УДК 517.53

Голуб А.П.
(Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОД УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ В ТЕОРІЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Огляд

1^0. Вступ. В теорії раціональної апроксимації аналітичних функцій одну з центральних ролей відіграють так звані апроксиманти (або ж поліноми) Паде, які є природними узагальненнями многочленів Тейлора в тому розумінні, що вони здійснюють найкращі локальні раціональні наближення функцій.

Означення 1 (див. [1, с.31]). Будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де $P_M(z)$ та $Q_N(z)$ – алгебраїчні многочлени степенів $\leq M$ та $\leq N$ відповідно, є апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ формального степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{1}$$

якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1}) \text{ при } \quad z \to 0,$$

тобто розвинення раціональної функції $[M/N]_f(z)$ в степеневий ряд співпадає з розвиненням (1) до члена, що містить z^{M+N}, включно.

Надалі будемо позначати через $\mathscr{R}[M/N]$ клас всіх раціональних функцій вигляду $\frac{P_M(z)}{Q_N(z)}$ таких, що $\deg P_M(z) \leq M$ і $\deg Q_N(z) \leq N$.

Апроксиманти Паде були запроваджені німецьким математиком К. Якобі у 1846 р. [2], і ним же були побудовані детермінантні вирази для апроксимант Паде через коефіцієнти степеневого розвинення функції.

Нехай $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність коефіцієнтів степеневого ряду $f(z)$ вигляду (1). Розглянемо визначники:

$$H_{L,N} = \det\|s_{L+k+j}\|_{k,j=0}^{N} = \begin{vmatrix} s_L & s_{L+1} & \cdots & s_{L+N} \\ s_{L+1} & s_{L+2} & \cdots & s_{L+N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L+N} & s_{L+N+1} & \cdots & s_{L+2N} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Будемо називати такі визначники визначниками Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. Введемо до розгляду також алгебраїчні доповнення $A_{L,N,j}$, $j = \overline{0,N}$, елементів останнього рядка визначника (2). Результат К. Якобі полягає в тому, що у випадку відмінності від нуля визначника

$$H_{M+1-N,N-1} \neq 0$$

для функції $f(z)$ вигляду (1) існує її апроксиманта Паде порядку $[M/N]$ і вона може бути зображена у вигляді

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} z^{N-j},$$

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} \sum_{m=0}^{M-N+j} s_m z^{N+m-j}.$$

Зазначимо, що в наведених формулах $s_m = 0$, якщо $m < 0$. Німецький математик Ф. Фробеніус у 1881 р. дослідив алгебраїчні властивості поліномів Паде і встановив тотожності для поліномів Паде, чисельники та знаменники яких мають степені, що відрізняються не більше, ніж на одиницю [3]. Нарешті у серії праць, опублікованих з 1892 по 1907 рр., французький математик Анрі Паде розташував поліноми Паде в двопараметричну напівнескінченну таблицю, що нині називається таблицею Паде, вивчив структуру цієї таблиці, а також побудував і дослідив першу піддіагональ таблиці Паде для гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(1,\sigma;\rho+1;z)$ та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$ [4,5].

Означення 2. Нехай $f(z)$ – формальний степеневий ряд. Таблицею Паде, що відповідає $f(z)$, будемо називати двопараметричну напівнескінченну таблицю, елементами якої є апроксиманти Паде $[M/N]_f(z)$ (якщо вони існують)

$$\begin{array}{ccccc}
[0/0]_f(z) & [1/0]_f(z) & \cdots & [M/0]_f(z) & \cdots \\
[0/1]_f(z) & [1/1]_f(z) & \cdots & [M/1]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[0/N]_f(z) & [1/N]_f(z) & \cdots & [M/N]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}.$$

Верхній рядок таблиці Паде складають елементи $[M/0]_f(z)$, $M = \overline{0,\infty}$, які є многочленами Тейлора–Маклорена функції $f(z)$. Найбільший інтерес викликає вивчення поведінки елементів діагоналі та першої піддіагоналі таблиці Паде, тобто апроксимант Паде порядків $[N/N]$, $N = \overline{0,\infty}$, та $[N-1/N]$, $N = \overline{1,\infty}$.

Одним з найбільш глибоких досягнень класичного періоду розвитку теорії апроксимацій Паде стало з'ясування їх тісних зв'язків з класичною проблемою моментів та теорією ланцюгових дробів. Започаткували цей напрямок російський математик П. Чебишов [6] та голандський математик Т. Стілтьєс [7], значний внесок було зроблено російським математиком А. Марковим [8], німецькими математиками Г. Гамбургером [9] та Ф. Хаусдорфом [10].

