УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДВОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ ДЕЯКИХ РЯДІВ ГУМБЕРТА

By means of the extension of Dzyadyk's method of generalized moment representations to the case of two-dimensional number sequences, we construct and investigate Padé approximants for some Humbert confluent hypergeometric series.

С помощью распространения метода обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка на случай двумерных числовых последовательностей построены и исследованы аппроксиманты Паде для некоторых вырожденных гипергеометрических рядов Гумберта.

Метод узагальнених моментних зображень, запропонований В. К. Дзядиком [1], можна поширити на випадок двовимірних числових послідовностей [2].

Означення. *Говоритимемо, що для двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *справджується узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle .,. \rangle$, *якщо у просторі* $\mathscr{X}$ *вказано двовимірну послідовність елементів* $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, *а у просторі* $\mathscr{Y}$ — *двовимірну послідовність елементів* $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ *такі, що*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Такі зображення можуть бути використані для побудови двовимірних апроксимацій Паде формальних степеневих рядів двох змінних.

Теорема 1 [2]. *Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд*

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m \tag{2}$$

і для двовимірної послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *справджується узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Тоді якщо для деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує нетривіальний узагальнений многочлен*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0$$

при $(k,m) \in \mathscr{H}$, *де область* $\mathscr{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$ *обмежена графіком деякої функції* $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, *містить рівно* $(N_1+1)(N_2+1)-1$ *точку і при цьому* $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, *то раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \right.$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}+$$

$$\left.+\,w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}\right\}, \qquad (3)$$

де

$$Q_{N_1,N_2}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n,$$

а $x(k), y(m)$ *— деякі функції з* $\mathbb{Z}_+$ *в* $\mathbb{Z}_+$ *такі, що* $x(k)\geqslant N_2,\ \ y(m)\geqslant N_1$ *для всіх значень* k *та* m, *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду* (2) *для всіх*

$$(k,m)\in\mathscr{E}=([0,N_1-1]\ \times\ [0,N_2-1])\cup\{(k,m)\colon k\in[0,N_1-1], m\in[N_2,x(k)]\}\cup$$

$$\cup\{(k,m)\colon m\in[0,N_2-1], k\in[N_1,y(m)]\}\cup$$

$$\cup\{(k,m)\colon k\geqslant N_1, m\geqslant N_2, (k-N_1,m-N_2)\in\mathscr{H}\}.$$

Тобто раціональна функція (3) буде апроксимантою Паде ряду (2) зі знаменником, коефіцієнти якого мають індекси з області

$$\mathscr{D}=[0,N_1]\ \times\ [0,N_2],$$

а коефіцієнти чисельника — з області

$$\mathscr{N}=([0,N_1-1]\ \times\ [0,N_2-1])\cup\{(k,m)\colon k\in[0,N_1-1], m\in[N_2,x(k)]\}\cup$$

$$\cup\{(k,m)\colon m\in[0,N_2-1], k\in[N_1,y(m)]\}.$$

Для побудови зображень вигляду (1) зручно використати той факт, що задачу про двовимірні узагальнені моментні зображення, як і задачу про одновимірні узагальнені моментні зображення, можна сформулювати в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, і у просторі $\mathscr{X}$ існують комутуючі між собою обмежені лінійні оператори A, $B\colon\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ такі, що

$$Ax_{k,m}=x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m}=x_{k,m+1}$$

при всіх $k,m\in\mathbb{Z}_+$. Нехай також у просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A^\star$, $B^\star\colon\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$, спряжені до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle .,.\rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x\in\mathscr{X}$, $y\in\mathscr{Y}$

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^\star y\rangle,$$

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^{\star} y \rangle.$$

Тоді зображення (1) можна записати у вигляді

$$s_{k,m} = \left\langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle, \ k, m \in \mathbb{Z}_+,$$

і ряд (2) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z,w) = \left\langle \widehat{R_z}(A) \widehat{R_w}(B) x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle, \tag{4}$$

де резольвентна функція $\widehat{R_z}(A)$ визначається рівністю $\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}$.

За умов теореми 1 справджуватиметься така формула для похибки апроксимації:

$$f(z,w) - [\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ z^{N_1} w^{N_2} \left\langle \widehat{R_z}(A) \widehat{R_w}(B) x_{0,0}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + \, w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\}.$$

Нехай $\mathscr{X} = L\,[0,1/2] \cap C\,[1/2,1]$ — простір функцій, заданих на $[0,1]$, інтегровних на $[0,1/2]$ та неперервних на $[1/2,1]$ з нормою

$$\| \cdot \|_{\mathscr{X}} = \| \cdot \|_{L[0,1/2]} + \| \cdot \|_{C[1/2,1]}.$$

Крім того, нехай $\mathscr{Y} = C\,[0,1/2] \cap L\,[1/2,1]$ — простір функцій, заданих на $[0,1]$, неперервних на $[0,1/2]$ та інтегровних на $[1/2,1]$ з нормою

$$\| \cdot \|_{\mathscr{Y}} = \| \cdot \|_{C[0,1/2]} + \| \cdot \|_{L[1/2,1]}.$$

Очевидно, на добутку цих просторів можна задати білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(\tau) y(\tau) d\tau,$$

що буде роздільно неперервною (див. [3, с. 63]).

