Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 4, 1–10

УДК 517.53

Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких спеціальних рядів двох змінних

А. П. Голуб, Г. М. Веселовська

Інститут математики НАН України, Київ;
golub@imath.kiev.ua, anaweseka@gmail.com

Exact expressions for two–dimensional rational approximants are derived for some power series using method of generalized moment representations.

Используя метод обобщенных моментных представлений, получены явные выражения для двумерных рациональных аппроксимант некоторых степенных рядов.

Багатовимірні аналоги апроксимацій Паде вивчаються ще з другої половини XX ст. Різноманітні підходи до побудови таких аналогів описано, зокрема, в [1]. На базі розвитку методу узагальнених моментних зображень Дзядика [2] в [3] було запропоновано метод побудови та дослідження раціональних апроксимант типу Паде для степеневих рядів двох змінних, що базується на використанні двовимірних узагальнених моментних зображень.

Означення 1 ([3]) Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності$\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі $\mathcal{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ – двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \; k, j, m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

© А. П. Голуб, Г. М. Веселовська, 2014

У випадку, коли простори $\mathcal{X}$ та $\mathcal{Y}$ — нормовані і у просторі $\mathcal{X}$ існують обмежені лінійні оператори $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, які комутують між собою, і такі, що:

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1},$$

для всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$, а у просторі $\mathcal{Y}$ існують лінійні обмежені оператори $A^*, B^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ такі, що

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle,$$

$$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle,$$

для $\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}$, зображення (1) можна подати в операторному вигляді:

$$s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, k, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Поставимо у відповідність двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ формальний степеневий ряд від двох змінних:

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{3}$$

Зображення коефіцієнтів $s_{k,m}$ у вигляді (2) дає змогу модифікувати подання функції (3):

$$f(z, w) = \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, \tag{4}$$

де резольвентна функція $\widehat{R_w}$ визначається рівністю $\widehat{R_w}(A) = (I - wA)^{-1}$.

У [3] було встановлено наступний результат:

Теорема 1 *Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд (3) та нехай для двовимірної послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *вигляду (1). Тоді, якщо для деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n},\ c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0, \tag{5}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}\rangle = 0, \tag{6}$$

при $(k,m) \in [0,N_1]\times[0,N_2]\backslash\{(N_1,N_2)\}$, *то раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)}, \tag{7}$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n \tag{8}$$

і

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,N_2-n} s_{k-j,m-n} +$$

$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{j,N_2-n} s_{k+j,m-n} +$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c^{(N_1,N_2)}_{N_1-j,n} s_{k-j,m+n}, \tag{9}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) для $(k,m) \in \mathcal{E} = [0,2N_1]\times[0,2N_2]\backslash\{(2N_1,2N_2)\}$.

В [3]– [5] на підставі теореми 1 та деяких її узагальнень було побудовано апроксиманти типу Паде для низки степеневих рядів двох змінних, зокрема для частинних випадків гіпергеометричних рядів Аппеля та Гумберта. В даній праці пропонується поширення вказаного підходу на новий клас степеневих рядів.

Нехай $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], t^\nu dt)$, $\nu > -1$, — простори функцій, сумовних з квадратом за мірою $t^\nu dt$ на $[0,1]$. Розглянемо в просторі $\mathcal{X}$ лінійні обмежені оператори

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t),$$

$$(B\varphi)(t) = t^\sigma \varphi(t),$$

де $\sigma > 0$ — ірраціональне число. На добутку просторів $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ визначимо білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)t^\nu dt.$$

Нехай

$$x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1.$$

Тоді

$$x_{k,m}(t) = y_{k,m}(t) = t^{k+m\sigma}, \ k, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Враховуючи (2), маємо:

$$s_{k,m} = \int_0^1 t^{k+m\sigma+\nu} dt = \frac{1}{k + m\sigma + \nu + 1}, \ k, m \in \mathbb{Z}_+, \tag{10}$$

отже,

$$f(z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^k w^m}{k + m\sigma + \nu + 1}. \tag{11}$$

Згідно з теоремою 1 для знаходження апроксиманти Паде функції (11) потрібно побудувати узагальнений поліном вигляду (5), для якого б виконувалися умови біортогональності (6). Тобто в даному випадку нам потрібно побувати узагальнений поліном вигляду

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^{j+n\sigma}$$

з умовами біортогональності

$$\int_0^1 t^{k+m\sigma+\nu} Y_{N_1,N_2}(t) dt = 0$$

для всіх $(k, m) \in [0, N_1] \times [0, N_2] \backslash \{(N_1, N_2)\}$.

Оскільки за припущенням число σ не є раціональним, то система функцій

$$\{t^{j+n\sigma} : j = \overline{0, N_1}, n = \overline{0, N_2}\} \tag{12}$$

буде чебишовською на $[0,1]$. Тоді при кожних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такі узагальнені поліноми Y_{N_1,N_2} будуть існувати, а їхні старші коефіцієнти будуть відмінними від нуля.

