Тема 1. Основи теорії раціональної апроксимації

Лекція 1. Питання апроксимації в лінійних нормованих просторах

Задача теорії наближення функцій, взагалі кажучи, формулюється наступним чином:

На деякій множині $\mathfrak{M} \subset \mathcal{X}$ (це може бути множина дійсних чисел, множина комплексних чисел, багатовимірний дійсний чи комплексний простір і т.д.) задана функція $f: \mathfrak{M} \to \Phi$ (це, як правило поле дійсних або комплексних чисел, хоча можливі і інші варіанти). На цій же множині задане параметризоване сімейство функцій $\mathcal{F}(c_0, c_1, \dots, c_n; \cdot): \mathfrak{M} \to \Phi$. Параметри $c_0, c_1, \dots, c_n$ теж, як правило, дійсні, або комплексні числа. Треба знайти значення параметрів $c_0, c_1, \dots, c_n$, за яких $\mathcal{F}(c_0, c_1, \dots, c_n; \cdot)$ мінімально відрізняється від f.

Відразу виникає питання, що значить мінімально відрізняється. Для того, щоб оцінювати відхилення, має бути встановлена міра такого відхилення. А отже простір функцій має бути метричним.

Означення 1. Нехай $\mathcal{X}$ – деяка множина, і ρ- дійснозначна функція, визначена на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, що має властивості:

1) $\rho(x, y) \geq 0 \ \forall \ x, y \in \mathcal{X}$;

2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Функція ρ називається *метрикою*. Множини

$$\rho(x,\varepsilon) = \{y|\rho(x,y) < \varepsilon\}$$

називаються сферами в просторі $\mathcal{X}$, точка x називається центром, а ε – радіусом сфери. Метрична топологія в $\mathcal{X}$ – це найслабша з топологій, що містить ці сфери. Множина $\mathcal{X}$ з визначеною на ній метричною топологією називається *метричним простором*.

Метричний простір називається *повним*, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність є збіжною.

Задачі теорії наближень здебільшого розглядаються в лінійних просторах.

Означення 2. *Лінійний простір* на полем Φ – це адитивна група $\mathcal{X}$ з операцією

$$m: \Phi \times \mathcal{X} \to \mathcal{X},$$

що записується у вигляді

$$m(\alpha, x) = \alpha x$$

і має властивості:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \ \forall\, x, y \in \mathcal{X}\ \forall \alpha \in \Phi$;

2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \ \ \forall\, x \in \mathcal{X}\ \forall \alpha, \beta \in \Phi$;

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \ \ \forall\, x \in \mathcal{X}\ \forall \alpha, \beta \in \Phi$;

4) $1 \cdot x = x \ \ \ \forall\, x \in \mathcal{X}$.

Елементи векторного простору називаються *векторами*, а елементи поля коефіцієнтів – *скалярами*.

Як правило, в якості поля скалярів Φ розглядаються поле дійсних чисел $\mathbb{R}$, або поле комплексних чисел $\mathbb{C}$.

В лінійному просторі метрику вводять шляхом визначення норми.

Означення 3. Нехай $\mathcal{X}$ – лінійний простір. Відображення

$$\|\cdot\|: \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

називається *нормою*, якщо воно має властивості:

1) $\|x\| \geq 0 \; \forall \, x \in \mathcal{X}; \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \; \forall \, x \in \mathcal{X} \quad \forall \alpha \in \Phi;$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall \, x, y \in \mathcal{X}$ (нерівність трикутника).

В нормованому просторі метрику можна ввести наступним чином:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Одним з важливих випадків нормованих просторів є простори зі скалярним добутком.

Означення 4. *Скалярним добутком* називається функція

$$(\cdot,\cdot): \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \Phi,$$

де Φ – поле дійсних, або комплексних чисел (ми надалі будемо розглядати комплексний випадок), що має властивості:

1) $(x, x) = 0 \; \Leftrightarrow x = 0;$

2) $(x, x) \geq 0 \; \forall \, x \in \mathcal{X};$

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \; \forall \, x, y, z \in \mathcal{X};$

4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \; \forall \, x, y \in \mathcal{X} \; \forall \alpha \in \Phi;$

5) $(x, y) = \overleftarrow{(y, x)} \; \forall \, x, y \in \mathcal{X}.$

Лінійний простір зі скалярним добутком називається *унітарним*.