Розглянемо у просторі $\mathscr{X}$ лінійні обмежені оператори

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Нескладно встановити (див. [4, с. 36]), що резольвентні функції цих операторів можна зобразити у вигляді

$$\left(\widehat{R_z}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau,$$

$$\left(\widehat{R_w}(B)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + w\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{w(t-\tau)}d\tau.$$

Якщо покласти $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$, то

$$(\widehat{R_z}(A)x_{0,0})(t) = e^{zt},$$

$$(\widehat{R_w}(B)\widehat{R_z}(A)x_{0,0})(t) = \frac{ze^{zt} - we^{wt}}{z-w},$$

$$f(z,w) = \int\limits_0^1 \frac{ze^{zt} - we^{wt}}{z-w}dt = \frac{e^z - e^w}{z-w}.$$

При цьому

$$x_{k,m}(t) = (A^kB^mx_{0,0})(t) = \frac{t^{k+m}}{(k+m)!},$$

і, отже,

$$s_{k,m} = \int\limits_0^1 x_{k,m}(t)y_{0,0}(t)dt = \frac{1}{(k+m+1)!}.$$

Якщо ж

$$x_{0,0}(t) = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu > -1, \qquad y_{0,0}(t) = \frac{(1-t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)}, \quad \sigma > -1, \tag{6}$$

то

$$x_{k,m}(t) = \left(A^kB^mx_{0,0}\right)(t) = \frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)},$$

$$s_{k,m} = \int\limits_0^1 \frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)}\frac{(1-t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)}dt = \frac{1}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)},$$

і, отже, функція

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{z^kw^m}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}$$

з точністю до сталого множника збігатиметься з частинним випадком виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта [5]

$$\Phi_2(\alpha,\beta,\gamma,z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

при $\alpha=\beta=1$ і $\gamma=\nu+\sigma+2$.

Неважко побачити, що кожного разу, коли оператори A та B збігаються між собою, зображення (4) можна записати у вигляді

$$f(z,w)=\left\langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(A)x_{0,0},y_{0,0}\right\rangle=\left\langle\left(\frac{z}{z-w}\widehat{R_z}(A)+\frac{w}{w-z}\widehat{R_w}(A)\right)x_{0,0},y_{0,0}\right\rangle=$$

$$=\frac{z}{z-w}\left\langle \widehat{R_z}(A)x_{0,0},y_{0,0}\right\rangle+\frac{w}{w-z}\left\langle \widehat{R_w}(A)x_{0,0},y_{0,0}\right\rangle.$$

У випадку оператора (5) і початкових функцій (6)

$$f(z,w)=\frac{z\,{}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;z)-w\,{}_1F_1(1;\nu+\sigma+2;w)}{z-w},\tag{7}$$

де ${}_1F_1(a;b;z)$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера [6, с. 237].

Використаємо наведені вище міркування для побудови раціональних апроксимацій функції (7). Оскільки функція (7) є симетричною відносно своїх змінних, наближувати її має сенс лише симетричними раціональними функціями. Тому відразу покладемо $N_1=N_2=N$. Щоб застосувати теорему 1, нам потрібно побудувати нетривіальний узагальнений многочлен

$$Y_{N,N}=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{j,n}^{(N,N)}y_{j,n}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m},Y_{N,N}\rangle=0$$

при $(k,m)\in([0,N]\times[0,N])\setminus\{(N,N)\}$.

У розглядуваному випадку

$$x_{k,m}(t)=\frac{t^{k+m+\nu}}{\Gamma(k+m+\nu+1)},\qquad y_{j,n}(t)=\frac{(1-t)^{j+n+\sigma}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)}.$$

Тому

$$Y_{N,N}(t)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{j,n}^{(N,N)}\frac{(1-t)^{j+n+\sigma}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)}=\gamma_N P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t)(1-t)^{\sigma},$$

де $P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t)$ — зсунутий ортонормований на $[0,1]$ з вагою $t^{\nu}(1-t)^{\sigma}$ многочлен Якобі степеня $2N$ (див. [7, с. 580]), а γ_N — деяка стала, яку ми можемо, не обмежуючи загальності, покласти рівною 1. Тоді

