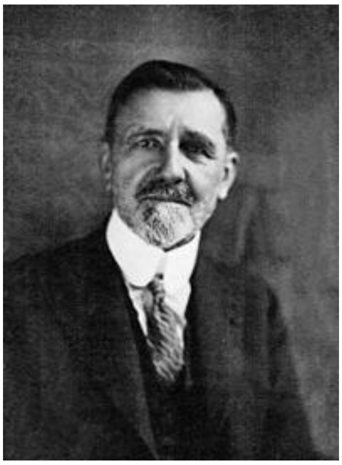
Тема 1. Основи теорії раціональної апроксимації

Лекція 2. Наближення алгебраїчними многочленами. Основні теореми

У випадку наближення неперервних функцій алгебраїчними многочленами на відрізках дійсної осі має місце наступна теорема існування, встановлена Емілем Борелем в 1905 р.



1 Емі̂ль Боре́ль (1871 —1956) — французький математик

Теорема 1. Для кожної функції $f \in C[a,b]$ і для кожного цілого невід'ємного n існує алгебраїчний многочлен степеня n її найкращого рівномірного наближення P_n^*.

Аналогічний результат має місце і для випадку наближення тригонометричними поліномами. Цей результат поширюється і на довільні лінійні нормовані простори, а саме Н.І.Ахієзером в 1965 р. встановлена наступна теорема.

2Нау́м Іллі̂ч Ахіє́зер (1901 —1980) — український математик

Теорема 2. Нехай в довільному лінійному нормованому просторі $\mathcal{X}$ обрано які-небудь $n+1$ лінійно незалежних елементів $g_0, g_1, \dots, g_n$. Тоді для будь-якого елемента $x \in \mathcal{X}$ серед узагальнених поліномів вигляду

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k,$$

де c_k – дійсні або ж комплексні коефіцієнти, знайдеться принаймні один поліном P_n^* найкращого наближення елемента x, тобто такий що

$$\|x - P_n^*\| = inf_{c_k} \|x - P_n\|.$$

У випадку рівномірного наближення алгебраїчними многочленами на відрізку дійсної осі такий многочлен найкращого наближення буде єдиним. Для того, щоб сформулювати більш загальний результат введемо наступне означення.

Означення 5. Система заданих на деякій множині $\mathfrak{M}$ метричного простору, що містить принаймні $n+1$ точку, неперервних функцій

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$$

називається *чебишовською* на цій множині, якщо будь-який узагальнений поліном за цією системою вигляду

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t),$$

де c_k – дійсні або ж комплексні коефіцієнти, серед яких є принаймні один ненульовий, має на $\mathfrak{M}$ не більше, ніж n різних коренів.

3Пафну́тій Льво́вич Че́бишов (1821 — 1894) — російський математик і механік

Теорема 3 (А.Хаар, 1918, А.М.Колмогоров, 1948). Нехай на замкненій обмеженій множині $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, що містить принаймні $n+1$ точку, задана деяка система дійсних або комплексних неперервних функцій

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t).$$

Тоді для того, щоб для довільної неперервної на $\mathfrak{M}$ функції f існував єдиний узагальнений поліном P_n^* її найкращого рівномірного наближення вигляду

$$P_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* \varphi_k(t),$$

необхідно і достатньо, щоб система функцій $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ була чебишовською на $\mathfrak{M}$.

С.М.Нікольським в 1947 р. встановлено теорему, яка показує, що у випадку єдиності полінома найкращого наближення цей поліном неперервно залежить від наближуваної функції.

4Сергій Миха́йлович Ніко́льський (1905 — 2012) — російський математик

Теорема 4. Якщо на замкненій обмеженій множині $\mathfrak{M}$ для кожної неперервної функції f існує за даною системою лінійно незалежних неперервних функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{n}$ єдиний поліном $P_n^*(f)$ її найкращого рівномірного наближення, то цей поліном рівномірно залежить від наближуваної функції f в тому розумінні, що $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ таке, що

$$\left\| P_n^*(f) - P_n^*(f_1) \right\|_{c(\mathfrak{M})} < \varepsilon,$$

як тільки

$$\left\| f - f_1 \right\|_{c(\mathfrak{M})} < \delta.$$

У випадку рівномірного наближення функцій алгебраїчними многочленами на відрізках дійсної осі П.Л.Чебишовим у 1854 р. було встановлено теорему характеризації многочлена найкращого наближення.

Теорема 5. Нехай на сегменті $[a,b]$ задана неперервна функція f. Тоді для того, щоб деякий многочлен P_n^* степеня, що не перевищує n, був многочленом її найкращого рівномірного наближення, необхідно і достатньо, щоб на $[a,b]$ знайшлась принаймні одна система з $n+2$ точок t_j, $j=\overline{1,n+2}$, $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+2} \le b$, в яких різниця

