Тема 2. Апроксимації Паде

Лекція 2.1. Класична проблема моментів та ортогональні многочлени.

В попередніх лекціях ми частково розглядали деякі питання раціональної апроксимації. Зокрема, ми відзначали, що з теореми Стоуна випливає наступний результат.

Теорема. Для кожної неперервної на всій дійсній осі функції f, для якої існують скінченні і рівні між собою границі при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться раціональний поліном вигляду

$$R_n(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n},$$

такий що для всіх $x \in (-\infty, \infty)$ буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - R\_n\ (x)| < \varepsilon.$$

Відзначимо також, що теорема Чебишева про альтернанс допускає узагальнення на випадок раціональних апроксимацій, а саме, має місце наступний результат.

Теорема. Функція R, котра серед усіх функцій вигляду

$$s(x) \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$$

найменше відхиляється на відрізку $[a, b]$ від функції f, є єдиною. Ця функція повністю характеризується наступною властивістю: якщо вона приведена до вигляду

$$s(x) \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-\nu} x^{n-\nu}}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-\mu} x^{m-\mu}} = s(x) \frac{B(x)}{A(x)},$$

де $0 \le \mu \le m$, $0 \le \nu \le n$, $b_{m-\mu} \ne 0$, і дріб $\frac{B(x)}{A(x)}$ нескоротний, то число N послідовних точок відрізка $[a, b]$, в яких різниця $f - R$ набуває зі знаками, що чергуються, значень $H_R = \|f - R\|$, є не меншим за $m + n - d + 2$, де $d = \min\{\mu, \nu\}$.

Виявляється, що методи наближення раціональними функціями дають можливість ефективно розв'язувати багато важливих прикладних задач. Насамперед це пов'язано з наступними факторами:

1) в багатьох важливих випадках швидкість збіжності раціональних наближень значно перевищує швидкість збіжності поліноміальних наближень. Так, скажімо, величина $E_{N,N}\left(e^z; C_{K_R}\right)$ найкращого рівномірного наближення функції e^z раціональними поліномами вигляду

$$R_{N,N}(z) = \frac{P_N(z)}{Q_N(z)},$$

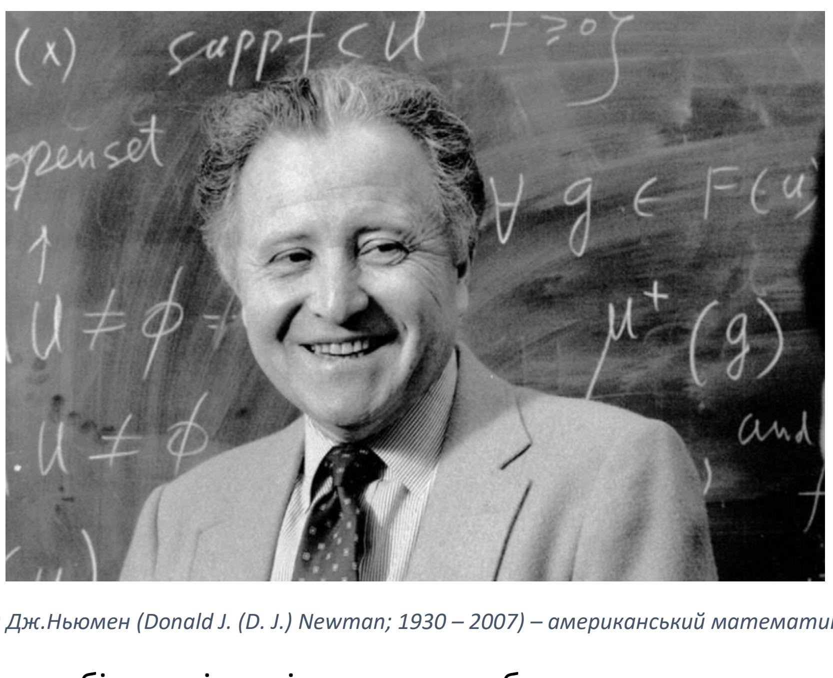
де $P_N(z)$ та $Q_N(z)$ – алгебраїчні многочлени степенів, що не перевищують N в крузі $K_R = \{z: |z| \leq R\}$ допускає оцінку

$$E_{N,N}\left(e^z; C_{K_R}\right) \leq A\ 4^{-N} E_{2N}\left(e^z; C_{K_R}\right),$$

де $A = \mathrm{const}$, а $E_{2N}\left(e^z; C_{K_R}\right)$ – величина найкращого рівномірного наближення функції e^z в крузі K_R за допомогою алгерраїчних многочленів степеня не вище $2N$. Іншими словами, функція e^z в крузі K_R раціональними поліномами наближується в 4^N разів краще, ніж алгебраїчними многочленами з тією ж кількістю коефіцієнтів.