Означення 3. Класична проблема моментів на борелівській підмножині дійсної осі $\Delta \subset \mathbb{R}$ полягає у тому, щоб за заданою числовою послідовністю $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначити невід'ємну міру $d\mu(t)$ на Δ, для якої виконувались би рівності:

$$s_k = \int\limits_{\Delta} t^k d\mu(t), \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{3}$$

Для функцій $f(z)$, коефіцієнти степеневих розвинень яких можуть бути зображені у вигляді (3), їх апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$ (тобто елементи першої піддіагоналі таблиці Паде) можуть бути побудовані в термінах многочленів, ортогональних на Δ за мірою $d\mu(t)$, а саме, якщо позначити через $\{A_N(t)\}_{N=0}^{\infty}$ послідовність нетривіальних алгебраїчних многочленів таких, що

$$\int\limits_{\Delta} A_N(t) A_M(t) d\mu(t) = 0 \quad \text{при} \quad M \neq N,$$

то

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z),$$

а

$$P_{N-1}(z) = z^{N-1} \int\limits_{\Delta} \frac{A_N(1/z) - A_N(t)}{1/z - t} d\mu(t).$$

Ця обставина є визначальною для вивчення апроксимант Паде так званих марковських функцій, тобто функцій, які можна зобразити у вигляді:

$$f(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1 - zt}. \tag{4}$$

Дослідженню всього кола питань, що виникають при цьому, присвячена монографія Н. Ахієзера [11]. В подальшому значний внесок у вичення апроксимант Паде марківських функцій, зокрема, у випадках, коли підмножина Δ є необмеженою або є об'єднанням кількох сегментів дійсної осі, що взаємно не перетинаються, було зроблено А. Гончарем , Є.Рахмановим , К. Лунгу, Я. Гілевичем, Ю. Люком, Дж. Бейкером, В. Гаучі, П. Вінном та ін. [12-21]. В роботах Е. Хендріксена, Г. ван Россума, Дж. Натолла, Г. Шталя та ін. [22-25] отримано ряд результатів, що стосуються поведінки апроксимант Паде функцій вигляду (4) у випадку знакозмінної або ж комплекснозначної міри $d\mu(t)$, а також у випадку, коли Δ є підмножиною комплексної площини.

Паралельно з вивченням класичних апроксимацій Паде багато дослідників, починаючи з 60-х рр. XX ст., стали розглядати та досліджувати різноманітні їх узагальнення.

Означення 4. Нехай $E = \{e_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормований базис в деякому функціональному гільбертовому просторі $\mathscr{H}$. Будемо говорити, що функція

$$[M/N]_f^{(E)}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{M} p_j^{(M)} e_j(x)}{\sum\limits_{k=0}^{N} q_k^{(N)} e_k(x)}$$

є узагальненою апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ функції $f(x) \in \mathscr{H}$, якщо

$$f(x) - [M/N]_f^{(E)}(x) \perp e_k(x)$$

для $k = \overline{0, M+N}$.

В залежності від того, який ортонормований базис використовується в означенні, розглядаються апроксиманти Паде–Чебишова, Паде–Лежандра, тригонометричні апроксиманти Паде та ін. Найбільш суттєві результати у вивченні у загальнених апроксимант Паде належать А. Гончару, С. Суєтіну, Л. Карлбергу та ін. [26-29].

Означення 5. Нехай $z_1, z_2, \ldots, z_R \in \mathscr{D}$ – деякі точки, що належать області $\mathscr{D}$ комплексної площини і $M = (m_1, m_2, \ldots, m_R)$ - вектор з невід'ємними цілими координатами такими, що $m_r \geq N - 1$, $r = \overline{1, R}$, а N - деяке натуральне число. Будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathscr{R}\left[\sum_{r=1}^{R} m_r - N - 1/N\right]$$

є багатоточковою апроксимантою Паде індексу $[M/N]$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_R$ функції $f(z)$, аналітичної в області $\mathscr{D}$, якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = O((z - z_r)^{m_r})$$

при $z \to z_r$, $r = \overline{1, R}$.

В різних публікаціях багатоточкові апроксиманти Паде називаються також раціональними інтерполянтами, апроксимантами Ньютона–Паде та ін. Багатоточкові апроксиманти Паде вивчались в роботах А. Гончара, Л. Гієрмо Лопеса, В. Русака, Є. Ровби, Л. Філозофа, А. Магнуса, О.Ньястада, Г. Волліна та ін. [30-37].

Означення 6. Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ – набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій, а N та M – вектори з невід'ємними цілими координатами $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$. Сумісними апроксимантами Паде набору F індексу $R = [M, N]$ називаються раціональні поліноми

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) \in \mathscr{R}[m_\lambda/|N|], \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

де $|N| = n_1 + n_2 + \dots + n_\Lambda$, з деяким спільним знаменником $Q_N(z)$ степеня $|N|$, для яких виконуються асимптотичні рівності:

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{n_\lambda + m_\lambda + 1})$$

при $z \to 0$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$.

Означення 7. Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, $\Lambda \geq 2$ - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій, а M – вектор з невід'ємними цілими координатами $M = (m_1, m_2, \dots, m_\Lambda)$, $|M| = m_1 + m_2 + \dots + m_\Lambda$. Поліномами Паде–Ерміта набору F індексу $[M]$ називаються алгебраїчні многочлени $[M]_F^{(\lambda)}(z)$ степенів, що не перевищують m_λ, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, і не всі тотожно рівні нулеві, тобто

$$\deg [M]_F^{(\lambda)}(z) \leq m_\lambda, \quad \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} |[M]_F^{(\lambda)}(z)| \not\equiv 0,$$

і такі, що виконується співвідношення:

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z) [M]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{|M| + \Lambda - 1})$$

при $z \to 0$.