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{j,n}^{(N,N)}\frac{t^{j+n}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)}=P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(1-t).$$

Враховуючи явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [7, с. 581]), маємо (сталу для зручності знову покладемо рівною 1)

$$P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(1-t) = P_{2N}^{(\sigma,\nu)*}(t) = \sum_{m=0}^{2N}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\sigma+1+m)}t^m.$$

Отже, нам потрібно вибрати коефіцієнти $\{c_{j,n}^{(N,N)}\}_{j,n=0}^{N}$ так, щоб виконувались рівності

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}c_{j,n}^{(N,N)}\frac{t^{j+n}}{\Gamma(j+n+\sigma+1)} = \sum_{m=0}^{2N}(-1)^m t^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\sigma+1+m)},$$

або ж

$$\sum_{\substack{0\leqslant j,n\leqslant N\\ j+n=m}} c_{j,n}^{(N,N)} = (-1)^m\binom{2N}{m}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m).$$

Виберемо вказані коефіцієнти таким чином:

$$c_{j,n}^{(N,N)} = \frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{j+n}}\binom{j+n}{j}\binom{2N}{j+n} \quad \text{при} \quad 0\leqslant j+n\leqslant N,$$

$$c_{j,n}^{(N,N)} = \frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-j}\binom{2N}{j+n} \quad \text{при} \quad N+1\leqslant j+n\leqslant 2N.$$

Це дає можливість застосувати теорему 1 до побудови апроксимант Паде функції (7) зі знаменником $Q_{N,N}(z,w)$, індекси коефіцієнтів якого належать множині $[0,N]^2\subset\mathbb{Z}_+^2$. Оскільки поліном $Y_{N,N}$, як легко бачити, буде ортогональним до $x_{k,m}$ не лише при $(k,m)\in[0,N]^2\setminus\{(N,N)\}$, але і при $(k,m)\in\{k,m\in\mathbb{Z}_+,\ k+m\leqslant 2N-1\}$, то в теоремі 1 покладемо $x(k)=4N-1-k$, $y(m)=4N-1-m$. Отримаємо наступний результат.

Теорема 2. *Для виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта*

$$f(z,w) = \Phi_2(1,1,\gamma,z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{z^k w^m}{(\gamma)_{k+m}} = \frac{z\ {}_1F_1(1;\gamma;z) - w\ {}_1F_1(1;\gamma;w)}{z-w}$$

при $\gamma=\nu+\sigma+2$, ν, $\sigma>-1$, *для будь-якого* $N\in\mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{m=0}^{N}(-1)^m\binom{2N}{m}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)z^{N-m}w^{N-m}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m +$$

$$+\sum_{m=N+1}^{2N}(-1)^m\binom{2N}{m}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)\left(\frac{z+w}{2}\right)^{2N-m},$$

$$P_{\mathscr{N}}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{j+n}}\times$$

$$\times\binom{j+n}{j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{2N-j-n}}\times$$

$$\times\binom{2N-j-n}{N-j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{j+n}}\times$$

$$\times\binom{j+n}{j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{2N-j-n}}\times$$

$$\times\binom{2N-j-n}{N-j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{j+n}}\times$$

$$\times\binom{j+n}{j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N}\frac{(-1)^{j+n}\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{2^{2N-j-n}}\times$$

$$\times\binom{2N-j-n}{N-j}\binom{2N}{j+n}\frac{1}{\Gamma(k+m+j+n-N+\nu+\sigma+2)},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для функції* (7) *для всіх* $(j,n)\in\mathscr{E}=\{(j,n)\in\mathbb{Z}_+^2\colon j+n\leqslant 4N-1\}$.

На основі теореми 2 можна встановити наступний результат про збіжність апроксимант Паде для вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта.

Теорема 3. *Побудовані в теоремі* 2 *раціональні апроксиманти функції*

$$f(z,w)=\Phi_2(1,1,\gamma,z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{z^k w^m}{(\gamma)_{k+m}}=\frac{z\ {}_1F_1(1;\gamma;z)-w\ {}_1F_1(1;\gamma;w)}{z-w}$$

при $\gamma=\nu+\sigma+2$, ν, $\sigma>-1$, *на кожному компакті з* $\mathbb{C}^2$ *рівномірно збігатимуться до функції* f *при* $N\to\infty$. *При цьому для знаменників апроксимант справджуватиметься асимптотична формула*

$$Q_{N,N}(z,w)=\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)\left(\exp\left(-\frac{z+w}{4}\right)+o(1)\right),$$

а для чисельника — формула

$$P_{\mathscr{N}}(z,w)=\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)\left(\exp\left(\frac{z+w}{4}\right)f(z,w)+o(1)\right),$$

де величина $o(1)\to 0$ *при* $N\to\infty$ *на кожному компакті з* $\mathbb{C}^2$.