Запишемо систему функцій (12) у такому вигляді:

$$\{\varphi_l(t)\}_{l=0}^{L}, \tag{13}$$

де

$$L = (N_1+1)(N_2+1) - 1,$$

а

$$\varphi_l(t) = t^{\lambda_l}, \lambda_l = l + (\sigma - N_1 - 1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right], l = \overline{0, L},$$

$[\alpha]$ — ціла частина числа α.

Далі використаємо наступну теорему (див., наприклад, [7]).

Теорема 2 *Нехай* $\{c_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *- двовимірна числова послідовність така, що її визначники Ганкеля є відмінними від нуля*

$$H_{N-1} := \det ||c_{k,j}||_{k,j=0}^{N-1} \neq 0,\ N \in \mathbb{N}.$$

І нехай в лінійному просторі $\mathcal{X}$ *вказано послідовність елементів* $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, *а у просторі* $\mathcal{Y}$*– послідовність* $\{\psi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ *такі, що*

$$c_{k,j} = \langle \varphi_k, \psi_j \rangle, k, j \in \mathbb{Z},$$

де $\langle .,. \rangle$ *– білінійна форма на добутку просторів* $\mathcal{X}$ *та* $\mathcal{Y}$. *Тоді, якщо при довільному* $N \in \mathbb{Z}_+$ *побудувати узагальнені поліноми*

$$Y_0 = \varepsilon_0\varphi_0, Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N} \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \end{vmatrix}, N = \overline{1, \infty},$$

та

$$X_0 = \varepsilon_0\psi_0, X_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{N-1,0} & c_{N-1,1} & \cdots & c_{N-1,N} \\ \psi_0 & \psi_1 & \cdots & \psi_N \end{vmatrix}, N = \overline{1, \infty},$$

де $\varepsilon_N = (H_N H_{N-1})^{-1/2}, N = \overline{0,\infty}, H_{-1} = -1$ *, то будуть виконуватися співвідношення біортогональності*

$$\langle X_M, Y_N \rangle = \delta_{M,N},\ M, N = \overline{0,\infty},$$

$$\delta_{M,N} = \begin{cases} 0, \textit{при}\ M \neq N, \\ 1, \textit{при}\ M = N. \end{cases}$$

У нашому випадку $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = L_2([0,1], t^\nu dt), \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty = \{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ і

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 \varphi(t)\psi(t)t^\nu dt = 0.$$

Враховуючи, що

$$c_{k,j} = \langle \varphi_k, \psi_j \rangle = \int\limits_0^1 t^{\lambda_k} t^{\lambda_j} t^\nu dt = \frac{1}{\lambda_k + \lambda_j + \nu + 1},\ k, j = \overline{0, L},$$

для біортогонального полінома Y_{N_1,N_2} за теоремою 2 отримуємо зображення

$$Y_{N_1,N_2} = \varepsilon_{N_1,N_2} \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \dots & c_{0,L} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \dots & c_{1,L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{L-1,0} & c_{L-1,1} & \dots & c_{L-1,L} \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_L \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{N_1,N_2} \sum_{l=0}^{L} (-1)^l \varphi_l \det ||c_{k,i} : k = \overline{0, L-1}, i \in [0, L] \backslash \{l\}||,$$

з деякою ненульовою константою ε_{N_1,N_2}. Останні визначники є визначниками Коші (див., наприклад, [8]).

Отже,

$$\Delta_l^{(L)} = \det ||c_{k,i} : k = \overline{0, L-1}, i \in [0, L] \backslash \{l\}|| =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{L-1} \prod_{m=k+1}^{L} (\lambda_k - \lambda_m)^2}{\prod_{k=0}^{l-1} (\lambda_k - \lambda_l)^2} \frac{\prod_{k=0}^{L-1} (\lambda_k + \lambda_l + \nu + 1)}{\prod_{k=0}^{L-1} \prod_{m=0}^{L} (\lambda_k + \lambda_m + \nu + 1)} =$$

$$= \varkappa_L \frac{\prod_{k=0}^{L-1}(\lambda_k+\lambda_m+\nu+1)}{\prod_{k=0}^{l-1}(\lambda_k-\lambda_l)^2},$$

де $\varkappa_L$ – константа, що залежить від L, але не залежить від l. Враховуючи явний вираз показників λ_l, отримуємо

$$\Delta_l^{(L)} = \varkappa_L \frac{\prod_{k=0}^{L-1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)}{\prod_{k=0}^{l-1}\left(k-l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]-\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)\right)^2}.$$

Підрахуємо окремо чисельник:

$$\prod_{k=0}^{L-1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)=$$

$$=\prod_{k=0}^{N_1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1\right)\times$$

$$\times\prod_{k=N_1+1}^{2N_1+1}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(1+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)\times\ldots\times$$

$$\times\prod_{k=N_2(N_1+1)}^{(N_2+1)(N_1+1)-2}\left(k+l+(\sigma-N_1-1)\left(N_2+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)=$$

$$=\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1\right)_{N_1+1}\times$$

$$\times\left(l+(\sigma-N_1-1)\left(1+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)_{N_1+1}\times\ldots\times$$

$$\times\left(l+(\sigma-N_1-1)\left(N_2+\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)+\nu+1\right)_{N_1}=$$

$$=\frac{\prod_{m=0}^{N_2}\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1+m\sigma\right)_{N_1+1}}{\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+N_1+N_2\sigma+1\right)},$$

