Тема 2. Апроксимації Паде

Лекція 2.4. Теореми Монтессу де Болора.

Для апроксимант Паде має місце наступний аналог інтерполяційної формули Ерміта.

Теорема 1. Якщо функція f є аналітичною всередині контура Γ, що охоплює початок координат, і неперервною на Γ, то має місце наступна формула залишку для апроксимант Паде:

$$f(z) - [M/N]_f(z) = \frac{z^{M+N+1}}{2\pi i Q_N(z) R_L(z)} \int_\Gamma \frac{f(v) Q_N(v) R_L(v)}{v^{M+N+1}(v-z)} dv,$$

Де $R_L(z)$ – довільний алгебраїчний многочлен степеня не вище L, відмінний від тотожного нуля.

1 Шарль Ерміт (Charles Hermite; 1822 - 1901) — французький математик.

За допомогою цієї теореми можна встановити наступну теорему Монтессу.

Теорема 2. Нехай функція f є мероморфною в крузі $K_R = \{z \colon |z| \leq R\}$ і має в ньому рівно N простих полюсів $z_1, z_2, \cdots, z_N$

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_N| < R.$$

Тоді

$$\lim_{M\to\infty}[M/N]_f(z) = f(z)$$

рівномірно на компактних підмножинах множини

$$\mathcal{D}_N = \{z\colon |z| \le R,\ \ z \ne z_i,\ \ i = 1,2,\cdots,N\}.$$

2 Робер Фернан Бертран, віконт де Монтессу де Болор
(Robert Fernand Bernard, Viscount de Montessus de Ballore; 1870 – 1937) – французький математик

Аналогічний результат є справедливим і для випадку, коли серед полюсів є кратні.

Узагальненням теореми Монтессу є наступна теорема Саффа.

Введемо необхідні означення. Нехай $\mathcal{E}$ - компакт комплексної площини, що містить нескінченну кількість точок. Тоді існує єдиний поліном – поліном Чебишева, для якого досягається величина

$$M_n \equiv \inf_{p_n\in P_n}\sup_{z\in\mathcal{E}}|p_n(z)|.$$

Цей поліном

$$T_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$$

має всі нулі z_i у випуклій оболонці $\mathcal{E}$, а максимум M_n величини $|T_n(z)|$ досягається принаймні n разів на $\mathcal{E}$. Ємність компакту $\mathcal{E}$ визначається за формулою

$$\operatorname{cap}\mathcal{E} = \lim_{n\to\infty}[M_n(\mathcal{E})]^{1/n}.$$

Теорема 3. Нехай $\mathcal{E}$ - замкнена обмежена множина комплексної площини зі зв'язним доповненням $\mathcal{K}$. Припустимо, що задана послідовність точок інтерполяції

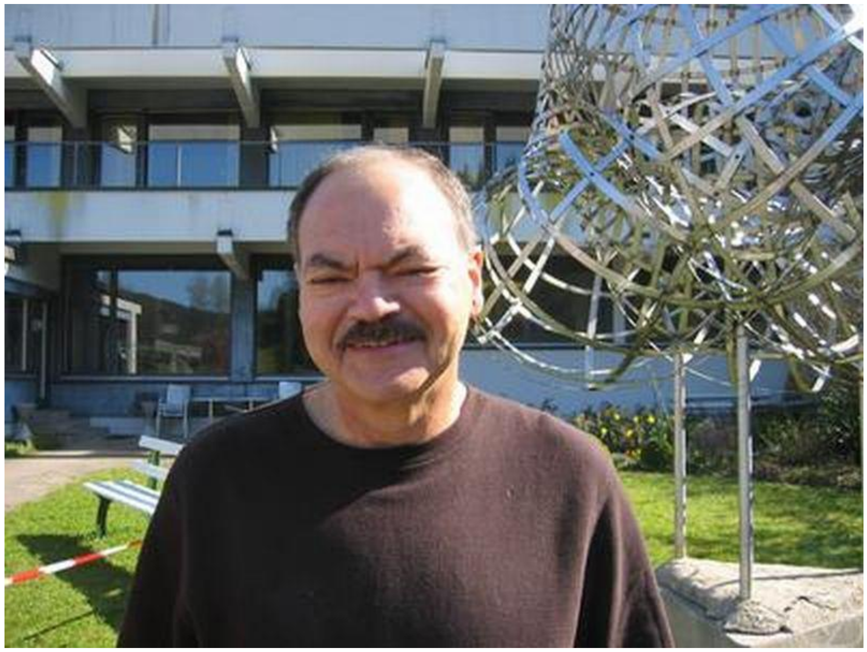
$$\begin{array}{c} \beta_1^{(0)} \\ \beta_1^{(1)}\ \ \beta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \beta_1^{(n)}\ \ \beta_2^{(n)} \cdots \beta_{n+1}^{(n)}, \end{array}$$

що не має граничних точок в $\mathcal{K}$ і така, що

$$\lim_{n\to\infty}\left|\prod_{i=1}^{n+1}\left(z-\beta_i^{(n)}\right)\right|^{1/n} = \operatorname{cap}\mathcal{E}\exp G(z),$$

де $G(z)$ – функція Гріна області $\mathcal{K}$, рівномірно за z на компактних підмножинах $\mathcal{K}$. Для кожного $\sigma > 1$ покладемо Γ_σ – лінія рівня, що визначається співвідношенням $G(z) = \ln\sigma$, а $\mathcal{E}_\sigma$ – внутрішність Γ_σ. Нехай функція f є аналітичною на $\mathcal{E}$ і мероморфною в $\mathcal{E}_\rho$ для деякого $\rho > 1$ і має в $\mathcal{E}_\rho$ рівно N полюсів з врахуванням їх кратностей. Тоді для всіх досить великих M існує єдина раціональна функція $r_{[M/N]}$, що інтерполює f в точках $\beta_1^{(M+N)}$, $\beta_2^{(M+N)}, \cdots, \beta_{M+N+1}^{(M+N)}$. Функція $r_{[M/N]}$ має рівно N полюсів, які прямують до полюсів f в $\mathcal{E}_\rho$. Крім того, $r_{[M/N]}(z) \to f(z)$ рівномірно на компактних підмножинах $\mathcal{E}_\rho$, що не містять полюсів функції f, і

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sup_{z\in\mathcal{E}}\left|f(z) - r_{[M/N]}(z)\right|\right)^{1/n} \le \frac{1}{\rho}.$$



3 Едвард Баррі Сафф (Edward Barry Saff; нар.2 січня 1944 р.) - американський математик