Доведення. Спочатку розглянемо знаменник

$$\frac{1}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}Q_{N,N}(z,w)=$$

$$=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}z^{N-m}w^{N-m}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m+$$

$$+\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m.$$

Для першого доданка справджується оцінка

$$\left|\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}z^{N-m}w^{N-m}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{N}\binom{2N}{m}\frac{|z|^{N-m}|w|^{N-m}\left|\dfrac{z+w}{2}\right|^m}{(3N+\sigma+\nu+1)(3N+\sigma+\nu+2)\ldots(4N+\sigma+\nu)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(3N-1)^N}\sum_{m=0}^{2N}\binom{2N}{m}|z|^{N-m}|w|^{N-m}\left|\frac{z+w}{2}\right|^m\leqslant\frac{\left(|\,z\,||\,w\,|+\left|\dfrac{z+w}{2}\right|\right)^{2N}}{(3N-1)^N}.$$

При $|\,z\,|\leqslant R$ і $|\,w\,|\leqslant R$ це не перевищуватиме величину

$$\frac{(R^2+R)^{2N}}{(3N-1)^N},$$

що при фіксованому $R>0$ і $N\to\infty$ буде прямувати до нуля.

Другий доданок при деякому $0<M<N-1$ розіб'ємо на два:

$$\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m+$$

$$+\sum_{m=M+1}^{N-1}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m.$$

Оцінимо другу з отриманих сум:

$$\left|\sum_{m=M+1}^{N-1}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=M+1}^{N-1}\frac{(2N-m+1)\,\ldots\,(2N)}{m!}\frac{1}{(4N+\sigma+\nu+1-m)\,\ldots\,(4N+\sigma+\nu)}\times$$

$$\times\left|\frac{z+w}{2}\right|^m=\sum_{m=M+1}^{N-1}\frac{\left|\frac{z+w}{2}\right|^m}{m!}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{2N-p}{4N+\sigma+\nu-p}=$$

$$=\sum_{m=M+1}^{N-1}\frac{\left|\frac{z+w}{2}\right|^m}{m!}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{2+\dfrac{\sigma+\nu+p}{2N-p}}=\sum_{m=M+1}^{N-1}\frac{\left|\frac{z+w}{2}\right|^m}{m!}\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{1+\dfrac{\sigma+\nu+p}{2(2N-p)}}\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{m=M+1}^{N-1}\frac{\left|\frac{z+w}{4}\right|^m}{m!}\leqslant C\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{\left|\frac{z+w}{4}\right|^m}{m!}\leqslant C\frac{(R/2)^{M+1}}{(M+1)!},$$

де C — деяка стала.

Тепер віднімемо від першої суми розвинення у степеневий ряд функції $e^{-\frac{z+w}{4}}$ і оцінимо отриману різницю:

$$\left|\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\binom{2N}{m}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-m)}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m-\exp\left(-\frac{z+w}{4}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{m=0}^{M}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z+w}{2}\right)^m\left[\frac{(2N-m+1)\,\ldots\,(2N)}{(4N+\sigma+\nu+1-m)\,\ldots\,(4N+\sigma+\nu)}-\frac{1}{2^m}\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{z+w}{4}\right)^m\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{M} \frac{\left|\dfrac{z+w}{2}\right|^m}{m!} \left| \frac{1}{\left(2+\dfrac{\sigma+\nu+m-1}{2N-m+1}\right) \ldots \left(2+\dfrac{\sigma+\nu}{2N}\right)} - \frac{1}{2^m} \right| + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left|\frac{z+w}{4}\right|^m \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_N \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} \left|\frac{z+w}{4}\right|^m + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left|\frac{z+w}{4}\right|^m \leqslant \varepsilon_N \exp\left(\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{(M+1)!} \left(\frac{R}{2}\right)^{M+1},$$

де $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Отже, в результаті отримаємо

$$\left| \frac{1}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)} Q_{N,N}(z,w) - \exp\left(-\frac{z+w}{4}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(R^2+R)^{2N}}{(3N-1)^N} + C\frac{(R/2)^{M+1}}{(M+1)!} + \varepsilon_N e^{R/2} + \frac{(R/2)^{M+1}}{(M+1)!}.$$

Очевидно, при $N \to \infty$ ця величина буде прямувати до величини

$$(C+1)\frac{(R/2)^{M+1}}{(M+1)!},$$

що при $M\to\infty$ прямує до нуля. Таким чином, на кожному полікрузі $\{(z,w)\colon |z| \leqslant R, |w| \leqslant R\}$ будемо мати

$$\frac{1}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)} Q_{N,N}(z,w) \rightrightarrows \exp\left(-\frac{z+w}{4}\right).$$

