УДК 517.53

Г. М. Веселовська, А. П. Голуб (Ін–т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАНТИ ТИПУ ПАДЕ ДЛЯ ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ РЯДІВ ДВОХ ЗМІННИХ

Two–dimensional Padé type approximants are constructed and studied for some special power series using method of generalized moment representations.

За допомогою методу узагальнених моментних зображень побудовано та вивчено двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних степеневих рядів.

Для аналітичних функцій двох змінних раціональні апроксиманти, що є аналогами апроксимант Паде, можуть будуватися різними способами (див. [1, с. 323-332]). Один з підходів до побудови таких апроксимант було запропоновано в [2]. Цей підхід грунтується на поширенні методу узагальнених моментних зображень В.К. Дзядика [10] на випадок двовимірних числових послідовностей.

Теорема 1 ([2]). *Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду двох змінних вигляду*

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m \tag{1}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle .,. \rangle$

$$s_{k+j,m+n}=\langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \qquad k,j,m,n\in\mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Тоді, якщо при деяких $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ існує узагальнений поліном

$$X_{N_1,N_2}=\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c_{k,m}^{(N_1,N_2)} x_{k,m} \tag{3}$$

з відмінним від нуля старшим коефіцієнтом $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)}$, для якого виконуються умови біортогональності

Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.?, №?, 95-113

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0 \qquad (4)$$

при $(j+N_1, n+N_2) \in \mathbb{Z}_+ \cap D_\Phi$, *де* $D_\Phi = \{(u,t) \in \mathbb{R}^2_+ : \Phi(u,t) \le 0\}$, *а функція* $\Phi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ *має наступні властивості:*

i) D_Φ *- обмежена множина в* $\mathbb{R}^2_+$*;*

ii) потужність множини $D_\Phi \cap \{(u,t) \in \mathbb{Z}^2_+ : u \ge N_1, t \ge N_2\}$ *дорівнює* $(N_1+1)(N_2+1)-1$*;*

iii) рівняння $\Phi(u,t) = 0$ *можна однозначно розв'язати відносно* t *при* $u \le N_1$ *та відносно* u *при* $t \le N_2$. *При цьому для відповідних розв'язків* $t = \varphi(u)$ *та* $u = \psi(t)$ *мають місце нерівності* $\varphi(u) \ge N_2 \quad \forall\, u \le N_1$, *та* $\psi(t) \ge N_1 \quad \forall\, t \le N_2$,

то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_\mathcal{N}(z,w)}{Q_\mathcal{D}(z,w)}, \qquad (5)$$

де

$$Q_\mathcal{D}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-k,N_2-m} z^k w^m, \qquad (6)$$

а

$$P_\mathcal{N}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n} +$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{[\psi(m)]-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{j,N_2-n} s_{k+j,m-n} +$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{[\varphi(k)]-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,n} s_{k-j,m+n} \qquad (7)$$

де $[\rho]-$ *ціла частина від числа* ρ, *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (1) для* $\forall (k,m) \in \mathbb{Z}^2_+ \cap D_\Phi$.

З використанням теореми 1 в [2] - [5],[6] було побудовано та досліджено апроксиманти Паде для низки степеневих, зокрема, гіпергеометричних рядів двох змінних.

Зауваження. Раціональні апроксиманти, що будуються в теоремі 1, є апроксимантами типу Паде з областю індексів знаменника $\mathcal{D} = ([0, N_1] \times [0, N_2]) \cap \mathbb{Z}_+^2$, областю індексів чисельника $\mathcal{N} = D_\Phi \backslash \{(k,m) : k \geq N_1, m \geq N_2\}$ та областю індексів співпадання $\mathcal{E} = D_\Phi$ (див. [1, с. 323-324]).

Двовимірні узагальнені моментні зображення вигляду (4), як відзначалося в [2], можуть бути записаними і в операторному вигляді, а саме, якщо в лінійному нормованому просторі $\mathcal{X}$ існують комутуючі між собою обмежені лінійні оператори A та B, такі що $\forall (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m},$$
$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1},$$

то зображення (4) буде еквівалентним зображенню

$$s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \quad (k,m) \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

В [5] було розглянуто випадок, коли

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t)$$

є оператором множення на незалежну змінну в гільбертовому просторі $\mathcal{X} = L_2([0,1], d\mu)$, а $B = A^2$.