Норма в унітарному просторі визначається рівністю:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Повний нормований простір називається *банаховим*.

1 **Сте́фан Ба́нах** (1892 — 1945) — польський та український математик

Повний унітарний простір називається гільбертовим.

2Давид Гільберт (1862 — 1943) — німецький математик

Приклади банахових та гільбертових просторів.

1) Простір E^n – лінійний простір впорядкованих послідовностей $x = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ з n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Норма визначається рівністю

$$|x| = (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2)^{1/2}.$$

Якщо полем скалярів служить поле дійсних чисел, то E^n називається n-вимірним евклідовим простором, якщо це поле є полем комплексних чисел, то E^n називається n-вимірним унітарним простором, або n-вимірним гільбертовим простором.

3 Евклі̂д (близько 365 — близько 300 до н. е.) — старогрецький математик

2) Простір l_p визначається при $1 \le p < \infty$ як лінійний простір всіх числових послідовностей $x = \{x_n\}$, для яких норма

$$\|x\|_p = \{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\}^{1/p}.$$

є скінченною. При $p = 2$ цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

3) Простір l_∞ це лінійний простір всіх обмежених числових послідовностей $x = \{x_n\}$. Норма в цьому просторі

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

4) Простір $L_p(S, \Sigma, \mu)$ визначається для довільного дійсного числа p, $1 \le p < \infty$, і будь-якого простору з додатною мірою (S, Σ, μ). Він складається з таких визначених на S μ-вимірних функцій f, для яких норма

$$|f|_p = \left\{\int_S |f(s)|^p \mu(ds)\right\}^{1/p}.$$

скінченною. Елементами простору $L_p(S, \Sigma, \mu)$ є фактично не функції, а класи еквівалентних між собою функцій, причому дві функції еквівалентні, якщо вони співпадають майже скрізь. При $p = 2$ цей простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f, g) = \int_S \ f(s)g(s) \ \mu(ds).$$

5) Простір $L_\infty(S, \Sigma, \mu)$ визначається для простору з додатною мірою (S, Σ, μ) і складається із всіх суттєво обмежених відносно μ вимірних функцій f. Норма дорівнює

$$|f|_\infty = \operatorname{esssup}_{s \in S}|f(s)|.$$

6) Простір $C[a, b]$ складається з функцій неперервних на відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Норма визначається рівністю

$$|f|_C = \sup_{x \in [a,b]}|f(x)|.$$

7) Простір $C^n[a, b]$ – множина визначених на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцій, що мають n неперервних похідних. Норма визначається рівністю

$$|f|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in [a,b]}\left|f^{(k)}(x)\right|.$$

8) Простір $A(D)$ визначається для області $D \subset \mathbb{C}$, як сукупність комплексних функцій, що неперервні на замиканні D і аналітичні на D. Норма визначається рівністю

$$|f|_{A(D)} = \sup_{z \in D}|f(z)|.$$

Задачі теорії наближень

1) *Задача про найкраще наближення*. Якщо в метричному просторі $\mathcal{X}$ є елемент x і наближуюча множина $\mathcal{K}$, то величиною найкращого наближення елемента x за допомогою елементів множини $\mathcal{K}$ називається величина:

$$E(x,\mathcal{K}) = \inf_{y\in\mathcal{K}}\rho(x,y).$$

Елемент $x^* \in \mathcal{K}$, на якому реалізується цей інфімум, називається елементом найкращого наближення елемента x за допомогою елементів множини $\mathcal{K}$. Отож, виникають задачі з'ясування питань існування та єдиності елемента найкращого наближення, а також алгоритмів побудови такого елемента.

2) *Задачі наближення класів*. Якщо розглядається задача наближення не одного елемента $x \in \mathcal{X}$, а цілого класу елементів $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$, то природно розглянути величину

$$E(\mathcal{F},\mathcal{K}) = \sup_{x\in\mathcal{F}}E(x,\mathcal{K}).$$

3) *Задачі про поперечники*. При наближенні в лінійних просторах часто елементи простору наближають за допомогою елементів певних скінченновимірних підпросторів. В такому разі цікаво дізнатися для, яким самим підпростором даної розмірності краще наближати заданий клас $\mathcal{F}$. Величина

$$d_n(\mathcal{F}) = \inf_{\mathcal{K}_n} E(F,\mathcal{K}_n),$$

де інфімум береться по всеможливих n-вимірних підпросторах простору $\mathcal{X}$, називається поперечником класу $\mathcal{F}$ за Колмогоровим.