Згідно з теоремою Руше (див. [8, с. 425]), на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$, починаючи з деякого $N \in \mathbb{Z}_+$, знаменники $Q_{N,N}(z,w)$ не матимуть нулів. Крім цього, це дозволяє записати знаменники у вигляді

$$Q_{N,N}(z,w) = \Gamma(4N+\sigma+\nu+1)\left(\exp\left(-\frac{z+w}{4}\right) + o(1)\right),$$

де величина $o(1) \to 0$ при $N \to \infty$ на кожному компакті з $\mathbb{C}^2$.

Оцінимо похибку наближення

$$|f(z,w) - [\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w)| = \frac{1}{|Q_{N,N}(z,w)|} \left| z^N w^N \int_0^1 \left(\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}\right)(t) Y_{N,N}(t)dt + \right.$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=3N-m}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=3N-k}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \right|.$$

Розглянемо перший доданок

$$\int_0^1 \left(\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}\right)(t)Y_{N,N}(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{k+m+\nu}z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+1)} Y_{N,N}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k+m\geqslant 2N} \frac{t^{k+m+\nu}z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+1)} Y_{N,N}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{t^p}{\Gamma(p+\nu+1)} \sum_{k=0}^{p} z^k w^{p-k} Y_{N,N}(t)t^{\nu}dt =$$

$$= \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p+\nu+1)} \sum_{k=0}^{p} z^k w^{p-k} \int_0^1 t^p P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t)t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt. \tag{8}$$

Функцію t^p можна розкласти в лінійну комбінацію ортогональних зсунутих многочленів Якобі $P_m^{(\nu,\sigma)*}(t)$:

$$t^p = \sum_{m=0}^{p} \alpha_m^{(p)} P_m^{(\nu,\sigma)*}(t). \tag{9}$$

Нехай $\overrightarrow{P_p}$ — вектор вигляду

$$\overrightarrow{P_p} = \left(P_0^{(\nu,\sigma)*}(t), P_1^{(\nu,\sigma)*}(t), \ldots, P_p^{(\nu,\sigma)*}(t)\right)^T,$$

а $\overrightarrow{d_p}$ — вектор вигляду

$$\overrightarrow{d_p} = (1, t, \ldots, t^p)^T.$$

Тоді зображення (9) можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{d_p} = A_p \overrightarrow{P_p}, \tag{10}$$

де нижня трикутна матриця A_p має вигляд

$$A_p = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_0^{(2)} & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_0^{(p)} & \alpha_1^{(p)} & \alpha_2^{(p)} & \ldots & \alpha_p^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Раніше було зазначено, що справджується зображення

$$P_k^{(\nu,\sigma)*}(t) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} \frac{\Gamma(k+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1+m)} t^m,$$

або у векторному записі

$$\overrightarrow{P_p} = B_p \overrightarrow{d_p}, \tag{11}$$

де нижня трикутна матриця B_p має вигляд

$$B_p = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_0^{(1)} & \beta_1^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_0^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \beta_0^{(p)} & \beta_1^{(p)} & \beta_2^{(p)} & \ldots & \beta_p^{(p)} \end{pmatrix},$$

а її елементи дорівнюють

$$\beta_m^{(k)} = (-1)^m \binom{k}{m} \frac{\Gamma(k+\sigma+\nu+1+m)}{\Gamma(\nu+1+m)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, k.$$

З (10) та (11) випливає, що

$$A_p = B_p^{-1} \quad \text{або} \quad A_p B_p = I, \tag{12}$$

де I — одинична матриця розмірності $(p+1) \times (p+1)$. З (12) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів $\alpha_m^{(p)}$, $m = 0, 1, \ldots, p$:

$$\begin{array}{cccr} \beta_0^{(0)} \alpha_0^{(p)} & + \beta_0^{(1)} \alpha_1^{(p)} & + \cdots + & \beta_0^{(p)} \alpha_p^{(p)} = 0, \\ & \beta_1^{(1)} \alpha_1^{(p)} & + \cdots + & \beta_1^{(p)} \alpha_p^{(p)} = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \beta_p^{(p)} \alpha_p^{(p)} = 1. \end{array}$$

