Тема 1. Основи теорії раціональної апроксимації

Лекція 3. Наближення алгебраїчними многочленами. Основні теореми

(продовження)

Особливої уваги заслуговують питання в гільбертових просторах. Має місце наступний критерій елемента найкращого наближення в гільбертовому просторі.

Якщо H – гільбертів простір, а $F \subset H$ – його підпростір, то елемент $x^* \in F$ елементом найкращого наближення елемента $x \in H \setminus F$ тоді і тільки тоді, коли $x - x^* \perp F$, тобто коли $(x - x^*, y) = 0 \ \forall y \in F$.

Завдяки цьому для наближення в гільбертовому просторі використовуються частинні суми рядів Фур'є.

1 *Жан Бати́ст Жозеф Фур'є́ (Jean Baptiste Joseph Fourier; 1768 — 1830) — французький математик і фізик*

Нехай H – гільбертів простір, а $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ - ортонормований базис в H. Тоді узагальненим поліномом найкращого наближення елемента $x \in H$ вигляду

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\, e_k$$

буде поліном

$$p_n^* = \sum_{k=0}^{n} (x, e_k) e_k.$$

Коефіцієнти $c_k^* = (x, e_k)$ називаються коефіцієнтами Фур'є елемента $x \in H$.

Отже для того, щоб знайти в гільбертовому просторі H елемент найкращого наближення елемента $x \in H$ за допомогою підпростору, що є лінійною оболонкою елементів $\{x_k\}_{k=0}^n$ необхідно просто ортогоналізувати цю систему елементів за допомогою процесу ортогоналізації Грама-Шмідта, вирахувати коефіцієнти Фур'є і записати поліном найкращого наближення в вищенаведеному вигляді.

Таким чином ми з'ясували в основному питання існування, єдиності та характеризації елементів найкращого наближення у лінійних просторах.

Далі виникає питання, а чи будуть збігатися ці наближення до наближуваного елемента по мірі того, як ми розширюємо розмірність підпростору, яким наближуємо, або по мірі того як зростає степінь многочлена, чи узагальненого полінома.

У випадку наближення алгебраїчними многочленами на відрізках дійсної осі відповідь на це питання дав Карл Вейєрштрас у 1885 р.

2 Карл Теодор Вільгельм Веєрштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß; 1815 — 1897) — німецький математик

Теорема Вейєрштраса. Для кожної неперервної на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функції f для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться алгебраїчний многочлен P, такий що

$$\|f-P\|_{C[a,b]}<\varepsilon.$$

Маршал Стоун у 1937 р. довів теорему, що дозволяє, зокрема, поширити теорему Вейєрштраса на випадок наближення тригонометричними поліномами та на випадок наближення функцій кількох змінних.

3 Ма́ршал Ха́рві Сто́ун (Marshall Harvey Stone, 1903—1989) — американський математик

Для формулювання цієї теореми наведемо кілька попередніх означень.

Означення 1. Множина A функцій, означених на деякій непорожній множині E, називається *алгеброю*, якщо ця множина замкнена відносно операцій множення на скаляри, додавання та множення, тобто, якщо $f,g\in A$, $c\in\mathbb{C}$, то також

$$cf\in A,\ f+g\in A,\ f\cdot g\in A.$$

Означення 2. Задана на E алгебра A *розділяє точки* множини E, якщо для кожної пари різних точок $x_1,x_2\in E$ існує хоча б одна функція $f\in A$, така що

$$f(x_1)\neq f(x_2).$$

Означення 3. Задана на E алгебра A *не зникає в жодній точці* множини E, якщо для кожної точки $x_0\in E$ існує хоча б одна функція $f\in A$, така що

$$f(x_0)\neq 0.$$

Означення 4. Задану на E алгебру неперервних функцій A будемо називати *стоунівською*, якщо вона розділяє точки множини E і не зникає в жодній точці множини E.

Теорема Стоуна. Якщо задана на компакті K алгебра неперервних функцій є стоунівською, то множина функцій із A є всюди щільною в множині всіх неперервних на K функцій, а отже будь-яку неперервну на K функцію F можна як-завгодно добре наблизити елементами алгебри A (у рівномірній метриці).