Вперше задача, яка фактично призвела до побудови сумісних апроксимант Паде та апроксимант Паде–Ерміта системи експонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, була поставлена і розв'язана французьким математиком Ш. Ермітом [38] у зв'язку з питанням про трансцендентність числа e. Для випадку набору марковських функцій, носії яких взаємно не перетинаються, сумісні апроксиманти Паде були вивчені в роботі М. Анжелеско [39]. Сучасна формальна теорія сумісних апроксимацій Паде побудована в працях К. Малера [40], Дж. Коатса [41] та Г. Джагера [42]. Вагомий внесок у вивчення сумісних апроксимацій Паде та апроксимацій Паде-Ерміта було зроблено А.Гончарем, Є. Нікішіним, Є.Рахмановим, В. Сорокіним, О. Аптекарєвим, В. Калягіним, В. Парусниковим, М.де Брюіном, Д. Любінським, Г. Чудновським, Дж. Натоллом , В. Бекерманом, Дж. Лабаном та ін. [43-62].

2^0. Узагальнені моментні зображення. Наприкінці 70-х рр. В.К. Дзядик на основі подальшого розвитку запропонованого ним апроксимаційного методу наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь [63-66] з'ясував, що в ряді випадків застосування вказаного методу до побудови раціональних наближень приводить до отримання діагональних поліномів Паде деяких елементарних функцій. В роботі [67] В.К. Дзядиком та Л.І. Філозофом було вивчене асимптотичне поводження апроксимант Паде функцій e^z та $(1+z)^\alpha$, а згодом в роботі [68] В.К. Дзядиком була досліджена асимптотика діагональних апроксимант Паде функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$ і встановлено зв'язок між раціональними апроксимантами та біортогональними системами функцій. Аналіз отриманих результатів і співставлення їх з існуючою глибокою теорією класичної проблеми моментів дозволив В.К. Дзядику в роботі [69] сформулювати задачу про узагальнені моментні зображення.

Означення 8. Узагальненим моментним зображенням числової послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ називається двохпараметрична сукупність рівностей

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle\,,\ k, j = \overline{0,\infty}, \tag{5}$$

де $x_k \in \mathscr{X}\,,\ k = \overline{0,\infty},\ y_j \in \mathscr{Y}, j = \overline{0,\infty}$, а $\langle .,. \rangle$ - деяка білінійна форма, означена на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Легко побачити, що, якщо в (5) покласти $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L_2[\Delta, d\mu(t)]$ – простір функцій, інтегровних на Δ з квадратом за мірою $d\mu(t)$, $\langle x, y \rangle = \int\limits_{\Delta} x(t)y(t)d\mu(t)$, в ролі елементів x_k вибрати функції $x_k(t) = t^k$, $k = \overline{0,\infty}$, а в ролі елементів y_j вибрати функції $y_j(t) = t^j$, $j = \overline{0,\infty}$, то ми отримаємо зображення, еквівалентне класичній проблемі моментів (3).

У випадку, коли існує такий лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, що

$$Ax_k = x_{k+1},\ k = \overline{0,\infty}, \tag{6}$$

а в просторі $\mathscr{Y}$ існує лінійний оператор $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ такий, що

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle\,,\ \forall x \in \mathscr{X},\ \forall y \in \mathscr{Y}$$

(ми будемо називати оператор A^* спряженим до оператора A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$), зображення (5), як показано в [70], еквівалентне зображенню

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle,\ k = \overline{0,\infty}. \tag{7}$$

При цьому твірна функція $f(z)$ послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ матиме формальне зображення

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \right\rangle, \tag{8}$$

де $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ - резольвентна функція оператора A.

Як показано в [71], для степеневих розвинень вигляду (1), в яких коефіцієнти мають зображення вигляду (5), апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді:

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду

$$\langle x_k, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

або ж зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $X_N = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k$ вигляду

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

У випадку, коли мають місце зображення (7)–(8), похибка апроксимації Паде може бути представлена у вигляді

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_N, Y_N \right\rangle =$$

$$= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) X_N, y_N \right\rangle.$$

В [71] також показано, що подібно можна побудувати діагональні та наддіагональні поліноми Паде функції (1), а саме апроксиманти Паде функції (1) порядку $[N+M/N]$, $N \geq 0$, $M \geq 0$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N+M/N]_f(z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються із співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду

$$\langle x_{k+M+1}, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

У випадку, коли мають місце зображення (7)–(8) похибка апроксимації Паде може бути подана у вигляді

$$f(z) - [M+N/N]_f(z) = \frac{z^{2N+M+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A)x_{N+M+1}, Y_N \right\rangle .$$

Отже, задача побудови апроксимант Паде з використанням узагальнених моментних зображень зводиться до задачі побудови біортогональних поліномів. В цілій низці випадків це дозволяє не тільки побудувати, але і дослідити поведінку елементів першої піддіагоналі, діагоналі та наддіагональних послідовностей таблиці Паде ряду спеціальних функцій. Разом з тим потрібно констатувати, що задача побудови біортогональних поліномів є набагато складнішою, ніж побудова ортогональних многочленів, і не може бути вирішена в загальному випадку.