Дана стаття присвячена поширенню та узагальненню вказаних досліджень.

Нехай в банаховому просторі $\mathcal{X}$ задано лінійний неперервний оператор A, такий що при деякому $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, елементи $\widetilde{x}_k = A^k \widetilde{x}_0$, $k = \overline{0, \infty}$, є лінійно незалежними. І нехай при цьому для деякого $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ елементи $\widetilde{y}_j = A^{*j} \widetilde{y}_0$, $j = \overline{0, \infty}$, де A^* – оператор, спряжений до оператора A відносно білінійної форми $\langle ., . \rangle$, визначеної на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, є також лінійно незалежними. Більше того, будемо припускати, що виконується наступна умова

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists\, \widetilde{X_N} = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} \widetilde{x}_k, \quad d_N^{(N)} \neq 0,$$

такий що
$$\langle \widetilde{X_N}, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}. \tag{9}$$

Легко бачити, що ця умова еквівалентна умові теореми Дзядика (див.[7, с. 22-23]) про побудову одновимірних апроксимант Паде для функції
$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s_k} z^k = \langle \widehat{R_z}(A) \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \rangle,$$
де $\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}$ – резольвентна функція оператора A (див. [7, с. 22]), а
$$\widetilde{s_k} = \langle A^k \widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

В такому разі при кожному фіксованому $p = 2, 3, ...$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ми можемо розглянути двовимірне узагальнене моментне зображення
$$s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \tag{10}$$
де $x_{0,0} = \widetilde{x}_0$, $y_{0,0} = \widetilde{y}_0$ та $B = A^p$.

Щоб отримати зображення функцій, для коефіцієнтів степеневих розвинень яких є справедливими зображення (10), використаємо наступні леми.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{X}$ – лінійний нормований простір, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор. Тоді у всіх точках регулярності резольвентних функцій $\widehat{R_z}(A)$ та $\widehat{R_w}(A^p)$ справджується рівність*
$$\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A^p) = \frac{1}{z^p - w} \left(z^p \widehat{R_z}(A) - w \sum_{r=0}^{p-1} z^r A^r \widehat{R_w}(A^p) \right). \tag{11}$$

Доведення. Якщо до обох частин (11) застосувати оператор $(z^p - w)(I - zA)(I - wA^p)$, то отримаємо
$$z^p - w = z^p (I - wA^p) - w \sum_{r=0}^{p-1} z^r A^r (I - zA) =$$
$$= z^p - wz^p A^p - w (I - z^p A^p) = z^p - w.$$

Оскільки отримана рівність є очевидною, а z та w є регулярними точками відповідних резольвентних функцій, то і початкова рівність має місце.

Лема 2. *За умов леми 1*

$$\widehat{R_w}(A^p) = \frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1} R_{w^{1/p}\xi_r^{(p)}}(A),$$

де $\xi_r^{(p)} = e^{2\pi i r/p}$, $r = \overline{0, p-1}$, *– корені* p*-го степеня з 1.*

Доведення. Як відомо (див. напр. [8, с. 155]) корені p-го степеня з 1 утворюють абелеву групу відносно множення. Позначимо цю групу через G_p. Вона буде циклічною і одиничним елементом в ній буде $\xi_0^{(p)} = 1$. Легко переконатися, що при $p \geq 2$ буде мати місце рівність

$$\sum_{r=0}^{p-1}\xi_r^{(p)} = \sum_{r=0}^{p-1}\left(\xi_1^{(p)}\right)^r = \frac{\left(\xi_1^{(p)}\right)^p - 1}{\xi_1^{(p)} - 1} = 0.$$

При всіх натуральних k

$$G_{p,m} = \left\{\left(\xi_1^{(p)}\right)^k,\ r = \overline{1,p}\right\} \subseteq G_p$$

буде утворювати підгрупу групи G_p. Більше того, якщо найбільший спільний дільник чисел p та k дорівнює d, то будемо мати $G_{p,k} = G_{p/d}$.

