УДК 517.9

Дудкін М.Є. Нац. тех. ун-т України "КПІ",Київ

Кошманенко В.Д. Інститут математики НАН України, Київ

Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу [1]

Розглядаються чисто сингулярні збурення скінченого рангу самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Збуренні оператори $\tilde{A}$ визначаються формулою Крейна для резольвент: $(\tilde{A}-z)^{-1}=(A-z)^{-1}+B_z, \mathrm{Im} z\neq 0$, де B_z оператори скінченого рангу такі, що $\mathrm{dom} B_z\cap \mathrm{dom} A=\{0\}$. Для довільної системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^{n<\infty}$ з умовою $\mathrm{span}\{\psi_i\}\cap \mathrm{dom} A=\{0\}$ та довільного набору дійсних чисел $\lambda_i\in\mathbb{R}^1$ побудовано оператор $\tilde{A}$, який розв'язує задачу на власні значення: $\tilde{A}\psi_i=\lambda_i\psi_i$, $i=1,...,n$. Доведено єдиність $\tilde{A}$ при умові, що $\mathrm{rank} B_z=n$.

We discuss the singular finite rank perturbations of self-adjoint operator A in a Hilbert space $\mathcal{H}$. The perturbed operators $\tilde{A}$ are defined by Krein's resolvent formula: $(\tilde{A}-z)^{-1}=(A-z)^{-1}+B_z, \mathrm{Im} z\neq 0$, where finite rank operators B_z are such that $\mathrm{dom} B_z\cap \mathrm{dom} A=\{0\}$. Given a set of orthonormal vectors $\{\psi_i\}_{i=1}^{n<\infty}$ with condition, $\mathrm{span}\{\psi_i\}\cap \mathrm{dom} A=\{0\}$, and a set of real numbers $\lambda_i\in\mathbb{R}^1$, the operator $\tilde{A}$, which solves the eigenvalues problem: $\tilde{A}\psi_i=\lambda_i\psi_i$, $i=1,...,n$, is constructed. The uniqueness of $\tilde{A}$, under condition $\mathrm{rank} B_z=n$, is proved.

1. Вступ.

Нехай в комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$ задано необмежений самоспряжений оператор $A=A^*$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A)\equiv \mathrm{dom} A$. Інший самоспряжений оператор $\tilde{A}$ в $\mathcal{H}$ називається [1]-[8] (порівн. з [9, 10]) чисто сингулярно збуреним відносно A, позначаємо $\tilde{A}\in\mathcal{P}_s(A)$, якщо область

$$\mathfrak{D}:=\{f\in\mathfrak{D}(A)\cap\mathfrak{D}(\tilde{A})\ :\ Af=\tilde{A}f\} \tag{1}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що для кожного $\tilde{A}\in\mathcal{P}_s(A)$ існує щільно визначений симетричний оператор

$$\dot{A}:=A\restriction\mathfrak{D}=\tilde{A}\restriction\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}(\dot{A})=\mathfrak{D} \tag{2}$$

з нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A})=\mathrm{dimKer}(\dot{A}\pm i)^*\neq 0$. В роботі розглядається підклас операторів $\tilde{A}\in\mathcal{P}_s^n(A)$, де $n=\mathbf{n}^+(\dot{A})=\mathbf{n}^-(\dot{A})<\infty$.

Досліджується проблема існування і побудови оператора $\tilde{A}\in\mathcal{P}_s^n(A)$, який розв'язує задачу на власні значення

$$\tilde{A}\psi_i=\lambda_i\psi_i,\ i=1,...,n \tag{3}$$

[1]Робота підтримана проектом INTAS N 00-257 та проектами DFG 436 UKR 113/53 і 113/67.

для довільних наперед заданих дійсних чисел λ_i та системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, таких що $\mathrm{span}\{\psi_i\} \cap \mathrm{dom} A = \{0\}$.

