Тема 2. Апроксимації Паде

Лекція 2.2. Формули Якобі.

З означення апроксимант Паде

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k - \frac{p_M z^M + \cdots + p_1 z + p_0}{q_N z^N + \cdots + q_1 z + q_0} = O(z^{M+N+1}),$$

допускаючи що знаменник апроксиманти в нулі не обертається в нуль, тобто, $Q_N(0) = q_0 \neq 0$, отримаємо

$$(q_0 + q_1 z + \cdots + q_N z^N)(s_0 + s_1 z + \cdots) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_M z^M + O(z^{M+N+1}).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $z^{M+1}, z^{M+2}, \dots, z^{M+N}$, отримаємо рівності

$$\begin{array}{ccccccccc}
q_N s_{M-N+1} & + & q_{N-1} s_{M-N+2} & + & \cdots & + & q_0 s_{M+1} & = & 0, \\
q_N s_{M-N+2} & + & q_{N-1} s_{M-N+3} & + & \cdots & + & q_0 s_{M+2} & = & 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q_N s_M & + & q_{N-1} s_{M+1} & + & \cdots & + & q_0 s_{M+N} & = & 0.
\end{array}$$

Покладаючи $s_j = 0$ при $j < 0$ і $q_0 = 1$, ці рівності можна переписати у вигляді системи N лінійних алгебраїчних рівнянь з N невідомими коефіцієнтами знаменника

$$\begin{pmatrix}
s_{M-N+1} & s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & \cdots & s_M \\
s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & s_{M-N+4} & \cdots & s_{M+1} \\
s_{M-N+3} & s_{M-N+4} & s_{M-N+5} & \cdots & s_{M+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_M & s_{M+1} & s_{M+2} & \cdots & s_{M+N-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_N \\ q_{N-1} \\ q_{N-2} \\ \vdots \\ q_1 \end{pmatrix}
= -\begin{pmatrix} s_{M+1} \\ s_{M+2} \\ s_{M+3} \\ \vdots \\ s_{M+N} \end{pmatrix}.$$

Звідси можуть бути знайдені коефіцієнти q_i, $i = 1, 2, \cdots, N$. Після цього коефіцієнти чисельника можуть бути знайдені за допомогою рівностей

$$p_0 = s_0,$$

$$p_1 = s_1 + q_1 s_0,$$

$$p_2 = s_2 + q_1 s_1 + q_2 s_0,$$

$$\vdots$$

$$p_M = s_M + \sum_{i=1}^{\min\{M,N\}} q_i s_{M-i}.$$

Вказані рівняння називаються рівняннями Паде. Розв’язуючи ці рівняння за правилами Крамера, можна отримати явний вигляд чисельника та знаменника апроксиманти Паде

$$Q_N(z) = \begin{vmatrix} s_{M-N+1} & s_{M-N+2} & \cdots & s_M & s_{M+1} \\ s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & \cdots & s_{M+1} & s_{M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{M+N-2} & s_{M+N-1} \\ s_M & s_{M+1} & \cdots & s_{M+N-1} & s_{M+N} \\ z^N & z^{N-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix},$$

$$P_M(z) = \begin{vmatrix} s_{M-N+1} & s_{M-N+2} & \cdots & s_M & s_{M+1} \\ s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & \cdots & s_{M+1} & s_{M+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & s_{M+N-2} & s_{M+N-1} \\ s_M & s_{M+1} & \cdots & s_{M+N-1} & s_{M+N} \\ \sum_{i=0}^{M-N} c_i\, z^{N+i} & \sum_{i=0}^{M-N+1} c_i\, z^{N+i-1} & \cdots & \sum_{i=0}^{M-1} c_i\, z^{i+1} & \sum_{i=0}^{M} c_i\, z^{i} \end{vmatrix}.$$

Ці формули були встановлені німецьким математиком Густавом Якобом Якобі в 1846 році.

1 Карл Густав Якоб Якобі (Carl Gustav Jacob Jacobi; 1804 — 1851) — німецький математик

Зрозуміло, що ці формули мають місце, коли визначники відповідних систем рівнянь є відмінними від нуля

$$H_{M-N+1,N} = \begin{vmatrix} s_{M-N+1} & s_{M-N+2} & & \cdots & s_{M-1} & s_M \\ s_{M-N+2} & s_{M-N+3} & & \cdots & s_M & s_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ s_{M-1} & s_M & \cdots & & s_{M+N-3} & s_{M+N-2} \\ s_M & s_{M+1} & \cdots & & s_{M+N-2} & s_{M+N-1} \end{vmatrix}.$$

Такі визначники називаються визначниками Ганкеля.

2 Ге́рман Га́нкель (Hermann Hankel; 1839 — 1873) — німецький математик