УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін–т математики НАН України, Київ)

Г. М. Веселовська (Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка, Тернопіль)

ДВОВИМІРНІ АПРОКСИМАНТИ ТИПУ ПАДЕ ДЛЯ ДЕЯКИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Two–dimensional Padé type approximants are constructed for some analytic functions by means of method of generalized moment representations.

За допомогою методу узагальнених моментних зображень побудовано апроксиманти типу Паде для деяких аналітичних функцій.

В [1] було запропоноване поширення методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [2] на випадок двовимірних числових послідовностей. Зокрема, було встановлено наступний результат.

Теорема 1 [1]. *Нехай формальний степеневий ряд від двох змінних має вигляд*

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{1}$$

і при цьому для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ *за білінійною формою* $\langle .,. \rangle$

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \ k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Тоді, якщо при деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n},$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0,$$

при $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ \Phi(k+N_1, m+N_2) \le 0\big\}$, *де неперервно диференційовна функція* $\Phi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *має властивості:*

1. *множина* $D_\Phi = \big\{(u,t) \in \mathbb{R}_+^2 :\ \Phi(u,t) \le 0\big\}$ *є обмеженою в* $\mathbb{R}_+^2$*;*
2. *потужність множини* $D_\Phi \cap \big\{(u,t) \in \mathbb{Z}_+^2 :\ u \ge N_1,\ t \ge N_2\big\}$ *дорівнює* $(N_1+1)(N_2+1)-1$;
3. *існують однозначно визначені функції* $u = \varphi(t)$ *для* $t \in D_1 = \big\{t \in \mathbb{R}_+ :\ \exists u \in \mathbb{R}_+,\ (u,t) \in D_\Phi\big\}$ *та* $t = \psi(u)$ *для* $u \in D_2 = \big\{u \in \mathbb{R}_+ :\ \exists t \in \mathbb{R}_+,\ (u,t) \in D_\Phi\big\}$*;*
4. $\varphi(t) \ge N_1\ \forall t \in D_1,\ \psi(u) \ge N_2\ \forall u \in D_2,$

і при цьому $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \ne 0$, *то раціональна функція*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}, \tag{3}$$

де

$$Q(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n, \tag{4}$$

а

$$\begin{aligned} P(z,w) = {} & \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \\ & + z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{[\varphi(m)]-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} + \\ & + w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{[\psi(k)]-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}, \end{aligned} \tag{5}$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (1) *для* $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 :\ \Phi(k,m) \le 0\big\}$.

З використанням цієї теореми в [1, 3, 4] було побудовано та досліджено апроксиманти типу Паде для деяких класів гіпергеометричних рядів від двох змінних.

Дана стаття продовжує вказані дослідження для нових класів функцій.

Як і в [1, 3, 4] будемо розглядати випадки, коли узагальнені моментні зображення (2) можуть бути переформульованими в операторному вигляді, а саме, коли в лінійному нормованому просторі $\mathcal{X}$ існують лінійні обмежені оператори A та B, що комутують між собою, і такі що

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m} \ \forall (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2,$$
$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1} \ \forall (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2,$$

а в лінійному нормованому просторі $\mathcal{Y}$ існують оператори $A^\star$ та $B^\star$, що є спряженими до операторів A та B відповідно відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ (див. [5, с. 21]).

В [1] та [4] розглядаються випадки, коли оператори A та B збігаються між собою. Тоді має місце зображення

$$f(z,w) = \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A)x_{0,0}, y_{0,0} \rangle = \frac{zh(z) - wh(w)}{z - w},$$

де

$$h(z) = \langle \widehat{R_z}(A)x_{0,0}, y_{0,0} \rangle,$$

а резольвентна функція оператора A визначається формулою

$$\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}.$$

Найпростішою є ситуація, коли оператори A та B є операторами множення на незалежну змінну, що відповідають класичній степеневій проблемі моментів (див. [6, с. 172])

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = t\varphi(t), \ \varphi \in L_2\left([0,1], d\mu\right). \tag{6}$$

Відповідні узагальнені моментні зображення розглянуті в [1]. В [4] розглянуто випадок, коли

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau, \ \varphi \in L_1\left([0,1]\right). \tag{7}$$

Розгляд лінійної комбінації операторів (6) та (7)

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t), \ \varphi \in L_1\left([0,1]\right)$$

безпосередньо приводить до наступного результату.

Теорема 2. *Для аналітичної функції вигляду*

$$f(z,w) = \frac{zh(z) - wh(w)}{z - w}, \tag{8}$$

де

$$h(z) = \frac{1}{\nu+1}\,{}_2F_1(\nu+\varkappa+1, 1; \nu+2; z) := \frac{1}{\nu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+\varkappa+1)_k}{(\nu+2)_k}z^k,$$

при $\nu > -1$, *а символ Похгаммера* $(\alpha)_k$ *визначається наступним співвідношенням* (див. [7, с. 82])

$$(\alpha)_k = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1), & \text{якщо } k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{якщо } k = 0, \end{cases}$$

при довільному $N \in \mathbb{N}$ *раціональна функція, що визначається рівностями* (3)–(5) *при* $\varphi(m) = 4N - 1 - m$, $\psi(k) = 4N - 1 - k$, $N_1 = N_2 = N$, *в яких коефіцієнти* $c_{j,n}^{(N,N)}$, $j, n = 0, 1, \ldots, N$, *задовольняють рівності*

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\frac{(\varkappa+\nu+1)_{k+m}}{(\nu+1)_{k+m}}c_{k,m}^{(N,N)}t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N}p_j^{(2N)}t^j, \tag{9}$$

а $p_j^{(2N)}$ — *коефіцієнти зсунутого ортонормованого на* $[0,1]$ *з вагою* $t^\nu dt$ *многочлена Якобі степеня* $2N$

$$p_j^{(2N)} = \alpha_N(-1)^j\binom{2N}{j}\frac{(\nu+1)_{2N+j}}{(\nu+1)_j},\ j = 0, 1, \ldots, 2N,$$

(див. [7, с. 581]) *матиме розвинення в степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції* (8) *для* $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 :\ k+m \le 4N-1\big\}$.