Дослідження спектру, зокрема точкового, у самоспряжених розширень симетричних операторів зі скінченими індексами дефекту в загальному вигляді вперше проводилась в роботі М.Г.Крейна [11], де доведено існування принаймі одного розширення з наперед заданими власними значеннями з поля регулярності симетричного оператора (див. також [12]-[16]). В цьому напрямку відзначимо іще роботи [17]-[18], де, зокрема, в термінах просторів граничних значень та функції Вейля доводилось існування будь-якої компоненти спектру в лакунах симетричного оператора.

Ми пропонуємо розглядати задачу на власні значення для самоспряжених розширень симетричного оператора з точки зору теорії сингулярно збурених операторів. Суть нашого результата в тому, що точки λ_i в (3) довільні, зокрема можуть лежати на спектрі оператора A. Відзначимо, що в [19] аналогічий результат доведено у випадку, коли оператор A додатній, точки $\lambda_i \leq 0$ і $\tilde{A}$ не є обов'язково чисто сингулярно збуреним оператором.

Основний результат роботи містить така теорема.

Теорема 1. *Для необмеженого самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує единий чисто сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, який розвязує задачу на власні значення (3) з довільними наперед заданими числами $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, ..., n < \infty$ та будь-якою множиною ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ з умовою*

$$\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \tag{4}$$

Відзначимо, що доведення цієї теореми конструктивне. Резольвента оператора A будується послідовно, з використанням на кожному кроці чисто сингулярного збурення рангу 1.

2. Сингулярні збурення рангу один.

Нехай $\dot{A} \subset \dot{A}^*$ – замкнений симетричний оператор з областю визначення $\mathfrak{D}(\dot{A})$ щільною в $\mathcal{H}$. Припустимо, що його індекси дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = 1$. Тоді $\mathcal{H} = \mathfrak{M}_z \oplus \mathfrak{N}_z$, $\mathrm{Im} z \neq 0$, де $\mathfrak{M}_z = (\dot{A} - z)\mathfrak{D}(\dot{A})$ – область значень оператора $\dot{A} - z$, а $\mathfrak{N}_z := \mathfrak{M}_z^{\perp} = \mathrm{Ker}(\dot{A}^* - \bar{z})$ – дефектний підпростір, $\dim \mathfrak{N}_z = 1$.

Нехай $\mathcal{A}(\dot{A})$ позначає множину усіх самоспряжених розширень оператора $\dot{A}$. Зафіксуємо деяке самоспряжене розширення $A \in \mathcal{A}(\dot{A})$. Зрозуміло, що кожний оператор $\tilde{A} \neq A$ з множини $\mathcal{A}(\dot{A})$ належить також і множині $\mathcal{P}_s^1(A)$. При цьому область $\mathfrak{D}$ в (1) збігається з $\mathfrak{D}(\dot{A})$. Відомо [11, 14], що $\mathfrak{N}_z \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$.

Теорема 2. *[11, 12] Резольвента кожного самоспряженого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\dot{A})$, $\tilde{A} \neq A$, задається формулою Крейна,*

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z, \tag{5}$$

де вектор-функція η_z із значеннями в $\mathfrak{N}_z$ задовольняє рівняння:

$$\eta_z = (A - \xi)(A - z)^{-1}\eta_\xi, \mathrm{Im} z, \mathrm{Im} \xi \neq 0, \tag{6}$$

а значення скалярної функції b_z пов'язані співвідношеннями:

$$b_z = b_\xi + (\xi - z)(\eta_\xi, \eta_{\bar{z}}), \mathrm{Im} z, \mathrm{Im} \xi \neq 0, \tag{7}$$

$$\bar{b}_z = b_{\bar{z}} \tag{8}$$

Використовуючи теорему 2 одержуємо опис усіх операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$ (порівн. з [2, 5]).

