УДК 517.9

Божок Р.В., Кошманенко В.Д.
(Інститут математики НАН України, Київ)

Сингулярні збурення самоспряжених операторів асоційовані з оснащеними гільбертовими просторами

Аннотация

Будується і вивчається сингулярно збурений оператор асоційований з оснащеним гільбертовим простором. Саме оснащення явно залежить від заданого сингулярного збурення.

1 Вступ.

Розглянемо в сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}_0$ необмежений самоспряжений оператор $A = A^* \geq 1$ з областю визначення $\mathcal{D}(A)$. З кожним таким оператором асоціюється оснащений простір Гільберта [1, 2]

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+,$$

де $\sqsupset$ означає щільне неперервне вкладення, $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі графіка, а $\mathcal{H}_-$ позначає спряжений простір (цей простір є поповненням $\mathcal{H}_0$ по нормі $\| \ f \ \|_- := \| \ A^{-1} f \ \|, f \in \mathcal{H}_0$. Припустимо, що сингулярне збурення задано оператором $T : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ таким, що множина $\mathcal{M}_+ := \mathrm{Ker} T$ є щільною в $\mathcal{H}_0$. Згідно загально визнаній в теорії сингулярних збурень процедурі (див. наприклад [3]-[20]) сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$, який відповідає формальній сумі $A \tilde{+} T$ визначається, як одне із самоспряжених розширень симетричного оператора $\dot{A} := A | \mathcal{M}_+$.

В цій роботі ми пропонуємо новий метод побудови сингулярно збуреного оператора. Суть цього методу полягає в наступному. Виходячи з ортогонального розкладу $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$, де, нагадаємо, $\mathcal{M}_+ = \mathrm{Ker} T$ є підпростором щільним в $\mathcal{H}_0$, ми вводимо новий оснащений простір: $\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+$, покладаючи $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$. Після цього ми визначаємо сингулярно збурений оператор, позначаємо його $\breve{A}$, як єдино визначений оператор асоційований з новим оснащенням простору $\mathcal{H}_0$. Такий оператор $\breve{A}$ фіксується умовою: $\mathcal{D}(\breve{A}) = \mathcal{M}_+$ в нормі графіка.

Таким чином ми розширюємо звичайний клас сингулярно збурених операторів. Окрім усього сімейства самоспряжених розширень симетричного оператора $\dot{A}$, ми включаємо в клас сингулярно збурених операторів іще і оператор $\breve{A}$. Виявляється, що спектральні властивості операторів $\tilde{A}$ та $\breve{A}$ істотно різні. На нашу думку вибір оператора $\breve{A}$ в якості сингулярно збуреного оператора більш адекватно враховує фізичну ідею ідеально твердого ядра (або абсолютно непрозорого екрану) в теорії сингулярних збурень.

В цій роботі ми вивчаємо наступні математичні питання. При яких умовах підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$? Який зв'язок між операторами A та $\breve{A}$? Які істотно нові властивості має оператор $\breve{A}$?

2 Оснащені простори Гільберта

Нагадаємо деякі загальні факти з терії оснащених гільбертових просторів (докладніше див. в [1, 2]).

За означенням трійка гільбертових просторів

$$\mathcal{H}_- \ \sqsupset \ \mathcal{H}_0 \ \sqsupset \ \mathcal{H}_+, \tag{2.1}$$

утворює оснащений простір Гільберта якщо виконуються янаступні умови: (a) обидва вкладення є неперервними і щільними, що позначається символом $\sqsupset$, (b) норми в просторах $\mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_0$ та $\mathcal{H}_+$ задовольняють нерівності

$$\|\cdot\|_- \leq \|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_+, \tag{2.2}$$

(c) і нарешті, простори $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$ є взаємно спряженими відносно $\mathcal{H}_0$.

Остання умова означає, що для кожного вектора $\varphi \in \mathcal{H}_+$ лінійний функціонал $l_\varphi(f) := (f, \varphi)_0$, $f \in \mathcal{H}_0$ має продовження по неперервності на увесь простір $\mathcal{H}_-$. І тому так звану позитивну норму $\|\varphi\|_+$ можна порахувати за формулою:

$$\|\varphi\|_+ = \sup_{\|f\|_-=1} |(f, \varphi)_0|, \quad f \in \mathcal{H}_0.$$

Згідно теореми Риса, $l_\varphi(f) = (f, \varphi^*)_-$ з деяким $\varphi^* \in \mathcal{H}_-$. Отже $\|\varphi\|_+ = \|\varphi^*\|_-$ і тому відображення

$$D_{-,+} : \mathcal{H}_+ \ni \varphi \to \varphi^* \in \mathcal{H}_-$$

є унітарним. З іншого боку, простір $\mathcal{H}_-$ збігається з поповненням $\mathcal{H}_0$ відносно так званої негативної норми

$$\|f\|_- := \sup_{\|\varphi\|_+=1} |(\varphi, f)_0|, \ \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

В силу (2.2) скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_0$ в $\mathcal{H}_0$ можна продовжити до дуального добутку між $\mathcal{H}_+$ та $\mathcal{H}_-$, який ми позначаємо як $\langle \omega, \varphi \rangle_{-,+} = \overline{\langle \varphi, \omega \rangle}_{+,-}, \ \omega \in \mathcal{H}_-, \varphi \in \mathcal{H}_+$. Оператори

$$D_{-,+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-, \quad I_{+,-} = D_{-,+}^{-1} : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$$