Один з наслідків цієї теореми стосується раціональних наближень.

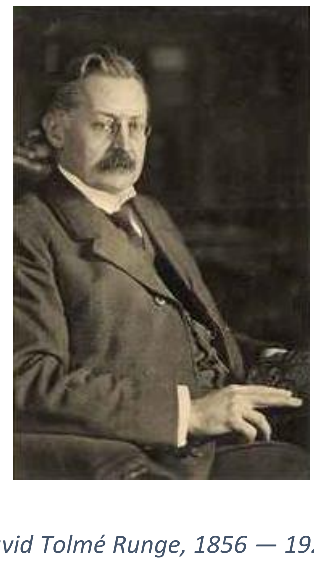
Теорема. Для кожної неперервної на всій дійсній осі функції f, для якої існують скінченні і рівні між собою границі при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться раціональний поліном вигляду

$$R_n(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n},$$

такий що для всіх $x \in (-\infty, \infty)$ буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon.$$

У випадку функцій комплексної змінної має місце теорема Рунге — твердження про можливість рівномірного наближення голоморфної функції раціональними функціями або многочленами. Доведена німецьким математиком Карлом Рунге у 1885 році.



4 Карл Давид Тольме Рунге (Carl David Tolmé Runge, 1856 — 1927) — німецький математик, фізик

Теорема Рунге. Нехай $\overline{\mathbb{C}}$ - замкнена комплексна площина ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) і $K \subset \mathbb{C}$ - компактна підмножина. І нехай f аналітична функція в деякій відкритій множині, що містить K. Якщо A – множина, що містить по одній точці з кожної компоненти зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться раціональна функція r з полюсами в A, для якої

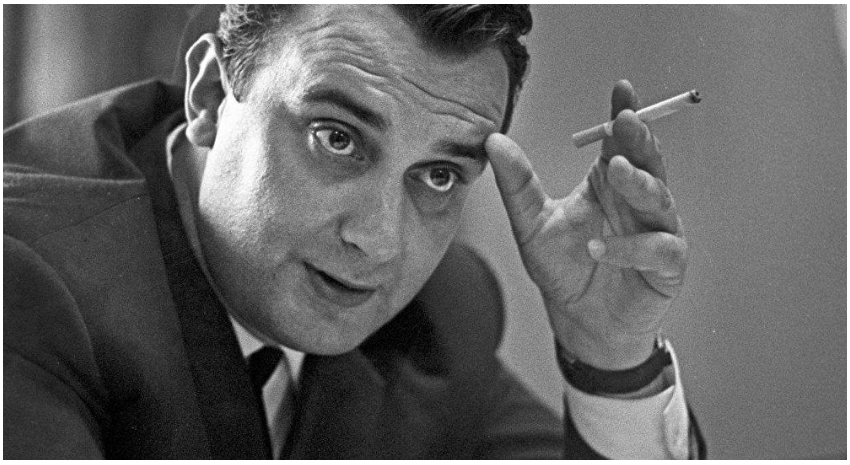
$$\|f - r\|_{C(K)} < \varepsilon.$$

Наслідок. Якщо множина $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ зв'язна, то за вказаних умов знайдеться алгебраїчний многочлен p, такий що

$$\|f - p\|_{C(K)} < \varepsilon.$$

Для компактної множини $K \subset \mathbb{C}$ через $A(K)$ позначимо множину всіх функцій, аналітичних у внутрішності K і неперервних на K.

Сергієм Микитовичем Мергеляном у 1951 році був встановлений наступний результат.



5 Сергій Микитович Мергеля́н (Սերգեյ Մերգելյան; 1928—2008) — вірменський математик

Теорема Мергеляна. Для того, щоб на деякій замкненій множині K будь-яку функцію $f \in A(K)$ можна було як-завгодно добре наблизити алгебраїчними многочленами, необхідно і достатньо, щоб множина K була компактом з однозв'язним доповненням.

З'ясувавши умови збіжності, хочеться знайти також оцінки швидкості збіжності та з'ясувати, від яких властивостей функцій ці оцінки залежать.

