A_n$ буде асоційовано якобієву матрицю виду (4).

Опишемо послідовно процедуру побудови такої матриці.

На першому кроці для $n = 1$ по заданим $E_1$ та $\psi_1$ ми визначаємо сингулярно збурений оператор формулою:

$$A_1 = A_0 \tilde{+} \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1, \quad A_0 \equiv A, \tag{5}$$

де

$$\omega_1 := (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \alpha_1 := -\frac{1}{\langle \psi_1, \omega_1 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - E_1},$$

$\mathbf{A}_0$ - замикання ізометричного відображення $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, а $\tilde{+}$ позначає так звану узагальнену суму операторів (див. наприклад ([13])), або суму у смислі квадратичних форм [14, 15]. Безпосередня перевірка показує, що оператор $A_1$ роз'язує задачу: $A_1 \psi_1 = E_1 \psi_1$. Визначимо перший матричний елемент поклавши

$$b_1 := a_{11}^0 - E_1, \text{ де } a_{11}^0 := \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle . \tag{6}$$

Очевидно, що $b_1 > 0$ оскільки оператор $A$ є додатнім, а число $E_1$ від'ємним. Відзначимо, що як сингулярне збурення рангу один $\alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1$, так і матричний елемент $b_1$ якобієвої матриці $J_0$, яку ми будуємо, очевидно єдино визначенні оператором $A$ та заданою парою $E_1, \psi_1$ (докладне доведення цього факту можна знайти в роботах [9, 10, 12]).

Варто пояснити, що число $b_1$ ми асоціюємо з оператором $A_1$, хоча в формулі (6) фігурує оператор $\mathbf{A}_0$. Це повязано з тим, що насправді елемент $b_1$ визначається по $E_1$ та $\psi_1$, які однозначно фіксують оператор $A_1$.

На другому кроці, для $n=2$, ми використовуємо оператор $A_1$, число $E_2$ та вектор $\psi_2$, який ортогональний до $\psi_1$, і визначаємо сингулярно збурений оператор $A_2$ за формулою:

$$A_2 = A_1 \widetilde{+} \alpha_2 \langle \cdot, \omega_2 \rangle \omega_2, \tag{7}$$

де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1},\ \ \alpha_2 = -\frac{1}{\langle \psi_2, \omega_2 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_2, \mathbf{A}_1 \psi_2 \rangle - E_2}.$$

Пряма перевірка показує, що оператор $A_2$ розвязує задачу з двома власними значеннями: $A_2\psi_1 = E_1\psi_1$, $A_2\psi_2 = E_2\psi_2$. Покладаємо

$$b_2 = a^0_{22} - E_2, \quad a_1 = \mid a^0_{21} \mid, \tag{8}$$

де $a^0_{22} := \langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_2 \rangle$, $a^0_{21} := \langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle$. Отже

$$\alpha_2 = -\frac{1}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}.$$

Знову варто пояснити, що елементи $b_2, a_1$ ми асоціюємо з оператором $A_2$, бо ці елементи, як і оператор $A_2$, фіксуються парою $E_2, \psi_2$. До того ж, коефіцієнт $\alpha_2$, який визначає оператор $A_2$, також виражається через елементи $b_2, b_1, a_1$.

Аналогічно, на третьому кроці, $n=3$, для довільного від'ємного числа $E_3$, та вектора $\psi_3 \notin \mathcal{D}(A)$ такого, що $\psi_1 \perp \psi_2 \perp \psi_3 \perp \psi_1$ ми визначаємо:

$$A_3 = A_2 \widetilde{+} \alpha_3 \langle \cdot, \omega_3 \rangle \omega_3, \tag{9}$$

де

$$\omega_3 = (\mathbf{A}_2 - E_3)\psi_3,\ \ \alpha_3 = -\frac{1}{\langle \psi_3, \omega_3 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_3, \mathbf{A}_2 \psi_3 \rangle - E_3}$$

Покладаємо

$$b_3 = a^1_{33} - E_3, \quad a_2 = \mid a^1_{32} \mid, \tag{10}$$

де $a^1_{33} := \langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle$, $a^1_{32} := \langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_2 \rangle$. Отже,

$$\alpha_3 = -\frac{1}{\langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle - E_3 - \frac{|\langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_2 \rangle|^2}{b_1 - \frac{a_0^2}{b_0}}} = -\frac{1}{b_3 - \frac{a_2^2}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}}$$

