Тема 2. Апроксимації Паде

Лекція 2.3. Таблиця Паде та її властивості.

Апроксиманти Паде зазвичай розташовують у вигляді таблиці, що називається таблицею Паде

$N \backslash M$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\cdots$
$\mathbf{0}$	$[\mathbf{0/0}]$	$[\mathbf{1/0}]$	$[\mathbf{2/0}]$	$\cdots$
$\mathbf{1}$	$[\mathbf{0/1}]$	$[\mathbf{1/1}]$	$[\mathbf{2/1}]$	$\cdots$
$\mathbf{2}$	$[\mathbf{0/2}]$	$[\mathbf{1/2}]$	$[\mathbf{2/2}]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Верхній рядок таблиці Паде складають елементи $[M/0]_f$, $M = 0,1,2,\cdots$, які є частинними сумами ряду, чи многочленами Тейлора-Маклорена функції f. Починаючи з робіт Монтессу де Болора, багато досліджень було присвячено вивченню поведінки рядків таблиці Паде, але найбільший інтерес викликає вивчення поведінки діагоналі та першої піддіагоналі таблиці Паде, тобто апроксимант Паде порядків $[N/N]$, $N = 0,1,2,\cdots$, та $[N-1/N]$, $N = 1,2,3,\cdots$.

1 Робер Фернан Бертран, віконт де Монтессу де Болор
(Robert Fernand Bernard, Viscount de Montessus de Ballore; 1870 – 1937) – французький математик

Паралельно з таблицями Паде розглядаються також так звані S-таблиці, складені з визначників Ганкеля, відповідних елементам таблиці Паде

$$S(M/N) = H_{M-N+1,N} = \begin{vmatrix} s_{M-N+1} & s_{M-N+2} & \cdots & s_{M-1} & s_M \\ s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & \cdots & s_M & s_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{M+N-3} & s_{M+N-2} \\ s_M & s_{M+1} & \cdots & s_{M+N-2} & s_{M+N-1} \end{vmatrix}.$$

S-таблиця має вигляд

N \ M	**0**	**1**	**2**	$\cdots$
0	$S(0/0)$	$S(1/0)$	$S(2/0)$	$\cdots$
1	$S(0/1)$	$S(1/1)$	$S(2/1)$	$\cdots$
2	$S(0/2)$	$S(1/2)$	$S(2/2)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Для S-таблиць мають місце наступні властивості:

1) Якщо $S(M/N-1) \neq 0$, то

$$S(M/N+1) = \frac{S(M+1/N)S(M-1/N) - S(M/N)^2}{S(M/N-1)}.$$

Цю рівність називають $\begin{pmatrix} & * & \\ * & * & * \\ & * & \end{pmatrix}$-зірковою тотожністю, вона показує, як пов’язані елементи S-таблиці, розташування яких схематично зображається зірочками.

2) Нульові елементи утворюють в S-таблиці квадратні блоки, оточені зі всіх боків ненульовими елементами.
3) Існування нескінченного нульового блока в S-таблиці, що відповідає аналітичній функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

є необхідною і достатньою умовою того, щоб f була раціональною функцією. Раціональній функції порядку $[\lambda/\mu]$ відповідає блок S-таблиці, що визначається умовами $S(\lambda+1/\mu) \neq 0,\ S(\lambda/\mu+1) \neq 0, S(\lambda+j/\mu+j) = 0\ \forall j = 1,2,\cdots$.

Легко бачити, що апроксиманти Паде, визначені за Бейкером існують не завжди. Разом з тим справедливий наступний результат.

Теорема 1. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \text{-}$$

формальний степеневий ряд. У відповідній таблиці Паде існує нескінченно багато апроксимант Паде:

i) В кожному рядку $[M/N]$, при фіксованому N, $M \to \infty$,
ii) В кожному стовпчику $[M/N]$, при фіксованому M, $N \to \infty$,
iii) На кожній діагоналі $[N + J/N]$, при фіксованому J, $N \to \infty$.

Для апроксимант Паде також мають місце теореми двоїстості та інваріантності.

Теорема 2. Нехай $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ і $f(0) \neq 0$. Тоді

$$[M/N]_g(z) = \{[N\ /\ M]_f(z)\}^{-1}$$

за умови, що одна з цих апроксимант існує.

Теорема 3. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

Розглянемо дробово-лінійне перетворення, що зберігає початок координат

$$w = \frac{az}{1+bz},$$

Відповідну нову функцію $g(w) = f(z)$. Тоді

$$[N/N]_g(w) = [N\ /\ N]_f(z)$$

за умови, що одна з цих апроксимант існує.

Теорема 4. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

Покладемо

$$g(z) = \frac{a+bf(z)}{c+df(z)}.$$

Якщо $c + df(0) \neq 0$, то

$$[N/N]_g(z) = \frac{a + b[N / N]_f(z)}{c + d[N / N]_f(z)}$$

за умови, що $[N / N]_f(z)$ існує.