3^0. Теореми існування для узагальнених моментних зображень. В [70] В.К. Дзядиком та автором було доведено наступний результат.

Теорема 1. Нехай $\mathscr{H}$–нескінченновимірний гільбертів простір і $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ – довільна ортонормована послідовність в ньому. Тоді для того, щоб числова послідовність $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ мала в $\mathscr{H}$ узагальнене моментне зображення вигляду

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k,j = \overline{0,\infty},$$

де

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

а елементи x_k, $k = \overline{0,\infty}$, та y_j, $j = \overline{0,\infty}$, мають вигляд

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m,$$

і при цьому $\alpha_k^{(k)} \neq 0$, $k = \overline{0,\infty}$, $\beta_j^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{0,\infty}$, необхідно і достатньо, щоб всі визначники Ганкеля

$$H_N := H_{0,N} = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}, \quad N = \overline{0,\infty},$$

послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ були відмінними від 0.

Зауваження. Поскільки відмінність від нуля визначників Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ є необхідною умовою існування та невиродженості елементів першої піддіагоналі таблиці Паде функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z_k$, то тим самим теорема 1 стверджує, що узагальнені моментні зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можуть бути побудовані кожного разу, коли існують невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$. Відзначимо, що для існування представлень вигляду (3) необхідною є позитивність всіх визначників Ганкеля H_N, $N=\overline{0,\infty}$, послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Для зображень вигляду (7)–(8) справедливі наступні результати.

Теорема 2. Для будь-якої функції f, аналітичної в крузі $K_R=\{z:\ |z|\le R\}$, $0<R<\infty$, та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathscr{H}$ існують елементи $x_0,y_0\in\mathscr{H}$, та лінійний обмежений оператор $A:\mathscr{H}\mapsto\mathscr{H}$, норма якого є меншою за $1/R$, і такий, що $\forall z\in K_R$

$$f(z)=(R_z^{\#}(A)x_0,y_0).$$

Теорема 3. Для будь-якої цілої функції f, та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathscr{H}$ існують елементи $x_0,y_0\in\mathscr{H}$, та лінійний обмежений оператор $A:\mathscr{H}\mapsto\mathscr{H}$ з нульовим спектральним радіусом, такий що $\forall z\in\mathbb{C}$

$$f(z)=(R_z^{\#}(A)x_0,y_0).$$

Зауваження. Аналогічні теоремам 3–4 результати незалежно іншим способом були отримані Г.В. Радзієвським [72].

4^0. Приклади. Ми вже зазначали, що зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ у вигляді степеневих моментів деякої міри (3), або що те ж саме, зображення функції $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}s_kz^k$ у вигляді інтеграла Маркова–Стілтьєса (4) можна розглядати як частковий випадок узагальненого моментного зображення (5), (7), (8). Зауважимо, що в цьому випадку в ролі лінійного оператора (6) вибирається оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t)=t\varphi(t).$$

Розглянемо ряд прикладів, які не зводяться до вказаного випадку і тим самим дозволяють будувати та досліджувати апроксиманти Паде функцій, що не є марківськими.

Приклад 1. В просторі інтегровних на відрізку $[0,1]$ функцій $\mathscr{X}=L[0,1]$ розглянемо лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t)=\int\limits_0^t\varphi(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Його резольвентна функція має зображення

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t)=\varphi(t)+z\int\limits_0^t\varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Степені оператора A можуть бути, як легко переконатися, записані у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(\tau)d\tau, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

Візьмемо тепер $x_0(t)\equiv 1$, $y_0(t)\equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x,y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Тоді

$$s_k = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!},$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z-1}{z}.$$

Узагальнене моментне зображення має вигляд

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)!} = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(1-t)^j}{j!}dt, \quad k,j=\overline{0,\infty}.$$

Залишимо тепер $y_0(t)\equiv 1$ і візьмемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Отримаємо

$$s_k = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\tau^\nu d\tau dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k)}dt = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k+1)} =$$

$$= \frac{1}{(\nu+1)_{k+1}}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

де через $(\alpha)_k$ позначено символ Похгаммера

$$(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1) \quad \text{при} \quad k\geq 1,$$

$$(\alpha)_0 := 1.$$

Відповідна функція матиме вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\nu+1)_{k+1}} = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z},$$

де

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k k!}z^k-$$

вироджена гіпергеометрична функція. Відповідне узагальнене моментне зображення має вигляд

$$s_{k+j} = \frac{1}{(\nu+1)_{k+j+1}} = \int\limits_0^1 \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k} \cdot \frac{(1-t)^j}{j!} dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Оскільки отримані функції є цілими, то для відповідних послідовностей не може бути розв'язана класична проблема моментів (див. [65, с.253]).