Зауваження. Як і в [1], рівності (9) не дають можливості визначити коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$, $k, m = 1, 2, \ldots, N$, однозначно. Тому можуть бути використані різні підходи до їх визначення (див. [1]). Відзначимо також, що коефіцієнти степеневого розвинення функцій вигляду (8) будуть наступними

$$s_{k,m} = \frac{(\nu + \varkappa + 1)_{k+m}}{(\nu+1)(\nu+2)_{k+m}},\ (k,m) \in \mathbb{Z}_+^2,$$

а отже, функції (8) будуть з точністю до постійного множника частинними випадками гіпергеометричних рядів Аппеля (див. [8, с. 219])

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!} z^k w^m$$

при $\beta = \beta' = 1$, $\alpha = \varkappa + \nu + 1$, $\gamma = \nu + 2$.

Розглянемо тепер випадок, коли у просторі $\mathcal{X} = L_2([0,1], d\mu)$ визначено оператори

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t),\ (B\varphi)(t) = (A^2\varphi)(t) = t^2\varphi(t).$$

Тоді

$$f(z,w) = \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A^2)x_{0,0}, y_{0,0}\rangle.$$

Можна записати

$$\begin{gathered} \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A^2) = (I - zA)^{-1}(I - \sqrt{w}A)^{-1}(I + \sqrt{w}A)^{-1} = \\ = \alpha(I - zA)^{-1} + \beta(I - \sqrt{w}A)^{-1} + \gamma(I + \sqrt{w}A)^{-1}. \end{gathered}$$

Звідси отримаємо систему рівнянь для визначення параметрів α, β, γ

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ (\sqrt{w} - z)\beta - (\sqrt{w} + z)\gamma = 0, \\ w\alpha + z\sqrt{w}\beta - z\sqrt{w}\gamma = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, будемо мати

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{z^2}{z^2 - w}, \\ \beta = \dfrac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} - z)}, \\ \gamma = \dfrac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w} + z)}. \end{cases}$$

Покладаючи $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$, дістанемо

$$f(z,w) = \frac{z^2}{z^2-w}h(z) + \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w}-z)}h(\sqrt{w}) + \frac{\sqrt{w}}{2(\sqrt{w}+z)}h(-\sqrt{w}),$$

де

$$h(z) = \int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Звідси отримуємо зображення

$$f(z,w) = \frac{z^2}{z^2-w}\int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt} + \frac{w}{w-z^2}\int\limits_0^1 \frac{(1+zt)d\mu(t)}{1-wt^2}. \qquad (10)$$

Щоб побудувати апроксиманти типу Паде функції (10) за теоремою 1 потрібно побудувати біортогональний поліном вигляду

$$Y_{N_1,N_2}(t) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n}(t),$$

де $y_{j,n}(t) = t^{j+2n}$, $(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2$, для якого є справедливими співвідношення

$$\int\limits_0^1 x_{k,m}(t) Y_{N_1,N_2}(t) d\mu(t) = 0,$$

де $x_{k,m}(t) = t^{k+2m}$, $(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2$, при $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$. Очевидно, $Y_{N_1,N_2}(t)$ є алгебраїчним многочленом степеня N_1+2N_2. Оскільки ми розглядаємо випадок $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, то цей многочлен має бути ортогональним до всіх степенів змінної з показником, що не перевищує N_1+2N_2-1. А це означає, що він повинен збігаються з точністю до постійного множника з ортонормованим на $[0,1]$ з вагою $d\mu$ многочленом $P_{N_1+2N_2}(t)$. Отже, коефіцієнти полінома Y_{N_1,N_2} задовольняють рівність

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^{j+2n} = \sum_{r=0}^{N_1+2N_2} p_r^{(N_1+2N_2)} t^r. \qquad (11)$$

Як і у випадку рівності (9), рівність (11) не дає можливості однозначно визначити коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2)}$. Один з варіантів розв'язання цієї рівності:

$$c_{j,n}^{(N_1,N_2)} = \begin{cases} p_{2n+j} & \text{при } j=0,1;\ n=0,1,\dots,N_2, \\ p_{2N_2+j} & \text{при } j=2,3,\dots,N_1;\ n=N_2, \\ 0 & \text{при } j=2,\dots,N_1;\ n=0,\dots,N_2-1. \end{cases} \tag{12}$$

Це дає можливість встановити наступний результат.

Теорема 3. *Для аналітичної функції $f(z,w)$, що має зображення* (10) *при довільних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, раціональна функція, що визначається рівностями* (3) – (5) *при $\varphi(m) = 2N_1$, $\psi(k) = 2N_2$, в яких коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2)}$, $j = 0,1,\dots,N_1$, $n = 0,1,\dots,N_2$, задовольняють рівності (12), матиме розвинення в степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами розвинення функції* (10) *для* $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+^2 :\ k \le 2N_1,\ n \le 2N_2\big\} \setminus \big\{(2N_1, 2N_2)\big\}$.

1. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 8. — С. 1035 – 1058.
2. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.
3. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Побудова апроксимант Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 1. — С. 69 – 94.
4. *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 10. — С. 1315 – 1331.
5. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
6. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961. — 312 с.
7. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965. — 296 с.