звуться канонічними унітарними ізоморфізмами між $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$. Вони задовольняють співвідношення:

$$(f, \varphi)_0 = \langle f, \varphi \rangle_{-,+} = (f, D_{-,+}\varphi)_- = (I_{+,-}f, \varphi)_+, \quad f \in \mathcal{H}_0, \ \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

Існує добре відомий звязок між трійками просторів виду (2.1) та самоспряженими операторами A в $\mathcal{H}_0$. Цей звязок фіксується відображенням $D_{-,+}$ та умовою $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$. Дійсно, розглянемо оператор

$$L_A := D_{-,+}|\mathcal{H}_{++}, \qquad \mathcal{H}_{++} := \mathcal{D}(L_A) = \{\varphi \in \mathcal{H}_+ | D_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0\}.$$

Очевидно L_A є симетричним в $\mathcal{H}_0$ оскільки для усіх $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(L_A)$,

$$(L_A\varphi, \psi)_0 = (D_{-,+}\varphi, \psi)_0$$

$$= \langle \varphi^*, \psi \rangle_{-,+} = (\varphi, \psi)_+ = \langle \varphi, \psi^* \rangle_{+,-} = (\varphi, D_{-,+}\psi)_0 = (\varphi, L_A\psi)_0,$$

де елемент φ^* був означений вище. Насправді L_A самоспряжений в $\mathcal{H}_0$, бо згідно побудові його область значень збігається з усім простором $\mathcal{H}_0$. Визначимо $A := L_A^{1/2}$. Зрозуміло, що $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ завдяки тому, що $(L_A\varphi, \psi)_0 = (L_A^{1/2}\varphi, L_A^{1/2}\psi)_0 = (\varphi, \psi)_+$. Очевидно також, що $A \geq 1$, оскільки $\|\cdot\|_+ \geq \|\cdot\|_0$.

Навпаки, нехай $A = A^* \geq 1$ є самоспряженим необмеженим оператором з областю визначення $\mathcal{D}(A)$ в просторі $\mathcal{H}_0$. Виходячи з A можна легко побудувати оснащений простір Гільберта $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$. Нагадаємо цю побудову. Простір $\mathcal{H}_+$ ототожнюємо з $\mathcal{D}(A)$ в скалярному добутку $(\varphi, \psi)_+ := (A\varphi, A\psi)_0, \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A)$. Далі, виходячи з неповного ланцюжка $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$ ми продовжуємо його до оснащеного простору (2.1) звичайним чином (як було описано вище після аналізу умови (c)). Отже, є справедливою наступна теорема.

Теорема 1. *Кожен оснащений простір Гільберта виду (2.1) взаємно однозначно пов'заний (асоційований) з самоспряженим оператором $A = A^* \geq 1$ в $\mathcal{H}_0$. При цьому, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+$ в нормі $\|\varphi\|_+ = \|A\varphi\|_0,\ \varphi \in \mathcal{D}(A)$.*

В подальшому нам знадобиться також конструкція нескінченого ланцюжка гільбертових просторів $\{\mathcal{H}_k \equiv \mathcal{H}_k(A)\}_{k\in\mathbb{R}}$, який зветься A-шкалою гільбертових просторів.

За означенням, $\mathcal{H}_k := \mathcal{D}(A^{k/2}),\ k > 0$ в позитивній нормі $\|\cdot\|_k$, яка відповідає скалярному добутку

$$(\varphi, \psi)_k := (A^{k/2}\varphi\ ,\ A^{k/2}\psi)_0 \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A^{k/2}).$$

А простір $\mathcal{H}_{-k}$ зявляється як поповнення $\mathcal{H}_0$ відносно негативної норми

$$\|f\|_{-k} := \|A^{-k/2}f\|_0, \quad f \in \mathcal{H}_0.$$

Неважко бачити, що кожна трійка

$$\mathcal{H}_{-k} \sqsupset\ \mathcal{H}_0 \sqsupset\ \mathcal{H}_k, \quad k > 0 \tag{2.3}$$

утворює оснащений простір асоційований з оператором $A^{k/2}$. Нехай $D_{-k,k} : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{-k}$ позначає оператор канонічного унітарного ізоморфізму для трійки (2.3). Очевидно, що $D_{-k,k} = (A^{k/2})^{\mathrm{cl}}(A^{k/2}) \equiv D_{-k,0}D_{0,k}$, де cl позначає операцію замикання. Зокрема, для $k = 2$, маємо: $D_{0,2} \equiv A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_0$, та $D_{-2,0} \equiv A^{\mathrm{cl}} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_{-2}$.

3 Щільність вкладення

Нехай задано оснащений простір Гільберта $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$. Припустимо, що позитивний простір $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму підпросторів: $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. Наступна теорема дає простий критерій щільності вкладення $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$.