Отже, при кожному $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{r=0}^{p-1}\left(\xi_r^{(p)}\right)^k = \begin{cases} 0, & \text{при } k, \text{ що не ділиться на } p, \\ p, & \text{при } k, \text{ що ділиться на } p. \end{cases}$$

А тому

$$\widehat{R_w}(A^p) = (I - wA^p)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k A^{pk} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(w^{1/p}A\right)^{pk} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty}\left(w^{1/p}A\right)^k \sum_{r=0}^{p-1}\left(\xi_r^{(p)}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(w^{1/p}\xi_r^{(p)}A\right)^k = \frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1}R_{w^{1/p}\xi_r^{(p)}}(A).$$

Аналогічно встановлюється наступний результат.

Лема 3. *Нехай*

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{s}_k z^k.$$

Тоді

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}\widetilde{s}_{k+pm}z^k w^m = \frac{z^p}{z^p-w}\widetilde{f}(z) - \frac{w^{1/p}}{p}\sum_{r=0}^{p-1}\frac{\xi_r^{(p)}\widetilde{f}(w^{1/p}\xi_r^{(p)})}{z-w^{1/p}\xi_r^{(p)}}.$$

Так що, враховуючи лему 1,

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^k w^m = \left\langle\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A^p)\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{z^p-w}\left\{z^p\left\langle\widehat{R_z}(A)\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0\right\rangle - w\left\langle\sum_{r=0}^{p-1}z^r A^r\widehat{R_w}(A^p)\widetilde{x}_0,\widetilde{y}_0\right\rangle\right\}. \quad (12)$$

Для побудови апроксимант типу Паде функції вигляду (12) можна застосувати теорему 1.

Покладемо

$$x_{k,m} = A^{k+pm}x_{0,0} = \widetilde{x}_{k+pm}, \quad (k,m)\in\mathbb{Z}_+^2,$$

$$y_{j,n} = A^{*(j+pn)}y_{0,0} = \widetilde{y}_{j+pn}, \quad (j,n)\in\mathbb{Z}_+^2.$$

Щоб побудувати відповідну апроксиманту зі знаменником вигляду

$$Q_{N_1,N_2}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}q_{k,m}^{(N_1,N_2)}z^k w^m$$

потрібно побудувати узагальнений поліном X_{N_1,N_2} вигляду

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}c_{k,m}^{(N_1,N_2)}x_{k,m} = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}c_{k,m}^{(N_1,N_2)}\widetilde{x}_{k+pm}, \quad (13)$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{N_1,N_2}, y_{j,n}\rangle = 0, \quad (j,n) \in \Big([0,N_1]\times[0,N_2]\Big)\backslash\{(N_1,N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \widetilde{y}_{j+pn}\rangle = 0, \quad (j,n) \in \Big([0,N_1]\times[0,N_2]\Big)\backslash\{(N_1,N_2)\},$$

або ж

$$\langle X_{N_1,N_2}, \widetilde{y}_{j}\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N_1+pN_2-1}. \tag{14}$$

Згідно з нашими припущеннями такий узагальнений поліном існує та може бути зображений у вигляді

$$X_{N_1,N_2} = \sum_{r=0}^{N_1+pN_2} d_r^{(N_1+rN_2)}\widetilde{x}_r, \quad d_{N_1+rN_2}^{(N_1+pN_2)} \neq 0. \tag{15}$$

Співставивши (13) та (15), бачимо, що, вважаючи відомими коефіцієнти $\{d_r^{(N_1+pN_2)}\}_{r=0}^{N_1+pN_2}$, ми можемо визначати коефіцієнти $\{c_{k,m}^{(N_1,N_2)} : k=\overline{0,N_1}, m=\overline{0,N_2}\}$, але неоднозначно. Оберемо серед всіх можливих способів наступні:

i)

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \frac{1}{\eta_{k+pm}}\, d_{k+pm}^{(N_1+pN_2)}, \quad (k,m)\in[0,N_1]\times[0,N_2], \tag{16}$$

де η_r – кількість всіх можливих пар $(k,m)\in[0,N_1]\times[0,N_2]$, таких що $k+pm=r$;

ii)

$$c_{k,m}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} d_{k+pm}^{(N_1+pN_2)}, & \text{при } (k,m)\in W(N_1,N_2,p), \\ 0, & \text{при } (k,m)\notin W(N_1,N_2,p) \end{cases}$$

де множина $W(N_1,N_2,p) = \Big\{(k,m)\in\Big([0,p-1]\times[0,N_2-1]\Big)\cup$ $\cup\{(k,N_2) : k\in[0,N_1]\}\Big\}$.