Для довільного $n \geq 1$ маємо

$$A_n = A_{n-1} \widetilde{+} \alpha_n \langle \cdot, \omega_n \rangle \omega_n, \quad \omega_n := (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\psi_n, \tag{11}$$

де

$$\alpha_n = -\frac{1}{\langle \psi_{n+1}, \omega_n \rangle} = -\frac{1}{a_{n,n}^{n-2} - E_n - \frac{|a_{n,n-1}^{n-2}|^2}{a_{n-1,n-1}^{n-3} - E_{n-1} - \dots \frac{|a_{21}^0|^2}{a_{11}^0 - E_1}}}.$$

Тобто

$$\alpha_n = -\frac{1}{b_n - \frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1} - \dots - \frac{a_2^2}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}}}. \tag{12}$$

$$b_n := a_{n,n}^{n-2} - E_n, \quad a_{n-1} := |a_{n,n-1}^{n-2}|, \tag{13}$$

де

$$a_{n,n}^{n-2} := \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_n \rangle, a_{n,n-1}^{n-2} = \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_{n-1} \rangle.$$

Таким чином, якщо усі числа $E_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots$ і вектори $\psi_j$ задовольняють умову (1), то ми показали, що існує послідовність сингулярно збурених операторів $A_n$, які розвязують задачу на власні значення (2) і з якими можна конструктивно асоціювати послідовність матриць Якобі $J_n$. Умова (1) гарантує те, що усі оператори $A_n$ є сингулярно збуреними відносно $A$. При цьому кожен $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$, бо усі вектори $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$.

Тепер розглянемо випадок, коли $E_j$ є послідовністю довільних дійсних чисел, не обв'язково від'ємних. Тоді може трапитись, що вже на першому кроці $b_1 = a_1^0 - E_1 = 0$. Або $b_2 - \frac{a_1^2}{b_1} = 0$. Або на будь-якому $k$-му кроці ми можемо отримати

$$b_k - \frac{a_{k-1}^2}{b_{k-1} - \dots - \frac{a_2^2}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}} = 0. \tag{14}$$

Це приводить до того, що коефіцієнт $\alpha_1$, чи $\alpha_2$, або $\alpha_k$ буде дорівнювати нескінченості і узагальнена сума $A_k = A_{k-1} \tilde{+}\ \alpha_k \langle \cdot, \omega_k \rangle \omega_k$ втрачає сенс. Але, як було показано в роботах [1, 16, 17], сингулярне збурення рангу один $\tilde{A} = A \tilde{+} \alpha \langle \cdot, \omega \rangle \omega$ з нескінченою константою звязку, $\alpha = \infty$, має коректний сенс. А саме, під оператором $\tilde{A}$ треба розуміти розширення за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A} = A|\{f \in \mathcal{D}(A) \ : \ \langle f, \omega\rangle = 0\}$. Саме так ми і будемо поступати у зазначених вище випадках. Ми визначаємо $A_k$ як розширення за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A}_{k-1}$ одержаного звуженням $A_{k-1}$ на множину $\mathcal{D}(\dot{A}_{k-1}) = \{f \in \mathcal{D}(A_{k-1}) \ : \langle f, \omega_k\rangle = 0\}$. Тоді оператор $A_k$ задається за допомогою формули Крейна для резольвент:

$$(A_k - z)^{-1} = (A_{k-1} - z)^{-1} + B_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z), \tag{15}$$

де

$$B_k(z) = (E_k - z)(\psi_k, \eta_k(\bar{z})), \ \eta_k(z) = (A_{k-1} - E_k)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k.$$

Перевіримо, що і в цьому разі $A_k$ розв'язує задачу на власне значення з вектором $\psi_k$:

$$(A_k - z)^{-1}\psi_k = (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + B_k^{-1}(z)(\psi_k, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z)$$

$$= (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + (E_k - z)^{-1}\eta_k(z) = (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + \frac{1}{E_k - z}(A_{k-1} - E_k)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k$$

$$= (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + \frac{1}{E_k - z}\psi_k - \frac{1}{E_k - z}(E_k - z)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k = \frac{1}{E_k - z}\psi_k.$$