Теорема 2. [4] *Нехай $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. Підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$ тоді і тільки тоді, коли піпростір $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$ має нульвий переріз з $\mathcal{H}_0$:*

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+\ \Leftrightarrow \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}. \tag{3.1}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. Припустимо, що існує вектор $0 \neq \psi \in \mathcal{H}_0$, такий, що $\psi \perp \mathcal{M}_+$. Оскільки $\mathcal{M}_+$ є підпростором в $\mathcal{H}_+$, то в силу $\psi \in \mathcal{H}_-$, ми маємо

$$0 = (\psi, \mathcal{M}_+)_0 = \langle \psi, \mathcal{M}_+ \rangle_{-,+} = (I_{+,-}\psi, \mathcal{M}_+)_+.$$

Тому $I_{+,-}\psi \in \mathcal{N}_+$. Це означає, що $\psi \in \mathcal{N}_-$, а це суперечить початковому припущенню. Навпаки, якщо піпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, тоді припущення про існування вектора $0 \neq \omega \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0$ веде до суперечності також. Дісно, в силу $\mathcal{N}_- = D_{-,+}\mathcal{N}_+$ ми маємо,

$$\langle \omega, \mathcal{M}_+ \rangle_{-,+} = (\omega, \mathcal{M}_+)_0 = (I_{+,-}\omega, \mathcal{M}_+)_+ = 0,$$

що суперечить співвідношенню $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$, бо $0 \neq \omega \in \mathcal{H}_0$. □

Легко зрозуміти, що співвідношення (3.1) можна пепеписати в іншій еквівалентній формі:

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \ \Leftrightarrow \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ = \{0\}, \quad \mathcal{N}_0 := D_{0,+}\mathcal{N}_+. \tag{3.2}$$

Введемо в розгляд розширений оснащений простір

$$\mathcal{H}_{--} \sqsupset \mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+ \sqsupset \mathcal{H}_{++},$$

де $\mathcal{H}_{--} = \mathcal{H}_{-4}(A)$, $\mathcal{H}_{++} = \mathcal{H}_4(A) = \mathcal{D}(A^2)$. Нехай $\mathcal{H}_+ = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{M}_+$. Припустимо $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$. Розглянемо підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. Він є замкненим в $\mathcal{H}_{++}$. Дійсно, якщо послідовність $\varphi_n \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ є збіжною в $\mathcal{H}_{++}$: $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{H}_{++}$, то вона є збіжною і в $\mathcal{H}_+$ завдяки $\| \cdot \|_+ \leq \| \cdot \|_{++}$. Отже, $\varphi \in \mathcal{M}_+$, оскільки $\mathcal{M}_+$ є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Це доводить замкненість $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{H}_{++}$.

Припустимо що виконуєтся наступна умова

$$(\mathcal{N}_-)^{\mathrm{cl},--} \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{N}_-, \tag{3.3}$$

де $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$, а cl,$--$ позначає замикання в $\mathcal{H}_{--}$.

Теорема 3. *Якщо підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$: $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$ і виконується умова (3.3), то переріз $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$ також є щільним в $\mathcal{H}_0$:*

$$\mathcal{H}_0 \sqsupset \tilde{\mathcal{M}}_+. \tag{3.4}$$

Зокрема, підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, якщо розмірність $\mathcal{N}_+$ скінчена: $\dim \mathcal{N}_+ < \infty$.

Доведення. Використовуючи означення підпростору $\tilde{\mathcal{M}}_+$ у вигляді

$$\tilde{\mathcal{M}}_+ = \{\varphi \in \mathcal{H}_{++} | (\varphi, \psi)_+ = 0,\ \psi \in \mathcal{N}_+\},$$

згідно властивостей A-шкали маємо

$$(\varphi, \psi)_+ = \langle \varphi, \omega \rangle_{+,-} = \langle \varphi, \omega \rangle_{++,--},$$

де $\omega = D_{-,+}\psi,\ \psi \in \mathcal{N}_+$. Звідси випливає, що

$$(\mathcal{N}_-)^{\mathrm{cl},--} = \tilde{\mathcal{N}}_- := \{\omega \in \mathcal{H}_{--} | \langle \varphi, \omega \rangle_{++,--} = 0,\ \varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+\}. \tag{3.5}$$

Далі, оскільки $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, то в силу (3.1) і звдяки умові (3.3) маємо: $\tilde{\mathcal{N}}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$. Тому $\mathcal{H}_0 \sqsupset \tilde{\mathcal{M}}_+$ в силу теореми 2.

Накінець зауважимо, що умова (3.3) виконується автоматично, якщо $\dim\mathcal{N}_0 = \dim\mathcal{N}_+ < \infty$.

Зрозуміло, що теорема 3 залишиться справедливою, якщо в умові (3.3) простір $\mathcal{H}_0$ замінити на $\mathcal{H}_-$.

4 Про оператор $\breve{A}$

Нехай $\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+$ позначає оснащений гільбертів простір, який є асоційованим з самоспряженим оператором $A \geq 1$ у тому смислі, що $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(A)$ в нормі $\| \cdot \|_+ = \| A \cdot \|_0$. При цьому, оператор A^2 збігається із звуженням $D_{-,+} : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ на $\mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{H}_4(A)$: $A^2 = D_{-,+}|\mathcal{H}_{++}$. Припустимо, що позитивний простір $\mathcal{H}_+$ розкладено в ортогональну суму $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$ в такий спосіб, що підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$. Розглянемо новий оснащений простір

$$\breve{\mathcal{H}}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \breve{\mathcal{H}}_+, \tag{4.1}$$

де $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$. Ми хочемо побудувати самоспряжений оператор $\breve{A}$, який асоційований з ланцюжком (4.1) в такий спосіб, що область визначення $\mathcal{D}(\breve{A})$ збігається з $\breve{\mathcal{H}}_+$.