Приклад 2. Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) d\tau + t\varphi(t),$$

що є лінійною комбінацією оператора, який розглядався в попередньому прикладі, та оператора множення на незалежну змінну, який відповідає класичній степеневій проблемі моментів на сегменті $[0,1]$. Його резольвентна функція має зображення

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \left((I - zA)^{-1}\varphi\right)(t) =$$

$$= \frac{\varphi(t)}{1 - zt} + \varkappa z \int\limits_0^t \varphi(t) \frac{(1 - \tau z)^{\varkappa - 1}}{(1 - tz)^{\varkappa + 1}} d\tau.$$

Розвиваючи праву частину цього зображення за степенями z, отримаємо

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa+1)_{k-1-m}}{m!(k-m-1)!} \tau^m t^{k-m-1} d\tau + t^k \varphi(t).$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y \rangle = \int\limits_0^1 x(t) y(t) dt$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A) x_0\right)(t) dt = \frac{(1-z)^{-\varkappa} - 1}{\varkappa z}.$$

Неважко переконатися, що отримана функція буде марківською лише для $|\varkappa| < 1$. При цьому узагальнене моментне зображення матиме вигляд

$$s_{k+j} = \frac{(\varkappa+1)_{k+j}}{(k+j+1)!} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(\varkappa+1)_k t^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Якщо ж вибрати $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$, і $y_0(t) \equiv 1$, то одержимо з використанням інтегральних зображень для гіпергеометричної функції Гаусса [73, с.373]

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1} {}_2F_1(\nu + \varkappa + 1, 1; \nu + 2; z).$$

Відповідне узагальнене моментне зображення матиме вигляд

$$s_{k+j} = \frac{(\nu+\varkappa+1)_{k+j}}{(\nu+1)_{k+j+1}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(\varkappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k} t^{k+\nu} \cdot \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 1 та 2 були побудовані в [74].

Приклад 3. Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = -\int_0^t (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Легко побачити, що цей оператор є взятим зі знаком мінус квадратом оператора (9). Враховуючи тотожність

$$R_z^\#(-A^2) = R_{i\sqrt{z}}^\#(A) R_{-i\sqrt{z}}^\#(A),$$

знайдемо його резольвентну функцію

$$\left(R_z^\#(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) - \sqrt{z} \int_0^t \varphi(\tau) \sin\sqrt{z}(t-\tau)d\tau.$$

Неважко підрахувати, що

$$(A^k\varphi)(t) = (-1)^k \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2k-1}}{(2k-1)!} \varphi(\tau)d\tau.$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 \left(R_z^\#(A)x_0\right)(t)dt = \int_0^1 \left\{ 1 - \sqrt{z}\int_0^t \sin\sqrt{z}(t-\tau)d\tau \right\} dt = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) = (1-t^2)^{\nu-1/2}$, $\nu > -1/2$. Отримаємо

$$f(z) = \int_0^1 \cos\sqrt{z}t \cdot (1-t^2)^{\nu-1/2} dt = \frac{J_\nu(\sqrt{z})\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{2(\sqrt{z}/2)^\nu},$$

де

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

– функція Бесселя порядку ν (див. [73, с. 180–182]).

Візьмемо в ролі початкових елементів $x_0(t) = t$, $y_0(t) = 1/t \in \mathscr{Y} = C(0,1] \cap L([0,1], tdt)$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}t} dt = \frac{\mathrm{Si}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

де

$$\mathrm{Si}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

– інтегральний синус (див. [73, с.59]).

Нарешті виберемо $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \in \mathscr{Y} = C(0,1] \cap L[0,1]$. Отримаємо

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\cos\sqrt{z}t}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^1 \cos\sqrt{z}t^2 dt = \sqrt{2\pi}\frac{C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{1/4}\right)}{z^{1/4}},$$

де

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k}}{(2k)!(4k+1)} z^{4k+1}$$

– інтеграл Френеля (див. [73, с. 123]).

Приклад 4. Подальшим узагальненням ситуацій, наведених в прикладі 1 є розгляд в просторі $L[0,1]$ лінійного неперервного оператора дробового інтегрування:

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{1/\rho-1}}{\Gamma(1/\rho)} \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Степені цього оператора можуть бути записані у вигляді:

$$(A^k\varphi)(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k/\rho-1}}{\Gamma(k/\rho)} \varphi(\tau) d\tau, \quad k \geq 1,$$

звідки маємо:

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (A^k\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{k/\rho-1} z^k}{\Gamma(k/\rho)} \varphi(\tau) d\tau =$$

$$= \varphi(t) + z \int_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{1/\rho-1} E_\rho(z(t-\tau)^{1/\rho}; 1/\rho) d\tau,$$

де

$$E_\rho(z;\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\mu)}$$

– функція типу Міттаг–Леффлера (див. [75, с.117]). Легко побачити, що при $x_0(t) = \dfrac{t^{\nu_1}}{\Gamma(\nu_1+1)}$, $y_0(t) = \dfrac{x(t)(1-t)^{\nu_2}}{\Gamma(\nu_2+1)} \in \mathscr{Y} = C[0,1) \cap L[0,1]$ ми отримаємо:

$$s_k = \langle x_k, y_0 \rangle = \int_0^1 x_k(t) y_0(t) dt = \frac{1}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + \nu_2 + 2)}$$

і отож:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = E_\rho(z; \nu_1 + \nu_2 + 2).$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення функцій Міттаг–Леффлера були побудовані та вивчені в [76]. Поширення цих результатів на функції типу Міттаг-Леффлера було виконано М. Чипом [77].