Отже

$$(A_k - z)^{-1}\psi_k = \frac{1}{E_k - z}\psi_k.$$

Покажемо що $A_k$ розв'язує задачу на власні значення з усіма векторами $\psi_j, \ j = 1, ..., k-1$:

$$(A_{k+1} - z)^{-1}\psi_j = (A_k - z)^{-1}\psi_j + b_{k+1}^{-1}(\psi_j, \eta_{k+1})\eta_{k+1}$$

$$= \frac{1}{E_j - z}\psi_j + \frac{(\psi_j, \eta_{k+1})}{(E_j - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} = \frac{1}{E_j - 1}\psi_j +$$

$$\frac{(\psi_j, \psi_{k+1} + (\bar{z} - E_{k+1})(A_k - \bar{z})^{-1}\psi_{k+1})}{(E_{k+1} - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$\frac{1}{E_j - z}\psi_j + \frac{(\psi_j, (\bar{z} - E_{k+1})(A_k - \bar{z})^{-1}\psi_{k+1})}{(E_{k+1} - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$\frac{1}{E_j - z}\psi_j - \frac{((A_k - z)^{-1}\psi_j, \psi_{k+1})}{(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$\frac{1}{E_j - z}\psi_j - \frac{(\frac{1}{E_j - z}\psi_j, \psi_{k+1})}{(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} = \frac{1}{E_j - z}\psi_j.$$

Далі визначаємо наступну пару матричних елементів якобієвої матриці за тим же правилом, що і раніше: вони знаходяться за формулами

$$b_k = \langle \psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_k\rangle - E_k, \quad a_{k-1} = |\langle \psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_{k-1}\rangle|.$$

Відзначимо, що у випадку (14) виникає питання. Як будувати наступний оператор $A_{k+1}$? Справа в тому, що формула (12) для коефіцієнта $\alpha_{k+1}$ формально дає нуль:

$$\alpha_{k+1} = -\frac{1}{b_{k+1} - \frac{a_k^2}{b_k - \cdots - \frac{a_2^2}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}}} = -\frac{1}{b_{k+1} - \frac{a_k^2}{0}} = 0.$$

Але це трапилось тому, що ми формально використали представлення для $A_k$ у вигляді адитивної суми, $A_k = A_{k-1}\tilde{+}\alpha_k\langle\cdot, \omega\rangle\omega$ з $\alpha_k = \infty$, що не є коректним, адже оператор $A_k$ визначався резольвентною формулою. Тому насправді коефіцієнт $\alpha_{k+1}$ повинен визначатися цілком коректною формулою

$$\alpha_{k+1} = -\frac{1}{\langle \psi_{k+1}, \omega_{k+1}\rangle}.$$

Якщо $\alpha_{k+1}$ скінчене число, то $A_{k+1}$ визначається узагальненою сумою. Звичайно, може статися що $\langle \psi_{k+1}, \omega_{k+1}\rangle = 0$, що приводить до $\alpha_{k+1} = \infty$. Тоді ми знову користуємося формулою для резольвент при визначенні оператора $A_{k+1}$.

Таким чином ми довели справедливість наступної теореми.

**Теорема 1** *Для заданого необмеженого самоспряженого оператора* $A \geq 1$ *в гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$*, довільної послідовністі дійсних чисел* $E_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, ...$, *та послідовністі ортонормованих в* $\mathcal{H}$ *векторів* $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$*, для яких виконується умова (1), рекукрентна процедура розв'язання оберненої задачі на власні значення (2), викладена формулами (5),(7),(9),(11) (або (15) у випадку, коли на якомусь кроці виконується рівність (14)), породжує послідовність сингулярно збурених операторів* $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$*, які у свою чергу асоційовані з послідовністю узгоджених* *між собою матриць Якобі $J_n$, які збігаються до матриці*

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 \\ & a_2 & b_3 & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & & \bullet & \bullet \end{pmatrix}. \quad (16)$$

*Матричні елементи матриці $J$ виражаються через задану послідовність чисел $E_j$ $j = 1, 2, ...$, вектори $\psi_j$ та оператори $A_n$ згідно формул (6),(8),(10),(13).*

Відзначимо, що рекурентна формула (12) для коефіцієнта $\alpha_n$ виконується лише до моменту поки не трапляється випадок (14). При цьому ланцюговий дріб в (12) переривається і з наступного кроку починається новий, який продовжується до нескінченості, або знову переривається, якщо трапляється випадок (14).