Нагадаємо, що негативний простір $\breve{\mathcal{H}}_-$ визначається як поповнення $\mathcal{H}_0$ в новій нормі:

$$\|f\|\breve{}_- := \sup_{\|\varphi\|_+=1} |(f, \varphi)_0|,\ \varphi \in \mathcal{M}_+. \tag{4.2}$$

При цьому, для довільного фіксованого $f \in \mathcal{H}_0$ виконується нерівність:

$$\|f\|\breve{}_- \leq \|f\|_-, \tag{4.3}$$

де

$$\|f\|_- := \sup_{\|\varphi\|_+=1}|(f,\varphi)_0|,\ \varphi \in \mathcal{H}_+.$$

Зрозуміло, що простір $\mathcal{H}_0$ щільно і неперервно вкладається як в $\mathcal{H}_-$ так і в $\breve{\mathcal{H}}_-$. Але було б помилкою думати, що з (4.3) випливає вкладення $\mathcal{H}_-$ в $\breve{\mathcal{H}}_-$ як власної підмножини.

Твердження 1. *Замикання тотожнього відображення*

$$O : \mathcal{H}_- \ni f \to f \in \breve{\mathcal{H}}_-,\ f \in \mathcal{H}_0,$$

є неперервним і має нетривіальний нуль-підпростір:

$$\mathrm{Ker} O^{\mathrm{cl}} = \mathcal{N}_-,\ \ \mathcal{N}_- = I_{-,+}\mathcal{N}_+,$$

де cl позначає замикання.

Доведення. Неперервність відображення O випливає прямо з (4.3). Покажемо що кожен $\eta_- \in \mathcal{N}_-$ є нуль-вектором для O^{cl}. Нехай послідовність $f_n \in \mathcal{H}_0$ збігається в $\mathcal{H}_-$ до фіксованого $\eta_- \in \mathcal{N}_-$. Тоді завдяки (4.3) ця послідовність буде збіжною в $\breve{\mathcal{H}}_-$ також. Але в просторі $\breve{\mathcal{H}}_-$ ця послідовність збігається до нуля. Це випливає з того, що

$$(f_n,\varphi)_0 = \langle f_n,\varphi\rangle_{-,+} \to \langle \eta_-,\varphi\rangle_{-,+} = 0,\ \varphi \in \mathcal{M}_+,$$

оскільки $\mathcal{N}_- \perp \mathcal{M}_+$ і $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$. Отже $\eta_- \in \mathrm{Ker} O^{\mathrm{cl}}$.

Підкреслимо, що жоден вектор $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$ не належить до $\mathrm{Ker} O^{\mathrm{cl}}$. Простір $\mathcal{H}_0$ вкладається в $\breve{\mathcal{H}}_-$ без дефекту.

Твердження 2. *Для кожного* $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$,

$$\|f\|\breve{}_- = \|P_{\mathcal{M}_-}f\|_- \neq 0, \tag{4.4}$$

де $P_{\mathcal{M}_-}$ *позначає ортогональний проектор на* $\mathcal{M}_-$ *в* $\mathcal{H}_-$.

Доведення. Справедливесть рівності в (4.4) випливає з означення норми в просторі $\breve{\mathcal{H}}_-$ (див. (4.2)) та співвідношення

$$(f,\varphi)_0 = \langle f,\varphi\rangle_{-,+} = \langle P_{\mathcal{M}_-}f,\varphi\rangle_{-,+},\ \varphi \in \mathcal{M}_+,$$

в якому була викоростана ортогональність підпросторів, $\mathcal{M}_- \perp \mathcal{N}_+$, в смислі дуального скалярного добутку. Відзначимо, що для усіх $0 \neq f \in \mathcal{H}_0$,

$$P_{\mathcal{M}_-}f \neq 0, \tag{4.5}$$

бо з $P_{\mathcal{M}_-} f = 0$ випливає, що $f \in \mathcal{N}_-$, але $\mathcal{N}_- \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$ завдяки $\mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+$ (див. теорему 1).

З твердження 2 випливає, що звуження відображення $O^{\rm cl}$ на підпростір $\mathcal{M}_- := D_{-,+}\mathcal{M}_+$ є унітарним оператором. Отже, простори $\breve{\mathcal{H}}_-$, $\mathcal{M}_-$ унітарно еквівалентні.

Отже, що незважаючи на те, що норми в просторах $\breve{\mathcal{H}}_-$ and $\mathcal{H}_-$ задовольняють нерівність (4.3) а простір $\breve{\mathcal{H}}_+ \equiv \mathcal{M}_+$ є правильною частиною простору $\mathcal{H}_+$, простір $\mathcal{H}_-$ не міститься в $\breve{\mathcal{H}}_-$ як частина: $\breve{\mathcal{H}}_- \not\supseteq \mathcal{H}_-$.