Виявляється, що величина найкращого наближення неперервної на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функції f прямує до нуля тим швидше, чим більш гладкою є наближувана функція, тобто, чим більше функція f має неперервних похідних. Для порівняння гладкості функцій, що мають однакову кількість неперервних похідних, вводиться поняття модуля неперервності.

Означення 5. Для неперервної на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функції f будемо називати *модулем неперервності першого порядку*, або просто *модулем неперервності*, функцію $\omega: [0, b-a] \to \mathbb{R}$, визначену рівністю

$$\omega(u) = \omega(f; u) = \sup_{\substack{a \le x \le b-h \\ 0 \le h \le u}} |f(x+h) - f(x)|.$$

Модуль неперервності має наступні властивості:

1) $\omega(0) = 0$;

2) ω є монотонно неспадною функцією;

3) $\omega \in C[0, b-a]$;

4) ω є напівадитивною функцією в тому розумінні, що $\forall u_1, u_2 \ge 0$

$$\omega(u_1 + u_2) \le \omega(u_1) + \omega(u_2).$$

Аналогічно означається модуль неперервності періодичних функцій.

Поняття модуля неперервності використовується для класифікації неперервних функцій.

Означення 6. При кожному фіксованому $\alpha \in (0,1]$ Гьольдера (або класом Ліпшиця) порядку α називається множина всіх неперервних функцій f, модуль неперервності яких задовольняє умову

$$\omega(f; u) \le M u^{\alpha},$$

де M – незалежна від α константа. Позначають цей клас H^{α}, або $\mathrm{Lip}\,\alpha$. В періодичному випадку відповідно $\widetilde{H^{\alpha}}$, або $\widetilde{\mathrm{Lip}\,\alpha}$.

6 Отто Людвіг Гьольдер (Otto Ludwig Hölder; 1859 — 1937) — німецький математик

7 Рудольф Отто Сігізмунд Ліпшиц (Rudolf Otto Sigismund Lipschitz; 1832—1903) — німецький математик

Аналогічно вводяться модулі неперервності вищих порядків.

Означення 7. *Нехай функція f визначена на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тоді $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in [a, b]$ $\forall h > 0$, таких що $x + kh \in [a, b]$, k-ю різницею* функції f в точці x з кроком h називається величина

$$\Delta_h^k(f; x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Означення 8. Для $f \in C[a, b]$ назвемо модулем неперервності k-го порядку функцію ω_k: $\left[0, \frac{b-a}{k}\right] \to \mathbb{R}$, визначену рівністю

$$\omega_k(u) = \sup_{\substack{a \le x \le b - kh \\ 0 \le h \le u}} \left|\Delta_h^k(f; x)\right|.$$

Означення 9. Клас неперервних функцій f, яких виконується умова

$$\omega_2(f; u) \le Mu,$$

де $M = \mathrm{const}$, називається класом Зигмунда і позначається через Z. В періодичному випадку відповідний клас має позначення $\tilde{Z}$.

8 *Антоній Зиґмунд (Anthony Zygmunt; 1900 – 1992) – польський математик*

Кожна функція, що належить класу $\mathrm{Lip}\,1$, належить і класу Z, але зворотне включення не є справедливим.

В 1911 р. Д.Джексон вперше отримав результат, який дає оцінку швидкості збіжності тригонометричних поліномів найкращого наближення неперервних функцій.

9 *Данхем Джексон (Dunham Jackson; 1888 – 1946) - американський математик*

Теорема Джексона. Якщо f – неперервна 2π-періодична функція, то $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{E}_n(f) \le C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

де $C = \mathrm{const}$, а $\tilde{E}_n(f)$ – величина найкращого рівномірного наближення функції f тригонометричними поліномами порядку n вигляду

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kt + b_k).$$

Якщо $f \in C^{(r)}[0,2\pi]$, *то* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{E}_n(f) \le \frac{C_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right).$$

У 1951 р. ця теорема була узагальнена С.Б.Стєчкіним.