# 3 Від матриці Якобі до збуреного оператора

Нехай, як і раніше, $A \equiv A_0 \geq 1$ - необмежений самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Виходячи з довільної матриці Якобі $J$ виду (16) ми хочемо відновити послідовності чисел $E_j$ та векторів $\psi_j$, $j = 1, 2, ...$, які за процедурою попереднього розділу приводили до якобієвої матриці (16). Тут ми покажемо як це можна здійснити, хоча процес відновлення не є однозначним без додаткових умов.

Виходячи з оператора $A$ та матриці Якобі $J$ ми будуємо послідовність сингулярно збурених відносно $A$ операторів $A_n$ які розвязують обернену задачу на власні значення (2) і визначають узгоджену послідовність якобієвих матриць $J_n$, які збігаються до $J$.

**Теорема 2** *Нехай задано, $A \equiv A_0 \geq 1$ - необмежений самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$ та матрицю Якобі $J$ в деякому ортонормованому базисі $\{\varphi_j,\ j = 1, 2, ...\}$ підпростору $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$. Припустимо, що $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_1 \backslash \mathcal{D}(A)$.*

*Тоді існують послідовності чисел $\{E_j\}$ та векторів $\{\psi_j \in \mathcal{H}_1 \backslash \mathcal{D}(A)\}$, $j = 1, 2, ...$, які задовольняють умову:*

$$\mathrm{span}\{\psi_j, j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$$

*і є такими, що розв'язуючи по ним послідовно обернену задачу на власні значення:*

$$A_n\psi_n = E_n\psi_n, n = 1, 2, \dots,$$

*в класі операторів* $A_n \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$, *виникає послідовніcь асоційованих матриць Якобі* $J_n$ *рангу* $n$, *яка збігається до заданої на початку матриці* $J$.

*Доведення* є конструктивним. Оператори $A_n$ будуються послідовно збуреннями рангу один як і в попередньому розділі. З цією метою ми знаходимо вектори $\psi_j$ та числа $E_j$ використовуючи матричні елементи якобієвої матриці.

Позначимо $J_1 = b_1$. Нехай $\det J_1 = b_1 \neq 0$. Вектор $\psi_1$ та число $E_1$ ми визначаємо наступними формулами:

$$\psi_1 = x_{10}\varphi_0 + x_{11}\varphi_1, x_{10}^2 + x_{11}^2 = 1, \tag{17}$$

$$E_1 = \langle \psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1 \rangle - b_1.$$

Оператор $A_1$ є звуженням на $\mathcal{H}$ оператора

$$\mathbf{A}_1 = \ \mathbf{A}_0 + \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1,$$

де

$$\omega_1 = (\mathbf{A}_0 - E_1)\,\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1}, \alpha_1 = -\frac{1}{\langle \psi_1, (\mathbf{A}_0 - E_1)\,\psi_1 \rangle}.$$

Очевидно він розв'язує задачу $A_1\psi_1 = E_1\psi_1$. З цим оператором ми асоціюємо $J_1$.

Нехай $J_2$ - матриц Якобі рангу 2, яка є частиною заданої матриці $J$ і складається з елементів $b_1, b_2, a_1$. Припустимо $\det J_2 = b_1 b_2 - a_1^2 \neq 0$. Вектор $\psi_2$ шукаємо у вигляді

$$\psi_2 = x_{20}\varphi_0 + x_{21}\psi_1 + x_{22}\varphi_2,$$

де коефіцієнти $x_{2k}, k = 0, 1, 2$ знаходяться з системи рівнянь:

$$\begin{cases} (\psi_2, \psi_1) = 0, \\ \|\psi_2\| = 1, \\ |\langle \psi_2, \mathbf{A}_0\psi_1 \rangle| = a_1. \end{cases} \tag{18}$$

Ця система переписується у вигляді

$$\begin{cases} x_{21} + x_{20}\langle\psi_1, \varphi_0\rangle = 0 \\ x_{20}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + 2x_{20}x_{21}\langle\psi_1, \varphi_0\rangle = 1, \\ x_{20}\langle\varphi_0, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle + x_{21}\langle\psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle + x_{22}\langle\varphi_2, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle = z_1, |z_1| = a_1, \end{cases}$$