Визначник цієї системи

$$H_p = \beta_0^{(0)} \beta_1^{(1)} \ldots \beta_p^{(p)} \neq 0.$$

За формулами Крамера розв'язок системи має вигляд

$$\alpha_j^{(p)} = \frac{1}{H_p} \begin{vmatrix} \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \ldots & \beta_0^{(j-1)} & 0 & \beta_0^{(j+1)} & \ldots & \beta_0^{(p)} \\ 0 & \beta_1^{(1)} & \ldots & \beta_1^{(j-1)} & 0 & \beta_1^{(j+1)} & \ldots & \beta_1^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_{j-1}^{(j-1)} & 0 & \beta_{j-1}^{(j+1)} & \ldots & \beta_{j-1}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & \beta_p^{(p)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{p-j}}{\beta_j^{(j)} \ldots \beta_p^{(p)}} \begin{vmatrix} \beta_j^{(j+1)} & \beta_j^{(j+2)} & \ldots & \beta_j^{(p-1)} & \beta_j^{(p)} \\ \beta_{j+1}^{(j+1)} & \beta_{j+1}^{(j+2)} & \ldots & \beta_{j+1}^{(p-1)} & \beta_{j+1}^{(p)} \\ 0 & \beta_{j+2}^{(j+2)} & \ldots & \beta_{j+2}^{(p-1)} & \beta_{j+2}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_{p-1}^{(p-1)} & \beta_{p-1}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Звідси можемо отримати формулу

$$\alpha_{p-k}^{(p)} = (-1)^{p-k} \binom{p}{p-k} \frac{\Gamma(p+\nu+1)(2p+\sigma+\nu-2k+1)}{\Gamma(2p+\sigma+\nu+2-k)}. \tag{13}$$

Зауваження. Формулу (13) можна також вивести з відповідних формул для незсунутих ортогональних многочленів Якобі (див. [9, с. 471]).

З урахуванням (9) вираз (8) можна записати у вигляді

$$\sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} z^k w^{p-k} \right) \frac{\alpha_{2N}^{(p)}}{\Gamma(p+\nu+1)} \int_0^1 \left[P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t) \right]^2 t^{\nu}(1-t)^{\sigma} dt.$$

Оскільки старший коефіцієнт многочлена $P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}$ дорівнює $\dfrac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(2N+\sigma+1)}$, а квадрат норми зсунутого ортогонального многочлена Якобі з одиничним старшим коефіцієнтом дорівнює (див. [7, с. 580])

$$h_{2N} = \frac{(2N)!\Gamma(2N+\nu+1)\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\sigma+1)}{(4N+\sigma+\nu+1)\Gamma^2(4N+\sigma+\nu+1)},$$

то

$$\left\| P_{2N}^{(\nu,\sigma)*} \right\|_{L_2([0,1],t^{\nu}(1-t)^{\sigma})}^2 = \int_0^1 \left[P_{2N}^{(\nu,\sigma)*}(t) \right]^2 t^{\nu}(1-t)^{\sigma} dt =$$

$$= \frac{(2N)!\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)}{(4N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\sigma+1)}. \tag{14}$$

Отже, з урахуванням (13) і (14) для першого доданка при $|z|$, $|w| \leqslant R$ отримаємо

$$\left| \int_0^1 \left(\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0} \right)(t) Y_{N,N}(t) dt \right| \leqslant \left\| P_{2N}^{(\nu,\sigma)*} \right\|^2 \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} |z|^k |w|^{p-k} \right) \frac{\left| \alpha_{2N}^{(p)} \right|}{\Gamma(p+\nu+1)} =$$

$$= \frac{(2N)!\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)}{\Gamma(2N+\sigma+1)(4N+\sigma+\nu+1)} \times$$

$$\times \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} |z|^k |w|^{p-k} \right) \binom{p}{2N} \frac{\Gamma(p+\nu+1)(4N+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(p+\nu+1)\Gamma(p+2N+\sigma+\nu+2)} =$$

$$= \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)}{\Gamma(2N+\sigma+1)} \times$$

$$\times \sum_{p=2N}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} |z|^k |w|^{p-k} \right) \frac{p(p-1)\ \ldots\ (p-2N+1)}{\Gamma(p+2N+\sigma+\nu+2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)}{\Gamma(2N+\sigma+1)} \sum_{p=2N}^{\infty} \frac{(p+1)p(p-1)\ \ldots\ (p-2N+1)R^p}{\Gamma(p+2N+\sigma+\nu+2)} =$$

$$= \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)}{\Gamma(2N+\sigma+1)} R^{2N} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+2N+1)!R^p}{p!\Gamma(p+4N+\sigma+\nu+2)}.$$

Позначимо

$$I_N = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+2N+1)!R^p}{p!\Gamma(p+4N+\sigma+\nu+2)} = \frac{(2N+1)!}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+2)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2N+2)(2N+3)\ \ldots\ (2N+p+1)}{(4N+\sigma+\nu+2)(4N+\sigma+\nu+3)\ \ldots\ (4N+\sigma+\nu+p+1)} \frac{R^p}{p!} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{(2N+1)!}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+2)},$$

де C — деяка стала, що залежить від R.