10 Сергій Бори́сович Стєчкін (1920 — 1995) — російський математик

Теорема Стєчкіна. $\forall k \in \mathbb{N}$ для кожної неперервної 2π-періодичної функції f місце нерівність

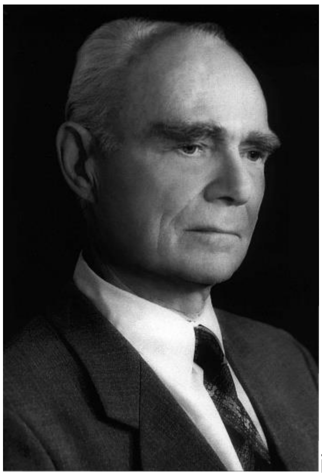
$$\tilde{E}_n(f) \le C_k\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right).$$

Якщо $f \in C^{(r)}[0,2\pi]$, *то відповідно*

$$\tilde{E}_n(f) \le \frac{C_{k+r}}{n^r}\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right).$$

В 1961 р. М.П.Корнєйчук вказав точну константу в нерівності Джексона

$$\tilde{E}_n(f) \le 1 \cdot \omega\left(f; \frac{\pi}{n}\right).$$


і

11 Мико́ла Па́влович Корнійчу́к (1920 — 2003) — український математик

Виявляється, що і навпаки: Якщо ми маємо оцінки для найкращих наближень 2π-періодичної функції, то можна отримати оцінки для її модулів неперервності. Зокрема, має місце наступна теорема про конструктивну характеристику класів Гьольдера та Зігмунда.

Теорема. Для того, щоб при деякому $r \in \mathbb{Z}_+$ і $\alpha \in (0,1)$ функція f належала класу $W^r\widetilde{H^\alpha}[0,2\pi]$, необхідно і достатньо, щоб $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f) \leq \frac{C}{n^{r+\alpha}}.$$

Теорема. Для того, щоб при деякому $r \in \mathbb{Z}_+$ функція f належала класу $W^r\tilde{Z}[0,2\pi]$, необхідно і достатньо, щоб $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f) \leq \frac{C}{n^{r+1}}.$$

В неперіодичному випадку ситуація дещо складніша. Тобто прямі теореми там також мають місце, але обернені теореми не є вірними. Тому доводиться уточнювати прямі теореми наступним чином.

О.П.Тіманом у 1951 р. та В.К.Дзядиком у 1958 р. встановлено такий результат.

12 Олександр Пилипович Тіман (1920-1988) - український математик

13 Владислав Кирилович Дзядик (1919-1998) - український математик

Теорема Тімана-Дзядика. При довільному $r \in \mathbb{Z}_+$ для кожної функції $f \in W^r C[a,b]$ і для кожного цілого $n \geq r$ існує алгебраїчний многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, такий що $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C[\rho_n(x)]^r \omega_2(\rho_n(x)),$$

де

$$\rho_n(x) = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Наслідок. При довільному $r \in \mathbb{Z}_+$ для кожної функції $f \in W^r H^\alpha[a,b]$, $\alpha \in (0,1)$, і для кожного цілого $n \geq r$ існує алгебраїчний многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, такий що $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C[\rho_n(x)]^{r+\alpha}.$$

При довільному $r \in \mathbb{Z}_+$ для кожної функції $f \in W^r Z[a,b]$ і для кожного цілого $n \geq r$ існує алгебраїчний многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, такий що $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C[\rho_n(x)]^{r+1}.$$

В термінах оцінок через ρ_n вдається отримати і обернені теореми наближення алгебраїчними многочленами, і, як наслідок, знайти конструктивну характеристику неперіодичних класів Гьольдера та Зігмунда.

Теорема. Для того, щоб задана на $[a,b]$ функція f при деякому $r \in \mathbb{Z}_+$ належала класу $W^r H^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, необхідно і достатньо, щоб $\forall n \geq r$ існував алгебраїчний многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, такий що $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C[\rho_n(x)]^{r+\alpha}.$$

Теорема. Для того, щоб задана на $[a,b]$ функція f при деякому $r \in \mathbb{Z}_+$ належала класу $W^r Z$, необхідно і достатньо, щоб $\forall n \geq r$ існував алгебраїчний многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$, такий що $\forall x \in [a,b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C[\rho_n(x)]^{r+1}.$$

Цей підхід дозволив В.К.Дзядику згодом отримати також прямі та обернені теореми наближення алгебраїчними многочленами на множинах комплексної площини.