Нехай $\breve{D}_{-,+} : \breve{\mathcal{H}}_+ \to \breve{\mathcal{H}}_-$ позначає канонічний унітарний ізоморфізм в оснащеному просторі Гільберта (4.1). Розгдянемо оператор

$$L := \breve{D}_{-,+} | \mathcal{D}(L), \quad \mathcal{D}(L) := \{\varphi \in \breve{\mathcal{H}}_+ | \breve{D}_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0\}. \tag{4.6}$$

Неважко переконатися (див. нижче доведення теореми 4), що оператор L є симетричним і його область значень збігається з усім простором $\mathcal{H}_0$. Тому він є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}_0$ з областю визначення $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$. Наступна теорема є основним результатом цієї статті.

Теорема 4. *Нехай область визначення самоспряженого в $\mathcal{H}_0$ оператора $A \geq 1$ розкладена в ортогональну суму: $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$. Припустимо, що підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, а $\mathcal{N}_- := D_{-,+}\mathcal{N}_+$ задовольняє умову (3.3). Тоді оператор L визначений в (4.6) припускає наступний явний опис в термінах A-шкали та оператора A:*

$$\mathcal{D}(L) = P_{\mathcal{M}_+}\mathcal{H}_{++}, \quad LP_{\mathcal{M}_+}\varphi = A^2\varphi, \ \varphi \in \mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{D}(A^2), \tag{4.7}$$

де $P_{\mathcal{M}_+}$ позначає ортогональний проектор на $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_+$. Більш за те, оператор L є розширенням по Фрідріхсу симетричного оператора

$$\dot{L} := A^2 | \tilde{\mathcal{M}}_+, \quad \tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}. \tag{4.8}$$

При цьому, область визначення оператора

$$\breve{A} := L^{1/2}$$

в точності збігається з підпростором $\mathcal{M}_+$:

$$\mathcal{D}(\breve{A}) = \mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+. \tag{4.9}$$

Доведення. Покажемо, що відображення

$$L : P_{\mathcal{M}_+}\varphi \to A^2\varphi,\ \varphi \in \mathcal{H}_{++}$$

є симетричним оператором в $\mathcal{H}_0$. Дійсно, для усіх $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{++}$ ми маємо

$$(LP_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = (A^2\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi)_0 = \langle D_{-,+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+}$$

$$= \langle P_{\mathcal{M}_-}D_{-,+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+} = \langle D_{-,+}P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{-,+} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, D_{-,+}P_{\mathcal{M}_+}\psi\rangle_{+,-}$$
$$= \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, P_{\mathcal{M}_-}D_{-,+}\psi\rangle_{+,-} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, D_{-,+}\psi\rangle_{+,-} = \langle P_{\mathcal{M}_+}\varphi, A^2\psi\rangle_{+,-}$$
$$= (P_{\mathcal{M}_+}\varphi, LP_{\mathcal{M}_+}\psi)_0.$$

З цього випливає, що L є самоспряженим оператором, оскільки його область значень є увесь гільбертів простір: $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(A^2) = \mathcal{H}_0$.

Доведемо, що оператор L визначений в (4.7) збігається з оператором L в (4.6). З цією метою спершу покажемо, що ці оператори збігаються на множині $\tilde{\mathcal{M}}_+$, а потім переконаємось, що L є розширенням по Фрідріхсу симетричного оператора $\dot{L}$ (див. (4.8). Як проміжний результат доведемо, що відображення $\breve{D}_{-,+}, D_{-,+}$ збігаються на підпросторі $\tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$ і при цьому їх значення належать $\mathcal{H}_0$:

$$\breve{D}_{-,+}\varphi = D_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0,\ \varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+. \tag{4.10}$$

Очевидно також, що $P_{\mathcal{M}_+}\tilde{\mathcal{M}}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+$. З цього випливає включення $\tilde{\mathcal{M}}_+ \subset \mathcal{D}(\dot{L})$ та рівність: $\dot{L}\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^2\tilde{\mathcal{M}}_+$. Для доведення (4.10) нагадаємо, що $\mathcal{H}_{++} \equiv \mathcal{H}_4(A) = \mathcal{D}(A^2)$, а $\tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}$. Отже вектор $f := D_{-,+}\varphi = A^2\varphi \in \mathcal{H}_0$ для кожного $\varphi \in \mathcal{H}_{++}$. Далі, розглянемо для фіксованого $\varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ два функціонали:

$$l_\varphi(\psi) := \langle D_{-,+}\varphi, \psi\rangle_{-,+},\quad \psi \in \mathcal{H}_+$$

та

$$\breve{l}_\varphi(\psi) := \langle \breve{D}_{-,+}\varphi, \psi\breve{\rangle}_{-,+},\quad \psi \in \mathcal{M}_+.$$

Функціонал $l_\varphi(\psi)$ є неперервним на $\mathcal{H}_0$, та $l_\varphi(\psi) = (f, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+$ для усіх $\psi \in \mathcal{M}_+$. Функціонал $\breve{l}_\varphi(\psi)$ є неперервним на $\mathcal{H}_0$ також, оскільки $\mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$ та

$$\breve{l}_\varphi(\psi) = (\varphi, \psi)_+ = \langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{H}_{++}, \mathcal{H}_0},\quad |\breve{l}_\varphi(\psi)| \le c \parallel \psi \parallel_0,$$

де $c = \parallel \varphi \parallel_{++}$. Отже $\breve{l}_\varphi(\psi) = (\breve{f}, \psi)_0$ з деяким $\breve{f} \in \mathcal{H}_0$. Ми стверджуємо, що $f = \breve{f}$. Дійсно, згідно побудови, $(f, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+ = (\breve{f}, \psi)_0$ для усіх $\psi \in \mathcal{M}_+$.