Теорема 3. *Самоспряжений в* $\mathcal{H}$ *оператор* $\tilde{A} \neq A$ *належить до множини* $\mathcal{P}_s^1(A)$ *тоді і лише тоді, коли для будь-якого* $z_0 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$ *(а отже і для всіх таких z) існує підпростір*

$$\mathfrak{N}_{z_0} \subset \mathcal{H}, \dim \mathfrak{N}_{z_0} = 1, \mathfrak{N}_{z_0} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}, \tag{9}$$

та число

$$b_{z_0} \in \mathbb{C}, \mathrm{Im} b_{z_0} = -\mathrm{Im} z_0, \tag{10}$$

такі що

$$(\tilde{A} - z_0)^{-1} = (A - z_0)^{-1} + b_{z_0}^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}_0})\eta_{z_0}, \tag{11}$$

де $\eta_{z_0} \in \mathfrak{N}_{z_0}$, $\|\eta_{z_0}\| = 1$, *а* $\eta_{\bar{z}_0} = (A - z_0)(A - \bar{z}_0)^{-1}\eta_{z_0}$.

Для довільної точки $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im} z \neq 0$, *резольвента оператора* $\tilde{A}$ *задається формулою (5), де функції*

$$\eta_z = (A - z_0)(A - z)^{-1}\eta_{z_0}, \tag{12}$$

$$b_z = b_{z_0} + (z_0 - z)(\eta_{z_0}, \eta_{\bar{z}}), \tag{13}$$

задовольняють співвідношення (6) – (8).

Доведення. Необхідність. Якщо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, то $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\dot{A})$ з $\dot{A} := A \restriction \mathcal{D}$, де $\mathfrak{D}$ визначено згідно (1). Умови (9) – (11) а також співвідношення (12), (13) виконуються завдяки (5) – (8). Зокрема (10) випливає з (7), (8). Дійсно в силу (7)

$$b_{\bar{z}_0} = b_{z_0} + (z_0 - \bar{z}_0)(\eta_{z_0}, \eta_{z_0}).$$

Тому завдяки (8)

$$\bar{b}_{z_0} - b_{z_0} = -2i\mathrm{Im} b_{z_0} = 2i\mathrm{Im} z_0,$$

тобто $\mathrm{Im} b_{z_0} = -\mathrm{Im} z_0$, де, без втрати загальності вектор η_{z_0} нормовано на 1.

Достатність. Треба показати, що права частина (11) визначає самоспряжений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. З цією метою розглянемо оператор-функцію

$$\tilde{R}(z) = (A - z)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z, \tag{14}$$

з η_z і b_z заданими згідно (12), (13) і покажемо, що вона є резольвентою самоспряженого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, тобто що $(\tilde{A} - z)^{-1} = \tilde{R}(z)$.

В першу чергу переконаємось, що $\tilde{R}(z)$ є псевдорезольвентою (див. [20], стор. 533), тобто задовольняє тотожність Гільберта

$$\tilde{R}(z) - \tilde{R}(\xi) = (z - \xi)\tilde{R}(z)\tilde{R}(\xi), \mathrm{Im} z, \mathrm{Im}\xi \neq 0. \tag{15}$$

Виходячи з (14) переписуємо (15) у вигляді

$$R(z) + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z - R(\xi) - b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_\xi = (z - \xi)[R(z) + b_z^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z] \cdot [R(\xi) + b_\xi^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{\xi}})\eta_\xi], \tag{16}$$

де $R(z)=(A-z)^{-1}$. Використовуючи тотожність Гільберта для самоспряженого оператора A одержуємо

$$\begin{aligned} b_z^{-1}(\cdot,\eta_{\bar z})\eta_z - b_\xi^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})\eta_\xi =& (z-\xi)b_\xi^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})R(z)\eta_\xi \\ &+ (z-\xi)b_z^{-1}(\cdot,R(\bar\xi)\eta_{\bar z})\eta_z \\ &+ (z-\xi)b_z^{-1}b_\xi^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})(\eta_\xi,\eta_{\bar z})\eta_z. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (12) маємо

$$\eta_z-\eta_\xi=(z-\xi)(A-z)^{-1}\eta_\xi, \mathrm{Im} z, \mathrm{Im}\xi \neq 0.$$

Тому (17) спрощується і набуває вигляду

$$0=b_\xi^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})\eta_z - b_z^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})\eta_z + (z-\xi)b_z^{-1}b_\xi^{-1}(\cdot,\eta_{\bar\xi})(\eta_\xi,\eta_{\bar z})\eta_z. \tag{18}$$

З іншого боку права частина (18) дорівнює нулю в силу (13). Отже (15) дійсно виконується.