Розглянемо спочатку перший спосіб обчислення коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$. Для цього підрахуємо величини $\eta_r,\ r=\overline{0,N_1+pN_2}$.

Лема 4. *Для кожного* $r=\overline{0,N_1+pN_2}$

$$\eta_r=\left[\frac{r}{p}\right]+1-\left(\left[\frac{r-N_1-1}{p}\right]+1\right)\chi_{N_1+1}(r)-$$

$$-\left(\left[\frac{r-pN_2-1}{p}\right]+1\right)\chi_{pN_2+1}(r), \tag{17}$$

де

$$\chi_N(r)=\begin{cases}0, & r<N\\ 1, & r\geq N.\end{cases}.$$

Доведення. Розглянемо подвійну суму

$$\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}\xi^{k+pm}.$$

Очевидно, що вона буде дорівнювати

$$\sum_{k=0}^{N_1+pN_2}\eta_r\,\xi^{k+pm}.$$

З іншого боку

$$\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2}\xi^{k+pm}=\sum_{k=0}^{N_1}\xi^k\sum_{m=0}^{N_2}\xi^{pm}=\frac{1-\xi^{N_1+1}}{1-\xi}\cdot\frac{1-\xi^{pN_2+1}}{1-\xi^p}. \tag{18}$$

Оскільки мають місце розвинення

$$\frac{1}{1-\xi}=1+\xi+\xi^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k,$$

$$\frac{1}{1-\xi^p}=1+\xi^p+\xi^{2p}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\xi^{pm},$$

то

$$\frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^p)} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{r}{p} \right] + 1 \right) \xi^r. \tag{19}$$

Тому отримаємо

$$\sum_{r=0}^{N_1+pN_2} \eta_r \, \xi^r = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\left[\frac{r}{p} \right] + 1 \right) \xi^r - \sum_{r=N_1+1}^{\infty} \left(\left[\frac{r-N_1-1}{p} \right] + 1 \right) \xi^r -$$

$$- \sum_{r=pN_2+1}^{\infty} \left(\left[\frac{r-pN_2-1}{p} \right] + 1 \right) \xi^r +$$

$$+ \sum_{r=pN_2+N_1+2}^{\infty} \left(\left[\frac{r-pN_2-N_1-2}{p} \right] + 1 \right) \xi^r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях ξ, отримаємо рівність (17).

Оскільки, згідно з (14), поліном X_{N_1,N_2} буде ортогональним не лише до

$$\Big\{ y_{j,n} : (j,n) \in \Big([0,N_1] \times [0,N_2] \Big) \backslash \{(N_1,N_2)\} \Big\},$$

але і до

$$\{ y_{j,n} : j + pn \le N_1 + pN_2 - 1 \},$$

то в теоремі 1 в якості функції Φ візьмемо функцію

$$\Phi(u,t) = u + pt - 2N_1 - 2pN_2 + 1.$$

Тоді для функцій $\psi(t)$ та $\varphi(u)$ матимемо $\psi(t) = 2N_1 + 2pN_2 - pt - 1, \quad \varphi(u) = 2N_2 + \frac{1}{p}(2N_1 - u - 1).$

Отримаємо наступний результат:

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ – банахові простори, $\langle .,. \rangle$ – роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор, $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ такі, що виконується умова (9).*

Тоді для функції f, що має зображення (12), при $N_1 \geq p-1,\ N_2 \geq 0$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{20}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2} \frac{d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1+pN_2-k-pm}} z^k w^m, \tag{21}$$

а

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1-1}\sum_{n=0}^{N_2-1} z^j w^n \sum_{k=0}^{j}\sum_{m=0}^{n} \frac{d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1+pN_2-k-pm}} \widetilde{s}_{j-k+p(n-m)} +$$
$$+ z^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \sum_{j=0}^{N_1+2pN_2-pn-1} z^j w^n \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{n} \frac{d_{k+p(N_2-m)}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{k+p(N_2-m)}} \widetilde{s}_{k+j+p(n-m)} +$$
$$+ w^{N_2} \sum_{j=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2+[(2N_1-j-1)/p]} z^j w^n \sum_{k=0}^{j}\sum_{m=0}^{N_2} \frac{d_{N_1-k+pm}^{(N_1+pN_2)}}{\eta_{N_1-k+pm}} \widetilde{s}_{j-k+p(n+m)}, \tag{22}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (12) для $(k,m) \in \{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : k+pm \leq 2N_1+2pN_2+1\}$