Приклад 5. Ситуацію, наведену в прикладі 1, можна узагальнити ще й наступним чином. Розглянемо у просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ для деякого $q \in (0,+\infty)$, $q \neq 1$, лінійний обмежений оператор:

$$(A\varphi)(t) = \int_0^{t^q} \varphi(\tau) d\tau.$$

Степені цього оператора можуть бути зображені у вигляді:

$$(A^k\varphi)(t) = \int_0^{t^{q^k}} \varphi(u) \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m-1)_q!} t^{(k-m)_q - 1} u^{m_q q^{-m}} du, \quad k = \overline{1,\infty},$$

де

$$k_q := 1 + q + \cdots + q^{k-1} = \frac{q^k - 1}{q-1},$$

$$k_q! := \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k} i_q = (1+q)(1+q+q^2)\cdot\ldots\cdot(1+q+\cdots+q^{k-1}), & \text{при} \quad k \geq 1, \\ 1, & \text{при} \quad k = 0. \end{cases}$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t^{(k+1)_q - 1}}{k_q!}.$$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!} t^{m_q q^{-m}}.$$

Нарешті підрахуємо узагальнені моменти

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^{(k+1)_q-1}}{k_q!}dt = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Таким чином ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)_q!} = \frac{E_q(z) - 1}{z}, \tag{10}$$

де q –аналог експоненти $E_q(z)$ визначається рядом (див.[78])

$$E_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k_q!}.$$

Залишаючи $y_0(t) \equiv 1$, виберемо тепер $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k}}{\prod\limits_{m=1}^{k} (m_q + \nu q^{m-1})}.$$

Відповідні узагальнені моменти будуть мати вигляд

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Твірну функцію цієї послідовності можна зобразити у вигляді:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(1+\nu)(1+q+\nu q)\cdot\ldots\cdot(1+q+\ldots+q^k+\nu q^k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{q})^{k(k+1)/2}(\frac{q-1}{\nu(q-1)+q})^{k+1} z^k}{(\frac{1}{\nu(q-1)+1}; \frac{1}{q})_{k+1}},$$

де $q-$символ Похгаммера $(a;q)_k$ визначається формулою (див.[79, с.31])

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)(1-aq)\cdot \ldots \cdot (1-aq^{k-1}), & \text{при} \quad k \geq 1, \\ 1, & \text{при} \quad k=0. \end{cases}$$

Приклад 6. Розглянемо тепер у просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ для деякого $q \in (0,\infty)$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int_0^{t^q} \varphi(\tau)d\tau + t^q \varphi(t^q). \tag{11}$$

Його степені можуть бути зображені у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int_0^{t^{q^k}} \varphi(\tau) \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m t^{(k-m)_q - 1} \tau^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varphi q^p - p_q)}{m_q!(k-1-m)_q! q^m} d\tau + t^{(k+1)_q - 1} \varphi(t^{q^k}), \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Нескладно отримати тепер зображення для оператора, спряженого до оператора (11) відносно білінійної форми $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ та його степенів

$$(A^*\psi)(t) = \varkappa \int_{t^{1/q}}^{1} \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{q}\psi(t^{1/q})t^{1/q},$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \int_{t^{1/q^j}}^{1} \psi(\tau) \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \tau^{(j-m)_q - 1} t^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-1-m)_q! q^m} d\tau + \frac{1}{q^j}\psi(t^{1/q^j}) t^{j_q q^{-j}}, \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$. Тоді отримаємо:

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{\prod\limits_{r=1}^{k} (\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1}.$$

Подібно з $y_0(t) \equiv 1$ отримаємо

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j}(-1)^m \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m}(\varkappa + r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q!q^m} t^{m_q q^{-m}}.$$

Обчислимо узагальнені моменти

$$\dot{s_k} = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1}dt = \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{45}$$

Для $|q| < 1$ маємо (див. [79, с.32])

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!} z^k = \frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(1-zq^k)}{(1-(\varkappa(1-q)+1)zq^k)} - 1}{\varkappa z}.$$

Для $|q| > 1$ буде

$$f(z) = \frac{1}{\varkappa z}\left\{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varkappa(1-q)+1; \frac{1}{q})_k}{(\frac{1}{q}; \frac{1}{q})_k}\left(\frac{z}{q}\right)^k\right\} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(1-(\varkappa(1-q)+1)zq^{-k-1})}{(1-zq^{-k-1})} - 1}{\varkappa z}.$$

Залишаючи $y_0(t) \equiv 1$, виберемо тепер $x_0(t) = t^{\nu}$, $\nu > -1$. Отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \prod_{m=1}^{k} \frac{m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{(m_q + \nu q^{m-1})} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k}.$$

Відповідні узагальнені моменти мають вигляд

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \int\limits_0^1 \prod_{m=1}^{k} \frac{(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{(m_q + \nu q^{m-1})} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k} dt =$$

$$= \frac{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(m_q + \nu q^{m-1})}, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 5,6 були побудовані в [70, 80].

Приклад 7. Функції, які розглядалися в прикладах 5 та 6, тісно пов'язані з так званими базисними гіпергеометричними рядами.