Тому вектори f та $\breve{f}$ збігаються, оскільки підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$. Отже (4.10) встановлено.

Доведемо, що оператор L з (4.6) є розширенням по Фрідріхсу симетричного оператора $\dot{L}$. Нагадаємо, що область визначення $\mathcal{D}(\dot{L}) = \tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільною в $\mathcal{H}_0$. Насправді з умови (3.3) випливає, що підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільним в $\mathcal{M}_+$. Дійсно, якщо $\phi \in \mathcal{M}_+$ та $\phi \perp \tilde{\mathcal{M}}_+$, то $D_{-,+}\phi \perp \mathcal{N}_-$ і $D_{-,+}\phi \in \tilde{\mathcal{N}}_-$. Отже $\phi \equiv 0$, оскільки $\tilde{\mathcal{N}}_- = \mathcal{N}_-$ завдяки (3.3). Докладніше, нехай $\mathcal{M}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{M}}_+^\perp$ та $\phi \in \tilde{\mathcal{M}}_+^\perp$. Тоді $\omega := D_{-,+}\phi \in \tilde{\mathcal{M}}_-^\perp$, де $\tilde{\mathcal{M}}_-^\perp = \mathcal{M}_- \ominus \tilde{\mathcal{M}}_-$. Тому ми маємо

$$\langle \omega, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{-,+} = 0 = \langle \omega, \tilde{\mathcal{M}}_+ \rangle_{--,++} \Rightarrow \omega \in \tilde{\mathcal{N}}_- = \mathcal{N}_-.$$

Але це можливо лише якщо $\phi = 0$ оскільки $\phi \in \mathcal{M}_+$ та $D_{-,+}\phi \perp \mathcal{N}_-$. Отже $\mathcal{M}_+ \sqsupseteq \tilde{\mathcal{M}}_+$.

Далі, очевидно, що оператор $\dot{L}$ з областю визначення $\mathcal{D}(\dot{L}) = \tilde{\mathcal{M}}_+$ є замкненим в $\mathcal{H}_0$ бо підпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є замкненим в $\mathcal{H}_{++}$. Ми стверджуємо, що його область значень також є щільною в $\breve{\mathcal{H}}_-$. Тепер зауважимо, що в силу (4.10), область значень оператора $\dot{L}$ збігається з підпростором $\tilde{\mathcal{M}}_- = A^2\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^2(\mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{++}) = \mathcal{M}_- \cap \mathcal{H}_0$, який є щільним в $\breve{\mathcal{H}}_-$ завдяки тому, що $\breve{D}_{-,+} : \breve{\mathcal{H}}_+ \to \breve{\mathcal{H}}_-$ є унітарним оператором.

Якщо $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$, то простір $\breve{\mathcal{H}}_+$ є поповненням $\tilde{\mathcal{M}}_+$ відносно скалярного добутку $(\varphi, \psi)_{\breve{\mathcal{H}}_+} := (\dot{L}\varphi, \psi)_0 = (A\varphi, A\psi)_0 = (\varphi, \psi)_+, \ \varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Тому оператор L є самоспряженим розширенням симетричного оператора $\dot{L}$. За проведеною побудовою це є розширення по Фрідріхсу оператора $\dot{L}$, оскільки ми вже встановили виконання щільного і неперервного вкладення: $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$.

Накінець, рівність (4.9) є вірною оскільки поповнення множини $\mathcal{D}((\breve{A})^2) = \mathcal{D}(L)$ по нормі $\| \cdot \|_{\breve{+}} := \|L^{1/2} \cdot \|_0$ збігається з $\mathcal{M}_+$. Дійсно, оскільки $\tilde{\mathcal{M}}_+$ є щільним в $\mathcal{M}_+$, то досить лише нагадати, що $(L\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+, \ \varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Отже, за означенням L, ми маємо $(L\varphi, \psi)_0 = (L^{1/2}\varphi, L^{1/2}\psi)_0 = (A^2\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_+ = ((\breve{A})^2\varphi, \psi)_0$ для усіх $\varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$. Таким чином, $\mathcal{M}_+ = \mathcal{H}_1(L)$ і, отже, $\mathcal{M}_+ = \mathcal{H}_2(\breve{A}) = \mathcal{D}(\breve{A}) = \breve{\mathcal{H}}_+$. Це повністю завершує доведення теореми.

5 Загальна конструкція

В цьому розділі ми проведем побудову оператора типу $\breve{A}$ у випадку, коли щільний в $\mathcal{H}_0$ підпростір $\mathcal{M}_+$ є нетривіальною частиною простору $\mathcal{H}_k$ з A-шкали при довільному значенні $k > 0$.