де через $(\alpha)_k$ позначено символ Похгаммера:

$$(\alpha)_k=\begin{cases} 1, \text{при } \ k=0,\\ (\alpha)(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1), \text{при } \ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Розглянемо тепер знаменник

$$\prod\nolimits_{k=0}^{l-1}\left(k-l+(\sigma-N_1-1)\left(\left[\frac{k}{N_1+1}\right]-\left[\frac{l}{N_1+1}\right]\right)\right)^2.$$

Очевидно, що при $l=\overline{0,N_1}$ буде $\left[\frac{k}{N_1+1}\right]=0$ і $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=0$, а тому

$$\prod_{k=0}^{l-1}(k-l)^2=\prod_{k=1}^{l}k^2.$$

При $l=\overline{N_1+1,2N_1+1}$ буде $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=1$, отже,

$$\prod_{k=0}^{N_1}(k-l-(\sigma-N_1-1))^2\prod_{k=N_1+1}^{l-1}(k-l)^2=\prod_{k=l-2N_1-1}^{l-N_1-1}(k+\sigma)^2\prod_{k=1}^{l-N_1-1}k^2.$$

Аналогічно, якщо при деякому $0\le p\le N_1$, $l=\overline{pN_1+p,(p+1)N_1+p}$, то $\left[\frac{l}{N_1+1}\right]=p$, тоді

$$\prod_{k=l-(p+1)N_1-p}^{l-pN_1-p}((k+p\sigma)(k+(p-1)\sigma)\cdot\ldots\cdot(k+\sigma))^2\prod_{k=1}^{l-pN_1-p}k^2.$$

Врахувавши це, для знаменника отримаємо вираз

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left(\left((m\sigma-\left(\left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)+N_1-l\right)\right)_{N_1+1}\right)^2\times$$

$$\times\left(\left(l-\left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)\right)!\right)^2.$$

Таким чином,

$$\Delta_l^{(L)}=\varkappa_L\cdot\frac{\prod_{m=0}^{N_2}\left(l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+1+m\sigma\right)_{N_1+1}}{l+(\sigma-N_1-1)\left[\frac{l}{N_1+1}\right]+\nu+N_1+N_2\sigma+1}\times$$

$$\times\frac{1}{\prod_{m=1}^{\left[\frac{l}{N_1+1}\right]}\left(\left((m\sigma-\left(\left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)+N_1-l\right)\right)_{N_1+1}\right)^2}\times$$

$$\times \frac{1}{\left(\left(l - \left[\frac{l}{N_1+1}\right](N_1+1)\right)!\right)^2}$$

і

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^{j+n\sigma} = \sum_{l=0}^{L}(-1)^l t^{\lambda_l}\Delta_l^{(L)}.$$

Звідси

$$c_{j,n}^{(N_1,N_2)} = (-1)^{j+n(N_1+1)}\Delta_{j+n(N_1+1)}^{(L)} =$$

$$= (-1)^{j+n(N_1+1)} \cdot \varkappa_L \cdot \frac{\prod_{m=0}^{N_2}(j+(n+m)\sigma+\nu+1)_{N_1+1}}{j+(n+N_2)\sigma+\nu+N_1+1} \times$$

$$\times \frac{1}{(j!)^2 \prod_{m=1}^{n}((m\sigma - N_1 + j)_{N_1+1})^2}, \tag{14}$$

при цьому ми можемо покласти $\varkappa_L = 1$.

А тому, з врахуванням теореми 1 для функції вигляду (11), можна побудувати апроксиманти Паде. Справедливою буде наступна теорема:

Теорема 3 *Для функцій вигляду (11) при довільних* $N_1, N_2 \in \in \mathbb{N}$ *раціональна функція вигляду (7)–(9), в якій коефіцієнти* $c_{j,n}$, $j = \overline{0, N_1}, n = \overline{0, N_2}$, *визначаються формулами (14), матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (11) для всіх* $(j,n) \in \mathcal{E} = [0, 2N_1] \times [0, 2N_2] \backslash \{(2N_1, 2N_2)\}$.

[1] *Бейкер Дж., Грейвс–Моррис П.Р.* Аппроксимации Паде. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

[2] *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8–12.

[3] *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035 – 1058.

[4] *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін–ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 69 – 94.

[5] *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №10. — С. 1315–1331.

[6] *Голуб А.П., Веселовська Г.М.* Двовимірні апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій двох змінних // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. пр. Ін–ту математики НАН України. — 2014. — **11**, №3. — С. 71–77.

[7] *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ: Ін–т математики НАНУ, 2002. — 222 с.

[8] *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.