Врахувавши особливості визначення коефіцієнтів $c_{k,m}^{(N_1,N_2)}$, $k=\overline{0,N_1}$, $m=\overline{0,N_2}$, за допомогою другого способу отримуємо наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ – банахові простори, $\langle .,. \rangle$ – роздільно неперервна білінійна форма, визначена на декартовому добутку $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ – обмежений лінійний оператор, $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{X}$, $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{Y}$ такі, що виконується умова (9).*

Тоді для функції f, що має зображення (12), при $N_1 \geq p-1,\ N_2 \geq 0$ раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{23}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w)=\sum_{k=0}^{N_1} d_{N_1+pN_2-k}^{(N_1+pN_2)} z^k+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} d_{N_1+pN_2-k-pm}^{(N_1+pN_2)} z^k w^m, \tag{24}$$

а

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{N}}(z,w)=&\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d_{N_1-j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k-j+pm}+\\
&+\sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=N_1+1-p}^{k}\sum_{n=1}^{m} d_{N_1-j+p(N_2-n)}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k-j+p(n-m)}+\\
&+z^{N_1}\left\{\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} d_{j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k+j+pm}+\right.\\
&\left.+\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{N_1+2pN_2-pm-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{m} d_{j+p(N_2-n)}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k+j+p(m-n)}\right\}\\
&+w^{N_2}\left\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} d_{N_1-j+pN_2}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k-j+p(m+N_2)}+\right.\\
&+\sum_{k=N_1+1-p}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2+[(2N_1-k-1)/p]} z^k w^m\times\\
&\left.\times\sum_{j=N_1+1-p}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} d_{N_1-j+pn}^{(N_1+pN_2)}\, \widetilde{s}_{k-j+p(n+m)}\right\},
\end{aligned} \tag{25}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого співпадатимуть з коефіцієнтами ряду (12) для $(k,m)\in\{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2 : k+pm\le 2N_1+2pN_2+1\}$.

Розглянемо окремі випадки, коли виконується умова (9), і, отже, з використанням теорем 2 та 3 можна будувати апроксиманти типу Паде для спеціальних рядів двох змінних.

Покладемо $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2\left([0,1], d\mu\right)$, де μ – неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$. В такому разі $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ – нескінченновимірний гільбертів простір.

Розглянемо в цьому просторі оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t), \quad \varphi \in \mathcal{X}.$$

Будемо вважати також, що

$$\widetilde{x}_0(t) = \widetilde{y}_0(t) \equiv 1.$$

Тоді

$$\widetilde{x}_k(t) = t^k, \quad \widetilde{y}_j(t) = t^j,\ k, j = \overline{0, \infty},$$

$$\left(\widehat{R_z}(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - zt},$$

$$\widetilde{f}(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt}.$$

Всі умови теореми 2, включаючи умову (9), виконуються. І, отже, для функції

$$f(z, w) = \frac{1}{z^p - w}\left\{z^p \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1 - zt} - w \sum_{r=0}^{p-1} z^r \int_0^1 \frac{t^r d\mu(t)}{1 - wt^p}\right\} \tag{26}$$

її апроксиманти типу Паде можуть бути записані у вигляді (20)-(22), де $d_k^{(N)}, k = \overline{0, N}$, – коефіцієнти алгебраїчних многочленів, ортонормованих на [0,1] за вагою $d\mu$, а

$$\widetilde{s}_k = \int_0^1 t^k d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty}, \ -$$

це моменти міри $d\mu$.