Отже, нехай $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_k,\ k > 0$. Припустимо $\mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+$, де $\mathcal{M}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$ Вводимо оснащений простір

$$\breve{\mathcal{H}}_- \equiv (\mathcal{M}_+)_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \equiv \breve{\mathcal{H}}_+$$

і асоційований з ним оператор $\breve{D} : \breve{\mathcal{H}}_+ = \mathcal{D}(\breve{D}) \to \mathcal{H}_0 = \mathcal{R}(\breve{D})$, який є самоспряженим в $\mathcal{H}_0$. Ми хочемо встановити з'язок $\breve{D}$ з оператором $A^{k/2}$, для якого $\mathcal{H}_k$ є областю визначення.

Позначимо $D^2 = A^k : \mathcal{H}_{2k} \to \mathcal{H}_0$.

Твердження 3.*Якщо підпростір $\mathcal{M}_+$ є щільним в $\mathcal{H}_0$, то відображення*

$$\hat{L} : P_{\mathcal{M}_+}\varphi \to D^2\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}_{2k}$$

є самоспряженим оператором в $\mathcal{H}_0$.

Доведення по суті повторює хід міркувань проведених при встановленні самоспряженості оператора L з (4.7).

Лема. *Нехай задано пару оснащених просторів:*

$$\mathcal{H}_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{H}_+, \quad \mathcal{H}_+ = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{N}_+,\ \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+,$$

$$\breve{\mathcal{H}}_- \equiv (\mathcal{M}_+)_- \sqsupset \mathcal{H}_0 \sqsupset \mathcal{M}_+ \equiv \breve{\mathcal{H}}_+.$$

Розглянемо $\mathcal{H}_0$ в пару самоспряжених операторів $L,\ \breve{L}$, породжених відповідними кононічними унітарними ізоморфізмами:

$$L := D_{-,+}|\mathcal{D}(L), \qquad \mathcal{D}(L) := \{\varphi \in \mathcal{H}_+ | D_{-,+}\varphi \in \mathcal{H}_0\},$$

$$\breve{L} := \breve{D}_{-,+}|\mathcal{D}(\breve{L}), \qquad \mathcal{D}(\breve{L}) := \{\breve{\varphi} \in \breve{\mathcal{H}}_+ | \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi} \in \mathcal{H}_0\}.$$

Позначимо

$$\hat{L} : P_{\mathcal{M}_+}\varphi \to L\varphi \equiv A^k\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L).$$

Стверджується, що оператори $\hat{L}$ та $\breve{L}$ збігаються.

Доведення. Нехай $\breve{\varphi} \in \mathcal{D}(\breve{L}) \subset \mathcal{M}_+ \equiv \breve{\mathcal{H}}_+$. Тоді $\mathcal{H}_0 \ni \breve{f} = \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi}$ і

$$\langle \breve{D}_{-,+}\breve{\varphi}, \psi \breve{\rangle}_{-,+} = \langle \breve{\varphi}, \psi \breve{\rangle}_+ = (\breve{f}, \psi)_0,\ \psi \in \mathcal{M}_+.$$

Оскільки $\mathcal{M}_+ = \breve{\mathcal{H}}_+$, то $\langle \breve{\varphi}, \psi \breve{\rangle}_+ = (A^{k/2}\breve{\varphi}, A^{k/2}\psi)_0$. Взагалі, вектор $\breve{\varphi}$ не належить до $\mathcal{D}(L)$, але завдяки рівності $\langle \breve{\varphi}, \psi \breve{\rangle}_+ = (\breve{f}, \psi)_0$ і щільності підпростору $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_0$, існує вектор $\varphi \in \mathcal{H}_+$ такий, що $\breve{f} = A^k\varphi$. Отже, ми маємо,

$$\langle \breve{\varphi}, \psi \breve{\rangle}_+ = (A^{k/2}\breve{\varphi}, A^{k/2}\psi)_0 = (A^k\varphi, \psi)_0 = \langle D_{-,+}\varphi, \psi \rangle_{-,+} = (P_{\mathcal{M}_+}\varphi, \psi)_{-,+},\ \psi \in \mathcal{M}_+.$$

В силу щільності $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{H}_0$ це означає, що $\breve{\varphi} = P_{\mathcal{M}_+}\varphi$ і $\breve{L}\breve{\varphi} = \breve{f} = \hat{L}P_{\mathcal{M}_+}\varphi$, що і завершує доведення леми.

Введемо піпростір $\tilde{\mathcal{M}}_+ := \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{2k}$

Твердження 4. *На підпросторі $\tilde{\mathcal{M}}_+$ оператор $\hat{L}$ збігається з A^k:*

$$\hat{L}|\tilde{\mathcal{M}}_+ = A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Доведення. Цей факт очевидний, оскільки

$$P_{\mathcal{M}_+}\tilde{\mathcal{M}}_+ = \tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Тому, якщо $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$, то $\hat{L}$ є самоспряженим розширенням щільно визначеного симетричного оператора $\dot{L} := A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+$.