Отже, для першого доданка виконуватиметься

$$\left| \int_0^1 \left(\widehat{R_z}(A) \widehat{R_w}(B) x_{0,0} \right)(t) Y_{N,N}(t) dt \right| \leqslant C \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1)\Gamma(2N+\nu+1)R^{2N}(2N+1)!}{\Gamma(2N+\sigma+1)\Gamma(4N+\sigma+\nu+2)}.$$

Використавши формулу Стірлінга (див. [7, с. 83]), оцінимо цю величину виразом

$$C \frac{(2N+2)^{1/2+\sigma-\nu}}{2^{4N}} R^{2N}.$$

Оцінимо другий доданок:

$$\left| w^N \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant R^N \sum_{k=0}^{N-1} |z|^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} |w|^m s_{0,m} \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} \left| c_{j,n}^{(N,N)} \right|.$$

Враховуючи формули для коефіцієнтів зсунутих ортонормованих многочленів Якобі, отримуємо

$$\sum_{n=0}^{N} \left| c_{j,n}^{(N,N)} \right| = \sum_{k=0}^{2N} \left| p_k^{(2N)} \right| = \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+k)}{\Gamma(\sigma+1+k)} \leqslant C\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)2^{4N}.$$

Отже, для другого доданка справджується оцінка

$$\left| w^N \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant CR^N 2^{4N} \Gamma(4N+\sigma+\nu+1) \sum_{k=0}^{N-1} R^k \sum_{m=3N-k}^{\infty} \frac{R^m}{\Gamma(m+\nu+\sigma+2)} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{R^{2N-1} 2^{4N} N \Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(2N+\nu+\sigma+2)}.$$

Аналогічна оцінка матиме місце і для третього доданка.

Враховуючи встановлені оцінки, для похибки апроксимації отримуємо

$$|f(z,w) - [\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w)| \leqslant \frac{C}{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{(2N+2)^{1/2+\sigma-\nu}}{2^{4N}} R^{2N} + \frac{R^{2N-1} 2^{4N} N \Gamma(4N+\sigma+\nu+1)}{\Gamma(2N+\nu+\sigma+2)} \right) \to 0$$

при $N \to \infty$, звідки і випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Щоб проілюструвати теорему 2, розглянемо частинний випадок $\nu = \sigma = 0$. Тоді, як було зазначено раніше, функція $f(z,w)$ матиме вигляд

$$f(z,w) = \frac{e^w - e^z}{w - z}. \tag{15}$$

Покладемо спочатку $N = 1$. За теоремою 2 отримаємо раціональну апроксимацію

$$\frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{1,1}(z,w)} = \frac{24 + w^2 + z^2 + 6z + 6w}{2zw - 6z - 6w + 24}.$$

Порівняємо значення функції, що наближується $f(z,w) = \dfrac{e^w - e^z}{w - z}$, частинної суми степеневого ряду

$$P_3(z,w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{6}(z^2 + zw + w^2) + \frac{1}{24}(z^3 + z^2 w + z w^2 + w^3)$$

та побудованої нами апроксимації в точках квадрата $[1,0] \times [1,0]$ (див. табл. 1).

Таблиця 1

w	z					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.0	1	1.107013790	1.229561745	1.370198000	1.531926160	1.718281828
	1	1.107000000	1.229333334	1.369000000	1.528000000	1.708333333
	1	1.107017544	1.229629630	1.370588235	1.533333333	1.722222222
0.2	1.107013790	1.221402758	1.352109700	1.501790105	1.673563617	1.871098837
	1.107000000	1.221333333	1.351666667	1.500000000	1.668333333	1.858666667
	1.107017544	1.221402214	1.352140078	1.502057613	1.674672489	1.874418605
0.4	1.229561745	1.352109700	1.491824698	1.651470510	1.834290575	2.044095217
	1.229333334	1.351666667	1.490666669	1.648333334	1.826666667	2.027666669
	1.229629630	1.352140078	1.491803279	1.651515152	1.834862385	2.046341463
0.6	1.370198000	1.501790105	1.651470510	1.822118800	2.017110640	2.240407570
	1.369000000	1.500000000	1.648333334	1.816000000	2.005000000	2.217333334
	1.370588235	1.502057613	1.651515152	1.821917808	2.016908213	2.241025641
0.8	1.531926160	1.673563617	1.834290575	2.017110640	2.225540928	2.46370450
	1.528000000	1.668333333	1.826666667	2.005000000	2.205333333	2.429666667
	1.533333333	1.674672489	1.834862385	2.016908213	2.224489796	2.462162162
1	1.718281828	1.871098837	2.044095217	2.240407570	2.46370450	2.718281828
	1.708333333	1.858666667	2.027666669	2.217333334	2.429666667	2.666666667
	1.722222222	1.874418605	2.046341463	2.241025641	2.462162162	2.714285714