Псевдорезольвента $\tilde R(z)$ є резольвентою деякого щільно визначеного замкненого оператора (див. [20], стор. 533, а також [21], теорема 7.7.1) тоді і лише тоді, коли $\mathrm{Ker}\tilde R(z_0)=\{0\}$ хоча б для однієї точки $z_0\in\mathbb{C}, \mathrm{Im} z_0\neq 0$. Для усіх $0\neq f\perp\eta_{\bar z_0}$, в силу (11),

$$\tilde R(z_0)f=(A-z_0)^{-1}f\neq 0.$$

Для вектора $\eta_{\bar z_0}$ маємо також

$$\tilde R(z_0)\eta_{\bar z_0}=(A-z_0)^{-1}\eta_{\bar z_0}+b_{z_0}^{-1}\|\eta_{\bar z_0}\|^2\eta_{z_0}\neq 0,$$

бо $(A-z_0)^{-1}\eta_{\bar z_0}\in\mathfrak{D}(A)$, а $\eta_{z_0}\notin\mathfrak{D}(A)$ в силу (9). Отже $\tilde R(z)=(\tilde A-z)^{-1}$ є резольвентою замкненого оператора $\tilde A$ в $\mathcal{H}$. В дійсності $\tilde A$ самоспряжений оператор. Щоб у цьому переконатись треба показати (див. [21], теорема 7.7.3 а також [20] стор. 533), що

$$(\tilde R(z))^*=\tilde R(\bar z). \tag{19}$$

Рівність (19) справедлива оскільки з (10) випливає (8), а це у свою чергу приводить до того, що

$$(\tilde R(z))^*=(A-z)^{-1}+b_{\bar z}^{-1}(\cdot,\eta_z)\eta_{\bar z}=\tilde R(\bar z).$$

Отже $\tilde R(z)$ є резольвентою самоспряженого оператора $\tilde A$, для якого справедлива формула (11). Залишилось довести, що область $\mathfrak{D}$, визначена згідно (1) є щільною в $\mathcal{H}$. Позначимо

$$\mathfrak{M}_{z_0}:=(\tilde A-z_0)\mathfrak{D}=(A-z_0)\mathfrak{D}. \tag{20}$$

З (11) випливає, що $\mathfrak{M}_{z_0}^\perp=\mathfrak{N}_{z_0}$. Нехай $\varphi\perp\mathfrak{D}$. Тоді в силу (20) маємо для усіх $f\in\mathfrak{D}$, $f=(A-z_0)^{-1}h$, $h\in\mathfrak{M}_{z_0}$:

$$0=(\varphi,f)=(\varphi,(A-z_0)^{-1}h)=((A-\bar z_0)^{-1}\varphi,h).$$

Це означає, що $(A-\bar z_0)^{-1}\varphi\in\mathfrak{N}_{z_0}$, але в силу (9) це можливо лише для $\varphi=0$. Таким чином доведено, що $\tilde A\in\mathcal{P}_s^1(A)$. ■

Теорема 1 у випадку $n=1$ формулюється наступним чином (порівн. з теоремою 2 в [19]).