Нехай тепер для деяких $\alpha, \beta \in [0, 1)$

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{x(t) : \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha| < \infty\right\},$$

$$\mathcal{Y}_\beta = \left\{y(t) : \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta| < \infty\right\},$$

$$||x||_{\mathcal{X}_\alpha} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha|,$$

$$||y||_{\mathcal{Y}_\beta} = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta|.$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ лінійний обмежений оператор інтегрування

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Спряженим до нього відносно білінійної форми

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)dt \tag{27}$$

буде оператор $A^* : \mathcal{Y}_\beta \to \mathcal{Y}_\beta$

$$(A^*\psi)(t) = \int_t^1 \psi(\tau)d\tau.$$

Покладемо також

$$\widetilde{x}_0(t) = t^\nu, \quad \nu > -\alpha,$$

$$\widetilde{y}_0(t) = (1-t)^\sigma, \quad \sigma > -\beta.$$

Тоді

$$\widetilde{x}_k(t) = \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$\widetilde{y}_j(t) = \frac{(1-t)^{j+\sigma}}{(\sigma+1)_j}, \quad j = \overline{0,\infty},$$

де символ Похгаммера визначається співвідношенням

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ a(a+1)\dots(a+k-1), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Неважко підрахувати резольвентну функцію оператора A (див. напр., [7, с. 35-36])

$$\left(\widehat{R_z}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-z)}d\tau.$$

Отож, отримаємо

$$\widetilde{f}(z) = \left\langle \widehat{R_z}(A)\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0 \right\rangle =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)} \left(1 + ze^z \int_0^1 \tau^{\nu+\sigma+1} e^{-z\tau} d\tau\right).$$

При $\nu+\sigma+1>0$ можна отримати також зображення

$$\widetilde{f}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)} e^z \int_0^1 \tau^{\nu+\sigma} e^{-z\tau} d\tau.$$

Коефіцієнти $\widetilde{s}_k$ матимуть вигляд

$$\widetilde{s}_k = \int_0^1 \widetilde{x}_k(t)\widetilde{y}_0(t)d(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)(\nu+\sigma+2)_k}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Отже,

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{s}_k z^k = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\nu+\sigma+2)_k} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)} {}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;z), \tag{28}$$

де ${}_1F_1(a;b;z)$ – вироджена гіпергеометрична функція Куммера [9, с. 321].

Згідно з лемою 3

$$f(z,w) = \frac{z^p}{z^p - w}\widetilde{f}(z) - \frac{w^{1/p}}{p} \sum_{r=0}^{p-1} \frac{\xi_r^{(p)} \widetilde{f}(w^{1/p}\xi_r^{(p)})}{z - w^{1/p}\xi_r^{(p)}}, \tag{29}$$

де $\widetilde{f}$ має вигляд (28).

Для функції вигляду (29) за теоремою 3 будуються апроксиманти типу Паде з коефіцієнтами $d_k^{(N)}$, що будуть мати вигляд

$$d_k^{(N)} = p_k^{(N)}(\nu+1)_k,$$

де $p_k^{(N)}$ – коефіцієнти зсунутих ортогональних на [0,1] за мірою $t^\nu(1-t)^\sigma dt$ многочленів Якобі. Відомо (див., напр., [9, p. 581] що

$$p_k^{(N)} = (-1)^{N-k}\binom{N}{k}\frac{\Gamma(N+k+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k=\overline{1,N}.$$

Для функції вигляду (29) справджується наступний результат, що встановлює збіжність так побудованих апроксимант типу Паде.

Теорема 4. *Побудовані в теоремі 3 апроксиманти типу Паде функції f вигляду (29) при $\nu,\sigma > -1$ на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$ рівномірно збігаються до f при $N_1, N_2 \to \infty$.*

При цьому для знаменників апроксимант справджується асимптотична формула

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = (-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times \tag{30}$$

$$\times\left(e^{-z/2}+o(1)\right), \quad N_1, N_2 \to \infty,$$

а для чисельників формула

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = (-1)^{N_1+pN_2}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\left(e^{-z/2}f(z,w)+o(1)\right), \quad N_1, N_2 \to \infty. \tag{31}$$

Доведення. Спочатку встановимо асимптотичну формулу (30). За теоремою 3 для знаменника $Q_{\mathcal{D}}$ має місце зображення