де згідно з (17) $\langle\psi_1, \varphi_0\rangle = x_{10}$. Позначимо $c_{10} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle, a_{11}^0 = \langle\psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle, c_{12} = \langle\varphi_2, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle$. Тоді розв'язки системи (18) записуються у вигляді

$$\begin{array}{l} x_{20} = \frac{z_1\left(c_{10}-x_{10}a_{11}^0\right)\pm c_{12}\sqrt{\left(c_{12}^2-z_1^2\right)\left(1-x_{10}^2\right)+\left(c_{10}-x_{10}a_{11}^0\right)^2}}{c_{12}^2(1-x_{10}^2)+\left(x_{10}a_{11}^0-c_{10}\right)^2} \\ x_{21} = -x_{10}x_{20}, \\ x_{22} = \frac{1}{c_{12}}\left(z_1 + x_{20}\left(x_{10}a_{11}^0 - c_{10}\right)\right) \end{array}$$

Отже, знайшовши $\psi_2$, покладемо $E_2 = \langle\psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle - b_2$ і визначимо оператор $A_2 = A_1 \widetilde{+} \alpha_2 \langle\cdot, \omega_2\rangle \omega_2$, де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\,\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1},\ \ \alpha_2 = -\frac{1}{\langle\psi_2, (\mathbf{A}_1 - E_2)\,\psi_2\rangle}.$$

Зрозуміло, що $A_2$ розвязує задачу на власні значення. При цьому, будуючи якобієву матрицю асоційовану з $A_2$ ми отримаємо якраз матрицю $J_2$, яку щойно використали для побудови цього оператора.

Аналогічно виділяємо з $J$ матрицю $J_3$ рангу 3. Припускаємо, що $\det J_3 \neq 0$. Для побудуви опертора $A_3$ спочатку шукаємо вектор $\psi_3$ у вигляді

$$\psi_3 = x_{30}\varphi_0 + x_{31}\psi_1 + x_{32}\psi_2 + x_{33}\varphi_3.$$

Звичайні вимоги приводять до системи рівнянь на коефіцієнти $x_{3k}$

$$\begin{cases} \langle\psi_1, \psi_3\rangle = 0, \\ \langle\psi_2, \psi_3\rangle = 0, \\ \|\psi_3\|^2 = 1, \\ |\langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle| = a_2, \end{cases} \tag{19}$$

де два перші рівняня – умови ортонормованості системи векторів $\psi_n$. Позначимо $c_{20} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle, a_{12}^1 = \langle\psi_1, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle, a_{22}^1 = \langle\psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle, c_{23} = \langle\varphi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$. Перепишемо систему (19) у вигляді

$$\left\{\begin{array}{l} x_{30}x_{10} + x_{31} = 0 \\ x_{30}x_{20} + x_{21} = 0 \\ x_{30}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2 + 2x_{30}x_{31}x_{10} + 2x_{30}x_{32}x_{20} = 1 \\ x_{30}c_{20} + x_{31}a_{12}^1 + x_{32}a_{22}^1 + x_{33}c_{23} = z_2, |z_2| = a_2. \end{array}\right. \tag{20}$$

тоді шукані кокфіцієнти $x_{3k}$ мають вигляд

$$x_{30} = \frac{z_2\left(c_{20}-x_{10}a_{12}^1-x_{20}a_{22}^1\right)\pm c_{23}\sqrt{\left(c_{23}^2-z_2^2\right)\left(1-x_{10}^2-x_{20}^2\right)+\left(c_{20}-x_{10}a_{12}^1-x_{20}a_{22}^1\right)^2}}{c_{23}^2(1-x_{10}^2-x_{20}^2)+\left(x_{10}a_{12}^1+x_{20}a_{22}^1-c_{20}\right)^2}$$

$$x_{31} = -x_{10}x_{30},$$

$$x_{32} = -x_{20}x_{30},$$

$$x_{33} = \frac{1}{c_{23}}\left(z_2 + x_{30}\left(x_{10}a_{12}^1 + x_{20}a_{22}^1 - c_{20}\right)\right)$$

Покладемо

$$E_3 = \langle \psi_3, \mathbf{A}_2\psi_3 \rangle - b_3$$

і визначимо оператор

$$A_3 = A_2 \widetilde{+} \alpha_3 \langle \cdot, \omega_3 \rangle \omega_3,$$

де

$$\omega_3 = (\mathbf{A}_2 - E_3)\,\psi_3 \in \mathcal{H}_{-1},\ \ \alpha_3 = -\frac{1}{\langle \psi_3, (\mathbf{A}_2 - E_3)\,\psi_3 \rangle}.$$

За побудовою оператор $A_3$ розвязує відповідну задачу на власні значення. При цьому, будуючи згідно розділу 2 якобієву матрицю асоційовану з $A_3$ ми отримаємо саме матрицю $J_3$, з якої починали тут.