$$r_n(t) = f(t) - P_n^*(t)$$

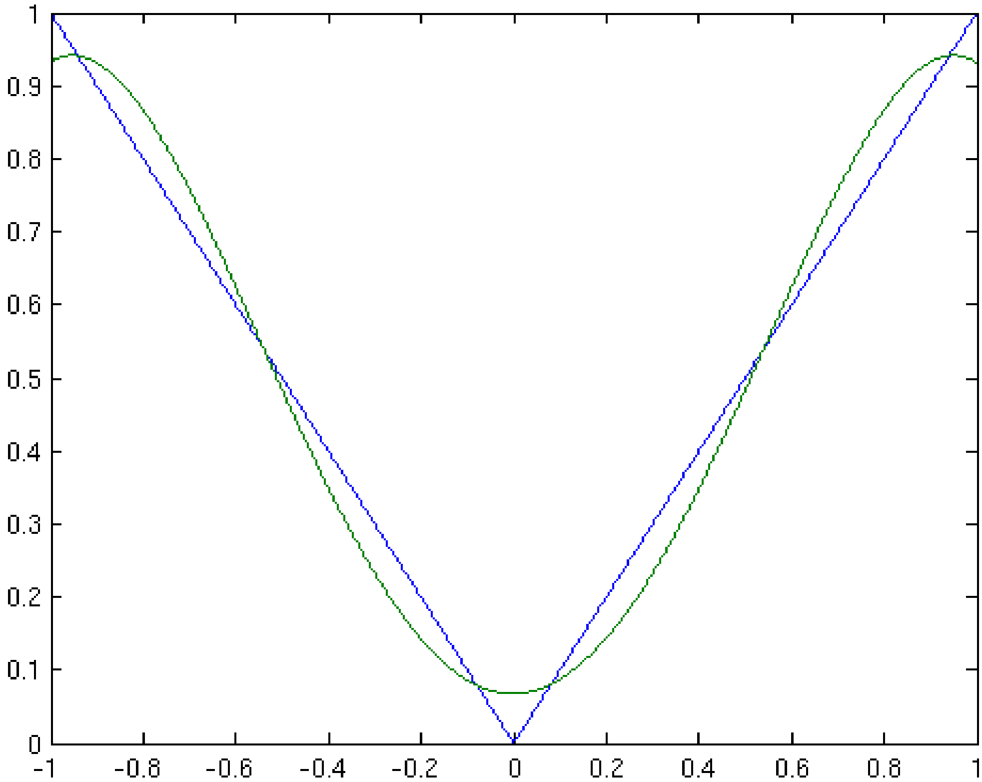
1) почергово приймає значення різних знаків,

2) досягає по модулю найбільшого на $[a,b]$ значення,

тобто в точках t_j, $j=\overline{1,n+2}$ повинні виконуватися умови:

$r_n(t_1) = -r_n(t_2) = r_n(t_3) = \cdots = (-1)^{n+1} r_n(t_{n+2}) = \pm\|r_n\|_C$.

Систему точок $\{t_j\}_{j=1}^{n+2}$ називають *чебишовським альтернансом*. На малюнку зображено альтернанс при наближенні функції $f(t)=|t|$ на відрізку $[-1,1]$ алгебраїчними многочленами степеня $n=4$.



Термін **альтернанс** був введений І. П. Натансоном в 1950-і рр.

5 Ісидор Павлович Натансон (1906 —1964) — російський математик

Аналогічна теоремі 5 теорема про альтернанс має місце при наближенні тригонометричними поліномами, а також при наближенні узагальненими поліномами за чебишовськими системами функцій.

Для оцінки знизу величини найкращого наближення використовується наступна теорема, встановлена Ш. де ла Валле-Пуссеном в 1919 р.

6Барон Шарль Жан Етьéн Густáв Ніколя́ де ла Валлé-Пуссéн (1866—1962) — бельгійський математик

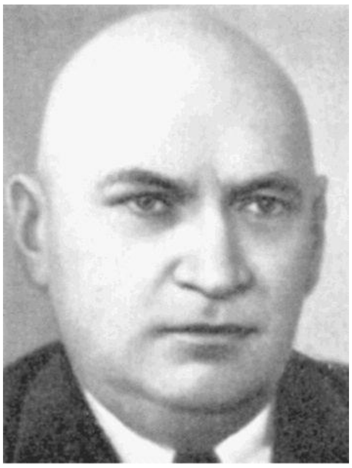
Теорема 6. Якщо для неперервної на $[a, b]$ функції f деякий узагальнений поліном P_n за чебишовською системою $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{n}$ має ту властивість, що різниця $f - P_n$ на деякій системі $n+2$ впорядкованих точок $t_j, j = \overline{1, n+2}, a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+2} \leq b$, приймає значення з почергово змінними знаками:

$$\operatorname{sign}\{f(t_j) - P_n(t_j)\} = -\operatorname{sign}\{f(t_{j+1}) - P_n(t_{j+1})\},$$

то

$$E_n(f) \geq \min_{1 \leq j \leq n+2} |f(t_j) - P_n(t_j)|.$$

За допомогою цієї теорем 5 та 6 Є.Я Ремезом було розроблено алгоритми побудови многочленів найкращого наближення неперервних на відрізку функцій.



7 Євге́н Я́кович Реме́з (1896 — 1975) — український математик

Теорема про характеризацію многочлена найкращого рівномірного наближення функції комплексної змінної була встановлена А.М.Колмогоровим у 1948 р.

Спочатку наведено необхідне означення.

Означення 5. Якщо на замкненій обмеженій множині $\mathfrak{M}$ задана неперервна функція f і (узагальнений) поліном P_n, то кожну точку $z_0 \in \mathfrak{M}$, в якій виконується рівність

$$|f(z_0) - P_n(z_0)| = \|f - P_n\|_C,$$

будемо називати e-точкою різниці $f - P_n$.

Теорема 7. Нехай на замкненій обмеженій множині $\mathfrak{M}$ задана $n+1$ фіксована неперервна функція

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z)$$

та неперервна функція f, яку потрібно наближувати узагальненими поліномами вигляду

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z).$$

Тоді для того, щоб деякий поліном

$$P_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* \varphi_k(z)$$

був поліномом найкращого рівномірного наближення функції f, необхідно і достатньо, щоб на множині E всіх e-точок різниці $f - P_n^*$ при будь-якому поліномі $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z)$ виконувалась нерівність

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re}\left\{P_n(z)\overline{[f(z) - P_n^*(z)]}\right\} \leq 0.$$