Теорема 4 *Для довільного самоспряженого необмеженого оператора A в просторі Гільберта $\mathcal{H}$ існує єдино визначений чисто сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$, який розв'язує задачу*

$$\tilde{A}\psi = \lambda\psi \tag{21}$$

для будь-якого наперед заданого вектора $\psi \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ та довільного числа $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Доведення. Зафіксуємо $z_0 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$ і покладемо

$$\eta_{z_0} := (A - \lambda)(A - z_0)^{-1}\psi, \tag{22}$$

$$b_{z_0} := (\lambda - z_0)(\psi, \eta_{\bar{z}_0}). \tag{23}$$

Для довільних $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im} z \neq 0$ функції η_z, b_z визначаємо формулами (12), (13). В силу функціонального числення для оператора A одержуємо

$$\eta_z = (A - \lambda)(A - z)^{-1}\psi = \psi + (z - \lambda)(A - z)^{-1}\psi, \tag{24}$$

$$b_z := (\lambda - z)(\psi, \eta_{\bar{z}}). \tag{25}$$

Розглянемо оператор-функцію $\tilde{R}(z)$ виду (14). Переконаємося, використовуючи теорему 3, що вона є резольвентою деякого самоспряженого оператора. Для цього достатньо показати, що функції η_z, b_z задовольняють співвідношення (6) – (8). Справедливість (6) перевіряється тривіально виходячи з (22), (24). Рівність (7) встановлюється також безпосередньо на основі тотожності Гільберта для резольвенти оператора A. З (24), (25) випливає що

$$\bar{b}_z = (\lambda - \bar{z})(\eta_{\bar{z}}, \psi) = (\lambda - \bar{z})((A - \lambda)(A - \bar{z})^{-1}\psi, \psi) = b_{\bar{z}}$$

тобто (8) також виконується. Отже $\tilde{R}(z) = (\tilde{A} - z)^{-1}$, де $\tilde{A}$ – самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$. Належність $\tilde{A}$ до $\mathcal{P}_s^1$ встановлюється наступним чином. Покладемо $\mathfrak{N}_{z_0} := \{c\eta_{z_0}\}_{c \in \mathbb{C}}$. Умова $\mathfrak{N}_{z_0} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$ випливає з представлення (24),

$$\eta_z = \psi + (z - \lambda)(A - z)^{-1}\psi \notin \mathcal{D}(A),$$

бо $\psi \notin \mathcal{D}(A)$. Рівність (10) є наслідком (13) та самоспряженості $\tilde{A}$, якщо вектор ψ нормувати таким чином, щоб $\|\eta_{z_0}\| = 1$. За теоремою 3 оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. Його резольвента має вигляд

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + \frac{1}{(\lambda - z)(\psi, \eta_{\bar{z}})}(\cdot, \eta_{\bar{z}})\eta_z, \tag{26}$$

де η_z визначається по вектору ψ згідно (24).

З (26) маємо, в силу (24),

$$\begin{aligned}(\tilde{A} - z)^{-1}\psi =& (A - z)^{-1}\psi + \frac{1}{\lambda - z}\eta_z \\ =& (A - z)^{-1}\psi + \frac{1}{\lambda - z}(\psi + (z - \lambda)(A - z)^{-1}\psi) \\ =& \frac{1}{\lambda - z}\psi.\end{aligned}$$

Отже $\tilde{A}$ розв'язує задачу (21).

Оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1$, який розв'язує задачу (21) єдиний, бо представлення (11) разом з умовою $(\tilde{A} - z_0)^{-1}\psi = \frac{1}{\lambda - z_0}\psi$ однозначно фіксує число b_{z_0} та вектор η_{z_0} (з точністю до фазового множника $\mathrm{e}^{-\theta}, 0 \le \theta < 2\pi$). ■

3. Доведення теореми 1.