Візьмемо тепер $N = 2$. Отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{2,2}(z,w)} = (40320 + 10080z + 10080w + 2760z^2 + 2760w^2 - 1200zw +$$

$$+540z^3 + 540w^3 - 300z^2w - 300zw^2 + 96z^4 + 96w^4 - 84z^3w - 84zw^3 -$$

$$-17zw^4 - 17zw^4 + 17w^5 + 17z^5 - 3zw^5 - 3z^5w + 3w^6 + 3z^6 + \frac{1}{2}z^7 + \frac{1}{2}w^7 - \frac{1}{2}z^6w - \frac{1}{2}zw^6)\times$$

$$\times(24z^2w^2 - 240zw^2 - 240z^2w + 1080z^2 + 1080w^2 + 2160zw - 10080z - 10080w + 40320)^{-1}.$$

Значення функції, що наближується, частинної суми степеневого ряду

$$P_7(z,w) = 1 + \frac{1}{2!}(z+w) + \frac{1}{3!}(z^2 + zw + w^2) +$$

$$+\frac{1}{4!}(z^3 + z^2w + zw^2 + w^3) + \frac{1}{5!}(z^4 + z^3w + z^2w^2 + zw^3 + w^4) +$$

$$+\frac{1}{6!}(z^5 + z^4w + z^3w^2 + z^2w^3 + zw^4 + w^5) + \frac{1}{7!}(z^6 + z^5w + z^4w^2 + z^3w^3 + z^2w^4 + zw^5 +$$

$$+w^6) + \frac{1}{8!}(z^7 + z^6w + z^5w^2 + z^4w^3 + z^3w^4 + z^2w^5 + zw^6 + w^7)$$

та побудованої апроксимації наведено в табл. 2.

Таблиця 2

w	z					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.0	1	1.107013790	1.229561745	1.370198000	1.531926160	1.718281828
	1	1.107013790	1.229561743	1.370197951	1.531925658	1.718278770
	1	1.107013791	1.229561743	1.370197961	1.531925731	1.718279055
0.2	1.107013790	1.221402758	1.352109700	1.501790105	1.673563617	1.871098837
	1.107013790	1.221402753	1.352109694	1.501790031	1.673562944	1.871095015
	1.107013791	1.221402758	1.352109708	1.501790219	1.673564121	1.871099899
0.4	1.229561745	1.352109700	1.491824698	1.651470510	1.834290575	2.044095217
	1.229561743	1.352109694	1.491824685	1.651470370	1.834289575	2.044090124
	1.229561743	1.352109708	1.491824698	1.651470760	1.834292060	2.044100453
0.6	1.370198000	1.501790105	1.651470510	1.822118800	2.017110640	2.240407570
	1.370197951	1.501790031	1.651470370	1.822118351	2.017108779	2.240399999
	1.370197961	1.501790219	1.651470760	1.822118800	2.017108406	2.240416710
0.8	1.531926160	1.673563617	1.834290575	2.017110640	2.225540928	2.46370450
	1.531925658	1.673562944	1.834289575	2.017108779	2.225536363	2.463691216
	1.531925731	1.673564121	1.834292060	2.017108406	2.225540917	2.463714564
1	1.718281828	1.871098837	2.044095217	2.240407570	2.46370450	2.718281828
	1.718278770	1.871095015	2.044090124	2.240399999	2.463691216	2.718253968
	1.718279055	1.871099899	2.044100453	2.240416710	2.463714564	2.718281718

Наведені приклади показують, що побудовані на основі теореми 2 раціональні апроксиманти наближають функцію (15) краще за частинну суму степеневого ряду з такою ж кількістю вільних коефіцієнтів.

Зауважимо, що у книзі А. Кейт [10] наведено чисельні приклади, пов'язані з обчисленням раціональних апроксимацій, що є певними двовимірними узагальненнями апроксимацій Паде для функції

$$f(z,w)=\frac{we^w-ze^z}{w-z}.$$

Ця функція також є частинним випадком функції (7) при $\nu+\sigma=-1$.

1. *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – **6**. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 8. – С. 1035 – 1058.
3. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. – 444 с.
4. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
5. *Humbert P.* Sur les fonctions hypercylindriques // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. – 1920. – **171**. – S. 490 – 492.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
7. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
8. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1967. – Т. 1. – 488 с.
9. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
10. *Cuyt A.* Padé approximants for operators: theory and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 138 p.

Одержано 24.12.12,
після доопрацювання — 20.05.13