Так само поступаємо на довільному $n$-му кроці. Припускаємо що $\det J_n \neq 0$. Для побудови оператора $A_n$ знайдемо $\psi_n$ та $E_n$. Вектор $\psi_n$ шукаємо у вигляді

$$\psi_n = x_{n0}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x_{nk}\psi_k + x_{nn}\varphi_n$$

Складаємо систему рівнянь для знаходження $x_{nk}$ :

$$\begin{cases} \langle \psi_n, \psi_k \rangle = 0, k = 1, \ldots, n-1, \\ \|\psi_n\| = 1, \\ |\langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1} \rangle| = a_{n-1}, \end{cases} \tag{21}$$

де перші $n$ рівнянь – умови ортонормованості системи векторів $\psi_j$. Переписуємо систему (21) у вигляді

$$\begin{cases} x_{nk} + x_{n0}\langle\varphi_0, \psi_k\rangle & = 0, k = 1, \dots, n-1 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} x_{nk}^2 + 2x_{n0} \sum\limits_{k=1}^{n-1} & x_{nk}\langle\varphi_0, \psi_k\rangle = 1, \\ x_{n0}\langle\varphi_0, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle & + \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{nk}\langle\psi_k, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle + \\ & x_{nn}\langle\varphi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle = z_{n-1}, |z_{n-1}| = a_{n-1}. \end{cases} \tag{22}$$

Позначимо $a_{k,n-1}^{n-2} = \langle\psi_k, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle, k = 1, \dots, n-1, c_{0,n-1} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle$, $c_{n,n-1} = \langle\varphi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle$. Тоді розв'язки системи (22) мають вигляд:

$$x_{n0} = \frac{z_{n-1}\left(c_{0,n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right) \pm c_{n,n-1}\sqrt{\left(c_{n,n-1}^2 - z_{n-1}^2\right)\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{k0}^2\right) + \left(c_{0,n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)^2}}{c_{n,n-1}^2\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{k0}^2\right) + \left(c_{0,n-1}^2 - \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)^2}$$

$$x_{nk} = -x_{n0}a_{k,n-1}^{n-2}, k = 1, \dots, n-1,$$

$$x_{nn} = \frac{1}{c_{n,n-1}}\left(z_{n-1} - x_{n0}\left(c_{0,n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)\right).$$

Покладемо

$$E_n = \langle\psi_n, \mathbf{A}_{n-1}\psi_n\rangle - b_n$$

Тоді оператор $A_n$ будуємо як збурення рангу 1 оператора $A_{n-1}$,отриманого на попередньому кроці:

$$A_n = A_{n-1}\widetilde{+}\alpha_n \langle\cdot, \omega_n\rangle\, \omega_n,$$

де

$$\omega_n = (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\,\psi_n, \alpha_n = -\frac{1}{\langle\psi_n, (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\,\psi_n\rangle}.$$

При цьому $A_n$ розвязує задачу на власні значення з числами $E_j, j \le n$, а матриця Якобі асоційована з $A_n$ співпадає з $J_n$.

Якщо при деякому $k$ виявиться що $\det J_k = 0$, то це еквівалентно співвідношенню:

$$b_k - \frac{a_{k-2}^2}{b_{k-1} - \dots - \frac{a_2^2}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1}}} = 0,$$

що у свою чергу приводить до $\alpha_k = \infty$. В такому разі оператор $A_k$ визначаємо як розширення за Фрідріхсом симетричного опертора $\dot{A}_{k-1} := A_{k-1} \restriction \{f \in \mathcal{D}(A_{k-1}) : \langle f, \omega_k \rangle = 0\}$. Тоді система рівнянь для знаходження вектора $\psi_k$ представленого лінійною комбінацією

$$\psi_k = x_{0,k}\varphi_0 + \sum_{j=1}^{k-1} x_{k,j}\psi_j + x_{k,k}\varphi_k$$