Використовуємо метод математичної індукції виходячи з теореми 4. Введемо аналогічно (14) оператор-функцію $R_1(z)$, змінивши позначення:

$$R_1(z) = (A - z)^{-1} + b_1^{-1}(z)(\cdot, \eta_1(\bar{z}))\eta_1(z), \mathrm{Im} z \ne 0, \tag{27}$$

де $R_1(z) \equiv \tilde{R}(z)$ (див. (26)) є резольвентою оператора $A_1 = \tilde{A}$, і де (див. (24), (25))

$$\eta_1(z) \equiv \eta_z = (A - \lambda_1)(A - z)^{-1}\psi_1, \tag{28}$$

$$b_1(z) \equiv b_z = (\lambda_1 - z)(\psi_1, \eta_1(\bar{z})), \tag{29}$$

з $\psi = \psi_1$, та $\lambda = \lambda_1$. Згідно доведення теореми 4 оператор функція

$$\tilde{R}(z) := R_2(z) = R_1(z) + b_2^{-1}(z)(\cdot, \eta_2(\bar{z}))\eta_2(z)$$

з $\eta_2(z), b_2(z)$, визначеними формулами (28), (29) з λ_2, ψ_2 і A_1 на місті λ_1, ψ_1 і A, є резольвентою єдиного оператора $A_2 \in \mathcal{P}_s^1(A_1)$, який розв'язує задачу $A_2\psi_2 = \lambda_2\psi_2$, тільки якщо $\psi_2 \notin \mathfrak{D}(A_1)$. Останній факт випливає з умови (4). Дійсно, з (27) одержуємо опис області визначення оператора A_1:

$$\mathfrak{D}(A_1) = \{h \in \mathcal{H} \ : \ h = f + c(z)\eta_1(z), f \in \mathfrak{D}(A)\},$$

де $c(z) = b_1^{-1}(z)((A - \lambda_1)f, \psi_1)$. Якщо тепер припустити, що $\psi_2 = f + c(z)\eta_1(z)$, то в силу рівності $\eta_1(z) = \psi_1 + (z - \lambda_1)(A - z)^{-1}\psi_1$, це означає що

$$\psi_2 - c(z)\psi_1 = f + (z - \lambda_1)c(z)(A - z)^{-1}\psi_1 \in \mathfrak{D}(A),$$

а це суперечить умові (4). Отже $\psi_2 \notin \mathfrak{D}(A_1)$ і $A_2 \in \mathcal{P}_s^1(A_1)$. Переконаємось, що A_2 розв'язує задачу $A_2\psi_1 = \lambda_1\psi_1$. Дійсно з (27), в силу $A_1\psi_1 = \lambda_1\psi_1$, маємо

$$(A_2 - z)^{-1}\psi_1 = \frac{1}{z - \lambda_1}\psi_1,$$

оскільки, завдяки $\psi_1 \perp \psi_2$,

$$(\psi_1, \eta_2(\bar{z})) = ((A_1 - \lambda_2)\psi_1, (A_1 - z)^{-1}\psi_2) = 0.$$

Неважко переконатись, що аналогічні міркування справедливі на будь-якому k-тому кроці, $1 < k \le n$. В силу методу математичної індукції оператор функція

$$\tilde{R}(z) \equiv R_n(z) = (A_{n-1} - z)^{-1} + b_n^{-1}(z)(\cdot, \eta_n(\bar{z}))\eta_n(z)$$

з $\eta_n(z)$ та $b_n(z)$ визначеним згідно (28), (29) по ψ_n, λ_n, та оператору A_{n-1} є резольвентою самоспряженого оператора $A_n \in \mathcal{P}_s^1(A_{n-1})$, який розв'язує задачу (3).

Залишилось довести, що $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$ і є єдиним таким оператором.

За побудовою

$$(A_n - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + B_n(z), \tag{30}$$

де $\mathrm{rank}B_n(z) = n$. Дійсно,

$$B_n(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z), \tag{31}$$

де $b_k(z)$, $\eta_k(z)$ визначені згідно (28), (29) (або (24), (25)) по ψ_k, λ_k та оператору A_{k-1}. Легко перевірити, що в силу умови (4), усі вектори $\eta_k(z)$ лінійно незалежні і не належать $\mathfrak{D}(A)$. Тому в силу теореми A1 з [1] область

$$\mathfrak{D} = (A - z)^{-1}\mathrm{Ker}B_n(z) = (A_n - z)^{-1}\mathrm{Ker}B_n(z)$$