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1}(-1)^{N_1+pN_2-k}\binom{N_1+pN_2}{k}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}z^k+$$

$$+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2}(-1)^{N_1+pN_2-k-pm}\binom{N_1+pN_2}{k+pm}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k-pm)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k-pm)}(\nu+1)_{N_1+pN_2-k-pm}z^kw^m=$$

$$=\frac{(-1)^{N_1+pN_2}\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^k\binom{N_1+pN_2}{k}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times\right.$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}z^k+$$

$$+\sum_{k=N_1-p+1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2}(-1)^{k+pm}\binom{N_1+pN_2}{k+pm}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k-pm)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times$$

$$\left.\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k-pm)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k-pm}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}z^kw^m\right\}=$$

$$=\varkappa_{N_1,N_2}\Big(S(z)+T(z,w)\Big).$$

Для $S(z)$ маємо

$$S(z)=\sum_{k=0}^{N_1}(-1)^k\binom{N_1+pN_2}{k}\frac{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1-k)}{\Gamma(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu+1)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1)}{\Gamma(N_1+pN_2+\nu+1-k)}\cdot\frac{(\nu+1)_{N_1+pN_2-k}}{(\nu+1)_{N_1+pN_2}}\,z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1}\frac{(-z)^k}{k!}\cdot\frac{(N_1+pN_2)\dots(N_1+pN_2-k+1)}{(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu)\dots(2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-k+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1}\frac{(-z)^k}{k!}\prod_{r=1}^{k}\frac{N_1+pN_2-r+1}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1}\frac{(-z)^k}{k!}\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1/2(\sigma+\nu+r-1)}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-r+1}\right).$$

При деякому досить великому $M < N_1$ розглянемо різницю

$$\left|S(z) - e^{-z/2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{M} \frac{(-z/2)^k}{k!} \left\{\prod_{r=1}^{k} \left(1 - \frac{\sigma+\nu+r-1}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-r+1}\right) - 1\right\}\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=M+1}^{N_1} \frac{(-z/2)^k}{k!} \prod_{r=1}^{k} \left(1 - \frac{\sigma+\nu+r-1}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-r+1}\right)\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(-z/2)^k}{k!}\right|.$$

На кожному компакті з $\mathbb{C}^2$ при кожному фіксованому M перший доданок при $N_1, N_2 \to \infty$ буде рівномірно прямувати до 0. Другий та третій доданки за рахунок вибору M можна зробити як завгодно малими.

Аналогічно для $T(z, w)$ маємо

$$T(z,w) = \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{N_2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{N_1-l+pm} \frac{1}{(N_1-l+pm)!} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{N_1-l+pm} \left(1 - \frac{\sigma+\nu+r-1}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-r+1}\right) z^{N_1-l} w^m.$$

Очевидно, що при досить великих N_1 та N_2 буде

$$\left|1 - \frac{\sigma+\nu+r-1}{2N_1+2pN_2+\sigma+\nu-r+1}\right| < \delta,$$

де $1 < \delta < \infty$. Отож,

$$|T(z,w)| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{N_2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l} |w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!}.$$

Візьмемо досить велике $M < N_2$. Тоді

$$|T(z,w)| \le \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l}|w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{m=M+1}^{N_2} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{N_1-l+pm} |z|^{N_1-l}|w|^m \frac{1}{(N_1-l+pm)!}.$$

Перший доданок при $N_1, N_2 \to \infty$ прямує до 0, а другий, за рахунок вибору M, може бути зробленим як завгодно малим.

Таким чином, асимптотична формула (30) встановлена. Завдяки цій формулі ми можемо також стверджувати, що на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$, починаючи з деяких великих номерів N_1 та N_2, відсутні нулі знаменників апроксиманти типу Паде.

Решта тверджень теореми встановлюються аналогічно відповідним твердженням теореми 2 з [4] з використанням формули для похибки апроксимації типу Паде, встановленої в [2].

1. *Бейкер Дж., Грейвс–Моррис П.Р.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

2. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035 – 1058.

3. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 69 – 94.

4. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №10. — С. 1315 – 1331.

5. *Голуб А.П., Веселовська Г.М.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 71 – 77.

6. *Чернецька Л.О.* Побудова двовимірних апроксимант Паде деяких аналітичних функцій двох змінних за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Мат. студії. — 2014. — **11**, №2. — С. 201 – 213.

7. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАНУ, 2002. — 222 с.

8. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. — М.: Мир, 1976. — 648 с.

9. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

10. *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8–12.

11. *Маркушевич А.М.* Теория аналитических функций. — 1981. — М.: Наука, 1967. — Т.1. — 488 с.