Відомо також, що функцію $|x|$ на відрізку $[-1,1]$ не можна наблизити алгебраїчними многочленами так, щоб порядок наближення був кращим за N^{-1}, де N – степінь многочлена. Разом з тим Дональдом Дж. Ньюменом було встановлено, що

$$E_{N,N}\left(|x|; C_{[-1,1]}\right) \leq 3e^{-\sqrt{2N}}.$$



1 Дональд Дж.Ньюмен (Donald J. (D. J.) Newman; 1930 – 2007) – американський математик

2) часто область збіжності раціональних наближень є значно ширшою за область збіжності степеневих рядів, які зазавичай використовуються в прикладних дослідженнях. Наприлад, раціональні апроксиманти Паде

функції $\operatorname{arctg} z$ порядків $[N/N]$ збігаються до наближуваної функції рівномірно на кожному компакті з зірки Міттаг-Леффлера $\mathbb{C} \setminus \big((-i\infty, -i) \cup (i, i\infty)\big)$, тобто з природної області аналітичності функції $\operatorname{arctg} z$. Разом з тим многочлени Тейлора функції $\operatorname{arctg} z$ збігаються лише всередині круга $K_1 = \{z: |z| \leq 1\}$.
3) В деяких практичних задачах виникає необхідність обраховувати розташування особливих точок наближуваних функцій, і саме дослідження раціональних наближень, що мають полюси в комплексній площині, дозволяє розв'язувати такі задачі.

Разом з тим розгляд раціональних апроксимацій пов'язаний з необхідністю врахування двох ускладнюючих факторів: суттєвої нелінійності раціональних апроксимацій та наявності полюсів у раціональних функцій.

Одним з найпоширеніших апаратів раціонального наближення є апроксиманти Паде.

1 Анрі Ежен Паде (Henri Eugène Padé, 1863-1953) — французький математик

Означення 1. Будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де P_M та Q_N – алгебраїчні многочлени степенів, що не перевищують M та N відповідно, є апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ формального степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1})$$

при $z \to 0$, тобто розклад раціональної функції $[M/N]_f(z)$ в степеневий ряд співпадає з розкладом $f(z)$ до члена, що містить z^{M+N} включно.

Апроксиманти Паде були запроваджені німецьким математиком Карлом Якобі у 1846 році, і ним же буди побудовані детермінантні вирази для апроксимант Паде через коефіцієнти степеневого розклад наближуваної фуккції.

2Карл Густав Якоб Якобі (Carl Gustav Jacob Jacobi; 1804 — 1851) — німецький математик

Одним з найбільш глибоких досягнень класичного періоду розвитку теорії апроксимацій Паде стало з’ясування їх тісних зв’язків з класичною проблемою моментів та теорією ланцюгових дробів.

Означення 2. Класична проблема моментів на борелівській підмножині $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ полягає у тому, щоб за заданою числовою послідовністю $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначити невід’ємну міру $d\mu$ на Δ, для якої виконувались би рівності

$$s_k = \int_\Delta t^k d\mu(t), \qquad k = \overline{0, \infty}.$$

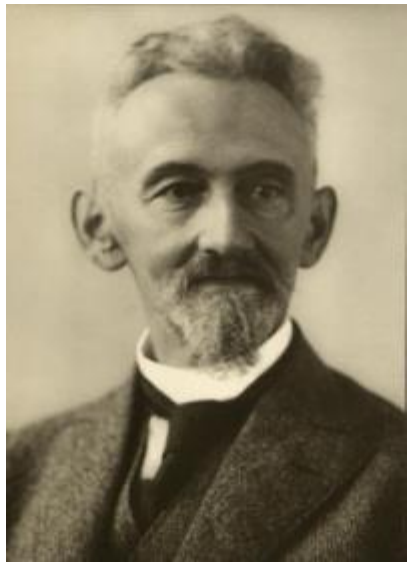
Для $\Delta = \mathbb{R}$ проблема моментів називається проблемою моментів Гамбургера,

3 Ганс Людвіг Гамбургер (Hans Ludwig Hamburger; 1889 – 1956) - німецький математик

для $\Delta = \mathbb{R}_+$ проблема моментів називається проблемою моментів Стілтьєса

4 Томас Іоаннес Стілтьєс (Thomas Joannes Stieltjes; 1856 — 1894) — голландський математик

для $\Delta = [0,1]$ проблема моментів називається проблемою моментів Гаусдорфа.



5 Фелікс Гаусдорф (Felix Hausdorff;1868 — 1942) — німецький математик

Для функцій, коефіцієнти степеневих розкладів яких можуть бути представлені у вигляді

$$s_k = \int_\Delta t^k d\mu(t), \qquad k = \overline{0,\infty},$$

Їх апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, можуть бути побудовані в термінах многочленів, ортогональних на Δ за мірою $d\mu$, а саме, якщо позначити через $\{A_N(t)\}_{N=0}^{\infty}$ послідовність нетривіальних алгебраїчних многочленів таких, що

$$\int_\Delta A_N(t) A_M(t) d\mu(t) = \delta_{N,M},$$

то

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z),$$

а

$$P_{N-1}(z) = z^{N-1} \int\limits_\Delta \frac{A_N(1/z) - A_N(t)}{1/z - t} d\mu(t).$$

Ця обставина є визначальною для вивчення апроксимант Паде так званих марковських функцій, тобто функцій зображуваних у вигляді:

$$f(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

6 Андрі̂й Андрі̂йович Ма́рков (1856 — 1922) — російський математик