має вигляд

$$\begin{cases} \langle \psi_k, \psi_j \rangle = 0, j = 1, \ldots, k-1, \\ \|\psi_k\| = 1, \\ |\langle \psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_{k-1} \rangle| = a_{k-1}, \end{cases}$$

де перші $k$ рівнянь – умови ортонормованості системи векторів $\psi_j$. Знайшовши вектор $\psi_k$ визначаємо число $E_k$ і оператор $A_k$ таким же способом як вище. З цим оператором буде асоційована матриця $J_k$.

Теорема 2 повністю доведена.

На завершення відзначимо, що якобієва матриця як об'єкт дослідження звичайно виникає в проблемі моментів (див. наприклад оглядові статті [18, 19]). Тут вперше матриці Якобі грають роль збурення самоспряженого оператора. Це відкриває новий спосіб побудови сингулярно збурених операторів у випадку, коли збурення задається мірою зосередженою на довільно складній множині (фракталі). Треба по такій мірі побудувати якобієву матрицю (згідно теорії проблеми моментів), а потім використати її для введення збуреного оператора, як було описано вище.

# ЛІТЕРАТУРА.


[1] Albeverio S., Koshmanenko V. Singular Rank One Perturbations of Self-Adjoint operators and Krein Theory of Self-Adjoint Extensions // Potential Analysis. — 1999. — **11**. — P. 279 - 287.

[2] Nizhnik L. The singular rank-one perturbations of selfadjoint operators // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. –**7**, No. 3, – P. 54-66.

[3] Koshmanenko V.D. Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukrainian Math. J. — 1991. — **43**, №11. — P. 1559-1566.

[4] Кошманенко В.Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 176 с. Переклад англійською – Koshmanenko V., *Singular quadratic forms in perturbation theory*, Kluwer Acad. Publ., 1999.

[5] Albeverio, S. and Kurasov, P.: Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators, — Cambridge Univ. Press, 2000.

[6] Berezansky Yu.M., Expansion in eigenvectors of self-adjoint operators, AMS, 1968.

[7] V. Koshmanenko, Singular Operator as a Parameter of Self-adjoint Extensions, Proceeding of Krein conference, Odessa, 1997, *Operator Theory. Advances and Applications* Vol. 118, 205-223 (2000).

[8] Posilicano A. A Krein-like Formula for Singular Perturbations of Self-Adjoint Operators and Applications, *J. Fuct. Anal.*, **183**, 109-147 (2001).

[9] V. Koshmanenko, A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory, *Methods of Functional Analysis and Topology*, — 2002. — **8**, №1. — P. 49-69.

[10] Dudkin M.E., Koshmanenko V.D., On the point spectrum arising under finite rank perturbations of self-adjoint operators, *Ukrainian Math. J.*, No. 9, (2003).

[11] S. Albeverio, A.Konstantinov, V. Koshmanenko, On inverse spectral theory for singularly perturbed operator: point spectrum, *Inverse Problems*, **21**, (2005) 1871-1878.

[12] Albeverio S., Dudkin M., Konstantinov A., and Koshmanenko V., On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$ singular perturbations, *University of Bonn, SFB 611, Preprint no. 122* (2003). subm. to publ. in *Math. Nachr.* (2005).

[13] T.V. Karataeva, V.D. Koshmanenko, Generalized sum of operators, *Math. Notes*, **66**, No. 5, 671-681 (1999).

[14] Kato T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer Verlag, Berlin New York, 1966.

[15] Krein M.G. Theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications. I, *Math. Zbornik*, **20**(**62**), No.3, 431-495 (1947).

[16] Gesztesy F., Simon B., Rank-One Perturbations at Infinite Coupling, *J.Funct.Anal.*, **128**, 245-252 (1995).

[17] V.D. Koshmanenko, Singular perturbations at infinite coupling, *Funct. Anal. Appl.*, **33**, No. 2, 81-84 (1999).

[18] Simon B., The classical Moment problem as a self-adjoint finite difference operator, *Adv. Math.*, **137**, 82-203 (1998).

[19] Berezansky Yu.M. Some generalizations of the classical momrnt problem, *Integral Equations Operator Theory,* **44**, 255-289 (2202).