є щільною в $\mathcal{H}$ і симетричний оператор $\dot{A} = A \restriction \mathfrak{D} = A_n \restriction \mathfrak{D}$ має індекси дефекту $\mathbf{n}^+(\dot{A}) = \mathbf{n}^-(\dot{A}) = n$. Отже $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$. Єдиність A_n є наслідком (30), (31), оскільки оператор $B_n(z)$ на множині з n лінійно незалежних векторів ψ_i (зауважимо, що $\mathrm{span}\{\psi_i\} \cap \mathrm{Ker}B_n(z) = \{0\}$) має фіксовані значення,

$$B_n(z)\psi_i = \frac{1}{\lambda_i - z}\psi_i - (A - z)^{-1}\psi_i, i = 1, ..., n,$$

а на підпросторі $\mathrm{Ker}B_n(z)$ резольвента $R_n(z)$ збігається з $R(z)$. ■

Література

[1] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. Square Power of Singularly Perturbed Operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. P. 5-24.

[2] Albeverio S., Koshmanenko V. Singular Rank One Perturbations of Self-Adjoint operators and Krein Theory of Self-Adjoint Extensions // Potential Analysis. — 1999. — **11**. — P. 279 - 287.

[3] Albeverio S., Kurasov P. **Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators**. – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265p.

[4] Karwowski W., Koshmanenko V., Ôta, S. Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. – 1998. – **77**, №2. – P. 18-34.

[5] Nizhnik L. The singular rank-one perturbations of self-adjoint operators // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. –**7**, No. 3, – P. 54-66.

[6] Koshmanenko V.D. Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukrainian Math. J. – 1991. – **43**, №11. – P. 1559-1566.

[7] Кошманенко В.Д. **Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов**. — Киев: Наук. думка, 1993. — 176 с.

[8] Koshmanenko V. **Singular quadratic forms in perturbation theory**, Kluwer Acad. Publisher, Dorbrecht/Boston/London, 1999, – 308 p.

[9] Albeverio S., Kurasov P. Rank one perturbations, approximations and self-adjoint extensions // J.Funct. Anal. – 1997. – **148**. – P. 152-169.

[10] Gesztesy F., Simon B. Rank-One Perturbations at Infinite Coupling // J.Funct.Anal. – 1995. – **128**. – P. 245-252.

[11] Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. I // Мат. сборник. — 1947. — **20**(**62**), № 3. — С. 431-495.

[12] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. **Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве**. — М.: Наука, 1966. — 544 с.

[13] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. On negative eigenvalues of generalized Laplace operator // Reports on Math. Phys. – 2000. – **45**, No. 2,–P. 307-325.

[14] Alonso A., Simon B. The Birman-Krein-Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators // J. Operator Theory. – 1980. – **4**. – P. 251-270.

[15] Кошманенко В. Самойленко О. Сингулярнi збурення скiнченого рангу. Точковий спектр // Укр. Мат. журн. – 1997. – **49**, № 11 – P. 1186-1212.

[16] Posilicano A. A Krein-like Formula for Singular Perturbations of Self-Adjoint operators and Applications // J. Funct. Anal. – 2001. – **183**. – P. 109-147.

[17] Derkach V.A., Malamud M.M. General Resolvents and the Boundary Value Problem for Hermitian Operators with Gaps // J. Funct. Analysis. — 1991. — **95**. — P. 1-95.

[18] Brasche J.F., Malamud M., and Neidhardt H. Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integral Equations and Operator Theory. – 2002. – **43**, 264-289.

[19] Koshmanenko V., A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory, // Methods Funct. Anal. Topology. – 2002. – **8**, No.1, –P. 49-69.

[20] Като Т. **Теория возмущений линейных операторов**. – М.:Мир, 1972. – 740 с.

[21] Плеснер А.И. **Спектральная теория линейных операторов**. — М.: Наука, 1965.– 624с.