4Колмого́ров Андрі́й Микола́йович (1903 — Москва) — російський математик

Крім поперечників за Колмогоровим, в теорії наближення функцій розглядаються також поперечники за Александровим, поперечники за Гельфандом, лінійні поперечники та ін.

Апарати наближення

1) *Алгебраїчні многочлени*

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k.$$

2) *Тригонометричні поліноми*

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k),$$

або в комплексній формі

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikt}.$$

Тригонометричні поліноми використовуються для наближення 2π-періодичних функцій.

3) *Узагальнені поліноми* за певною *чебишовською* системою функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{n}$

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t).$$

4) *Сплайни*. Функція $S(t)$, задана на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$, називається поліноміальним сплайном порядку $\in \mathbb{Z}_+$ вузлами t_k, $k = \overline{1,n}$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$, якщо на кожному з проміжків

$$[a,t_1],[t_1,t_2],\dots,[t_{n-1},t_n],[t_n,b]$$

$S(t)$ є алгебраїчним многочленом степеня, що не перевищує m. Говорять, що сплайн $S(t)$ має дефект r_k у вузлі t_k, $k = \overline{1,n}$, $(1 \leq r_k \leq m)$, якщо в цій точці є неперервними похідні $S(t)$ до порядку $r_k - 1$ включно, а похідна порядку r_k має розрив. Число $r = \max\limits_{k=\overline{1,n}} r_k$ називається дефектом сплайна $S(t)$. Сплайни можуть будуватися також за тригонометричною системою та іншими чебишовськими системами функцій. Зокрема, так звані sk-сплайни будуються за зсувами певного ядра $K(t)$: $\varphi_k(t) = K(t + \theta_k)$.

5) *Раціональні функції*

$$R[m/n](t) = \frac{P_m(t)}{Q_n(t)},$$

де $P_m(t)$ та $Q_n(t)$ – алгебраїчні многочлени степенів $\leq m$ та $\leq n$ відповідно.

6) *Зріджені апроксимації* (*sparse approximations*). Зріджені апроксимації - це пошук наближених розв’язків систем рівнянь у вигляді зріджених векторів, тобто векторів, значна частина координат яких дорівнює нулеві. Зріджені апроксимації знайшли широке використання в таких застосуваннях, як обробка зображень, обробка аудіо, біологія та аналіз даних. Зокрема, використовуються наближення функцій сумами експонент

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{\alpha_k t},$$

що пов’язані з раціональними апроксимаціями Паде.

7) *Вейвлети*. Наближення функцій ортонормованими системами, що породжуются з певних масштабних функцій, що мають компактний носій, за допомогою трансляції (зсуву) та диляції (стискання). До розроблення вейвлетів призвели декілька незалежних шляхів міркувань, що почалися з робіт Альфреда Хаара, який на початку двадцятого століття поставив запитання: «Чи існує ортонормальна система $h_0(t), h_1(t), \dots, h_n(t), \dots$, функцій, визначених на проміжку [0, 1], таких, що довільну функцію $f(t) \in C[0,1]$ можна розвинути у суму вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty}(f, h_k)\, h_k,$$

так що вона буде збіжною до $f(t)$ на [0, 1]?» Як виявилося таких систем можна побудувати нескінченну кількість. У 1909 році Хаар запропонував найпростіший розв'язок і тим самим відкрив шлях, що веде до вейвлетів (wavelet).

5 Альфред Хаар(1886-1933) - угорський математик

Ортонормальна система Хаара будується починаючи з базисної функції

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\frac{1}{2}), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2},1\right), \\ 0, & t \notin [0,1). \end{cases}$$

Для $n \geq 1$ покладаємо $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 < k < 2^j$, і визначимо:

$$h_n(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} h\left(2^j - k\right), & t \in \left[k2^{-j},(k+1)2^{-j}\right] \\ 0, & t \notin \left[k2^{-j},(k+1)2^{-j}\right] \end{cases}$$

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ 0, & t \notin [0,1). \end{cases}$$