Твердження 5. *Якщо $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{M}_+$, то оператор $\hat{D}$ є розширенням по Фрідріхсу симетричного оператора $\dot{L}$.*

Доведення. Квадратична форма $\gamma(\varphi, \psi) := (\dot{D}\varphi, \psi)_0$, замикання якої визначає розширення по Фрідріхсу оператора цього оператора, збігається з формою $(A^k\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \psi)_{\mathcal{M}_+}, \ \varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$ в силу твердження 4. Тому, справедливість даного твердження випливає із щільності $\tilde{\mathcal{M}}_+$ в $\mathcal{M}_+$.

Твердження 6. *Якщо $\tilde{\mathcal{M}}_+ \sqsubset \mathcal{H}_0$, то оператори $\hat{L}$, $\dot{L}$, та $\breve{L}$ збігаються на підпросторі $\tilde{\mathcal{M}}_+$:*

$$\hat{L}|\tilde{\mathcal{M}}_+ = \dot{L}|\tilde{\mathcal{M}}_+ = \breve{L}|\tilde{\mathcal{M}}_+.$$

Доведення. Справедливість твердження випливає з загальних властивостей оснащених гільбертових просторів. Зокрема, неважко переконатися, що значення операторів $\hat{D}$ та $\breve{D}$ на довільному елементі φ з $\tilde{\mathcal{M}}_+$ належать простору $\mathcal{H}_0$ і збігаються: $\hat{L}\varphi = \breve{L}\varphi, \ \varphi \in \tilde{\mathcal{M}}_+$.

Теорема 5. *Самоспряжений в $\mathcal{H}_0$ оператор*

$$\breve{D} := (\breve{L})^{1/2} = (\hat{L})^{1/2}, \quad \mathcal{D}(\breve{D}) = \mathcal{M}_+$$

збігається з квадратним корнем від розширення по Фрідріхсу симетричного оператора $\dot{L} := A^k|\tilde{\mathcal{M}}_+, \quad \tilde{\mathcal{M}}_+ = \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{H}_{2k}$.

Доведення.

Список литературы

[1] Berezanskii Yu.M.: Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint operators, AMS (1968).

[2] Berezanskii Yu.M.: Selfadjoint operators in spaces of function of infinitely many of variables, AMS, Providence, Rhode Island (1986).

[3] Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.: Solvable Models in Quantum Mechanics, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, (1988); 2nd edition, with Appendix by P. Exner, Chelsea, AMS, Rhode Island (2004).

[4] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. Square Power of Singularly Perturbed Operators // Math. Nachr. – 1995. – **173**. P. 5-24.

[5] Albeverio S., Karwowski W., Koshmanenko V. On negative eigenvalues of generalized Laplace operator // Reports on Math. Phys. – 2000. – **45**, No. 2,–P. 307-325.

[6] Albeverio S., Koshmanenko V. Singular Rank One Perturbations of Self-Adjoint operators and Krein Theory of Self-Adjoint Extensions // Potential Analysis. — 1999. — **11**. — P. 279 - 287.

[7] Albeverio S., Kurasov P. **Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators**. – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265p.

[8] Albeverio S., Kurasov P. Rank one perturbations, approximations and self-adjoint extensions // J.Funct. Anal. – 1997. – **148**. – P. 152-169.

[9] Като Т. **Теория возмущений линейных операторов**. – М.:Мир, 1972. – 740 с.

[10] Karwowski W., Koshmanenko V., Ôta, S. Schrödinger operator perturbed by operators related to null-sets // Positivity. – 1998. – **77**, №2. – P. 18-34.

[11] Koshmanenko V.D. Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukrainian Math. J. – 1991. – **43**, №11. – P. 1559-1566.

[12] Кошманенко В.Д. **Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов**. — Киев: Наук. думка, 1993. — 176 с.

[13] Koshmanenko V. **Singular quadratic forms in perturbation theory**, Kluwer Acad. Publisher, Dorbrecht/Boston/London, 1999, – 308 p.

[14] Gesztesy F., Simon B. Rank-One Perturbations at Infinite Coupling // J.Funct.Anal. – 1995. – **128**. – P. 245-252.

[15] Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и её приложения. I // Мат. сборник. — 1947. — **20**(**62**), № 3. — С. 431-495.

[16] Karwowski W., Koshmanenko V., Generalized Laplace Operator in $L_2(\mathbf{R}^n)$, *in Stochastic Processes, Physics and Geometry: New Interplays. II*, (the volume in honor of Sergio Albeverio), Gesztesy et al., Eds., Canadian Math. Soc., Conference Proceedings, **29** (2000), 385-393.

[17] Koshmanenko V.D.: Singular perturbations defined by forms, in "Appl. self-adjoint extens. in Quantum Phys"., Eds. P.Exner, P.Šeba Lecture Notes in Phys. **324**, Springer (1987).

[18] Koshmanenko V., Singular Operator as a Parameter of Self-adjoint Extensions, *Proceeding of Krein conference*, Odessa, 1997, *Operator Theory. Advances and Applications*, **118**, (2000), 205-223.

[19] V.D. Koshmanenko, Regular approximations of singular perturbations of $\mathcal{H}_{-2}$-class, *Ukrainian Math. J.*, **52**, No. 5, 626-637 (2000).

[20] Posilicano A. A Krein-like Formula for Singular Perturbations of Self-Adjoint operators and Applications // J. Funct. Anal. – 2001. – **183**. – P. 109-147.