Означення 9 (див.[81, с.196]). Базисним гіпергеометричним рядом для деякого q, $|q| < 1$, називається степеневий ряд вигляду:

$$ {}_r\Phi_s \left[\begin{array}{cc} \alpha_1, & \alpha_2, \dots, \alpha_r; z \\ & \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1; q)_k (\alpha_2; q)_k \cdot \ldots \cdot (\alpha_r; q)_k}{(q; q)_k (\rho_1; q)_k \cdot \ldots \cdot (\rho_s; q)_k} z^k. $$

Інший підхід до побудови узагальнених моментних зображень базисних гіпергеометричних рядів грунтується на понятті q-інтеграла Ф. Джексона.

Означення 10 ([82]). Для деякого фіксованого q, $|q| < 1$, q-інтеграл від заданої на відрізку $[0, 1]$ функції $\varphi(x)$ визначається за формулою:

$$ \Phi(x) = \int_0^x \varphi(u) d_q u = x(1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(xq^k) q^k, \tag{12} $$

де $x \in [0, 1]$, якщо тільки ряд в правій частині (12) збігається.

Оберненим оператором до оператора q-інтегрування (12) є оператор q-диференціювання.

Означення 11 ([83]). Для деякого фіксованого q, $|q| < 1$, q – похідна заданої на відрізку $[0, 1]$ функції $\Phi(x)$ визначається за формулою:

$$ \frac{d_q}{d_q x} \Phi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(qx)}{(1 - q)x}. $$

Очевидно, що у випадку існування q-інтеграла (12) справедлива тотожність

$$ \frac{d_q}{d_q x} \int_0^x \varphi(u) d_q u \equiv \varphi(u). $$

Розглянемо тепер у просторі $\mathscr{X} = L[0, 1] \cap C(0, 1]$ лінійний неперервний оператор:

$$ (A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k. \tag{13} $$

Підрахуємо його резольвентну функцію

$$ \left(R_z^{\#}(A)\psi \right)(t) = \varphi(t) = \psi(t) + z \int_0^t \psi(\tau) \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 - (1 - q) z \tau q^{m+1}}{1 - (1 - q) z t q^m} d_q \tau. $$

Степені оператора (13) можуть бути зображені у вигляді

$$ (A^k \varphi)(t) = (1 - q)^{k-1} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\prod\limits_{m=1}^{k-1} (t - \tau q^m)}{(q; q)_{k-1}} d_q \tau, \quad k = \overline{1, \infty}. $$

Нехай $\mathscr{Y} = C[0,1]$. Степені оператора, спряженого до оператора (13) по відношенню до білінійної форми

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)d_qt,$$

можуть бути зображені у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = (1-q)^{j-1}\int\limits_{qt}^1 \psi(\tau)\frac{\prod\limits_{m=1}^{j-1}(\tau - tq^m)}{(q;q)_{j-1}}d_q\tau, \quad j=\overline{1,\infty}.$$

Візьмемо тепер $x_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}t^k.$$

Подібно, вибираючи $y_0(t) \equiv 1$, отримаємо

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{(1-q)^j(tq;q)_j}{(q;q)_j}, \quad j=\overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти будуть рівні

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)d_qt = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^{kn+n} =$$

$$= \frac{(1-q)^{k+1}}{(q;q)_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Отже, ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції (10) при $|q|<1$. Залишаючи $y_0(t)$ тим же самим, візьмемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = (1-q)^k t^{k+\nu}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{k+n+\nu+1})}{1-q^{n+\nu+1})} = \frac{(1-q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k}t^{k+\nu}.$$

Підрахуємо узагальнені моменти

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)d_qt = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_k}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(k+\nu+1)} = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Відповідна функція має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^{k+1}z^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}} = \frac{{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ & q^{\nu+1}\end{matrix}\right] - 1}{z}.$$

Приклад 8. Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1] \cap C(0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q\tau + t\varphi(t). \tag{14}$$

Його резольвентна функція

$$\left(R_z^{\#}(A)\psi\right)(t) = \frac{\psi(t)}{1-zt} + \varkappa z \int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)\sigma(zt)}{(1-z\tau)\left(1-z\tau(1+\varkappa-\varkappa q)\right)\sigma(z\tau)} d_q\tau.$$

Отримаємо вирази для степенів оператора (14)

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-1-n}} \times$$

$$\times \left(t(1+\varkappa-\varkappa q)\right)^n \tau^{k-1-n} d_q\tau + t^k\varphi(t), \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Степені спряженого оператора відносно білінійної форми $\langle x,y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)d_qt$ можна записати у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = \varkappa \int\limits_{qt}^1 \psi(\tau) \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} \times$$

$$\times \left(\tau(1+\varkappa-\varkappa q)\right)^n t^{j-1-n} d_q\tau + t^j\psi(t), \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Візьмемо $x_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q;q)_k} (1+\varkappa-\varkappa q)^k t^k, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Подібно, вибираючи $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, отримаємо:

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \sum_{n=0}^{j} \frac{(\frac{1}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n t^{j-n}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t) d_qt = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q;q)_k} \times$$

$$\times (1+\varkappa-\varkappa q)^k q^{kn+n} = \frac{(1-q)(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q;q)_{k+1}} =$$

$$= \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k(1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^2;q)_k}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Отже, побудовано узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k = {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & \frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^2 & \end{matrix}\right].$$

Візьмемо тепер $x_0(t)=t^\nu$, $\nu>-1$. Тоді:

$$x_k(t)=\frac{(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q^{\nu+1};q)_k}(1+\varkappa-\varkappa q)^kt^{k+\nu}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Залишаючи $y_j(t)$, $j=\overline{0,\infty}$, тими ж самими, отримаємо

$$s_k=\int_0^1 x_k(t)d_qt=(1-q)\frac{(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k(1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

і відповідна функція матиме вигляд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=\frac{1-q}{1-q^{\nu+1}}\ {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix}\right].$$

Зауваження. Узагальнені моментні зображення, наведені в прикладах 7, 8, побудовані в [84].

Приклад 9 ([85]). Розглянемо в просторі $\mathscr{X}=L[0,1]$ лінійний неперервний оператор:

$$(A\varphi)(t)=t\varphi(1-t).$$

Легко побачити, що його квадрат можна зобразити у вигляді

$$(A^2\varphi)(t)=t(1-t)\varphi(t).$$

Резольвентна функція оператора A^2 має вигляд

$$\left(R_z^{\#}(A^2)\varphi\right)(t)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k(A^{2k}\varphi)(t)=\frac{\varphi(t)}{1-zt(1-t)}. \tag{15}$$

Оскільки має місце тотожність

$$R_z^{\#}(A^2)=R_{-\sqrt{z}}^{\#}(A)R_{\sqrt{z}}^{\#}(A),$$

то, очевидно,

$$R_{\sqrt{z}}^{\#}(A)=(I+\sqrt{z}A)R_z^{\#}(A^2).$$

Отож, з (15) маємо

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t) + zt\varphi(1-t)}{1 - z^2 t(1-t)}.$$

Степені оператора A та спряженого до нього по відношенню до скалярного добутку $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$ оператора A^* мають зображення:

$$(A^k\varphi)(t) = \begin{cases} t^m(1-t)^m\varphi(t), & \text{якщо} \quad k = 2m - \text{ парне}, \\ t^{m+1}(1-t)^m\varphi(t), & \text{якщо} \quad k = 2m+1 - \text{ непарне}; \end{cases}$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n\psi(t), & \text{якщо} \quad j = 2n - \text{ парне}, \\ t^n(1-t)^{n+1}\psi(t), & \text{якщо} \quad j = 2n+1 - \text{ непарне}. \end{cases}$$

Візьмемо $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$. Тоді:

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^t \frac{1+zt}{1 - z^2 t(1-t)}dt =$$

$$= \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}.$$

Візьмемо тепер при тому ж $y_0(t)$

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & , t \in [0, 1/2], \\ \varphi(1-t), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ – деяка функція з $L[0, 1/2]$. Тоді

$$f(z) = 2\int\limits_0^{1/2} \frac{1+zt}{1 - z^2 t(1-t)}\varphi(t)dt.$$

Приклад 10 ([85]). Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = C[0, 1]$ лінійний обмежений оператор:

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^{1-t} \varphi(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Його квадрат може бути зображений у вигляді:

$$(A^2\varphi)(t) = (1-t)\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_t^1 \varphi(\tau)(1-\tau)d\tau.$$

Візьмемо $x_0(t) \equiv 1$ і знайдемо резольвентну функцію оператора A^2

$$\left(R_z^{\#}(A^2)x_0\right)(t) = \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}.$$

Вибираючи $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$, будуємо функцію

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A^2)x_0\right)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}dt = \frac{\mathrm{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \tag{17}$$

Враховуючи розвинення:

$$\frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}} = \cos\sqrt{z}t\cdot\sec\sqrt{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k t^{2k}}{(2k)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{E_m z^m}{(2m)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!},$$

де E_k – числа Ейлера , що визначаються формулами (див. [73, с.607])

$$E_k = \frac{2^{2k+2}(2k)!}{\pi^{2k+1}}\left\{1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots\right\}, \tag{18}$$

ми отримуємо

$$x_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{19}$$

А оскільки оператор (16), як легко переконатись, є самоспряженим по відношенню до білінійної форми $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$, то отримаємо також

$$y_{2j}(t) = x_{2j}(t) = \sum_{m=0}^{j}\frac{(-1)^m t^{2m}E_{j-m}}{(2m)!(2j-2m)!}, \quad j = \overline{0,\infty}. \tag{20}$$

Приклад 11 ([85]). В попередньому прикладі ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції (17), грунтуючись на застосуванні квадрата оператора (16). Тепер будемо застосовувати безпосередньо сам оператор (16). Для $x_0(t) \equiv 1$ отримаємо

$$\left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t) = \{(I + zA)R_{z^2}^{\#}(A^2)x_0\}(t) =$$

$$= \frac{\cos zt}{\cos z} + z\int\limits_0^{1-t}\frac{\cos z\tau}{\cos z}d\tau = \frac{\cos zt + \sin z(1-t)}{\cos z}.$$

Вибираючи $y_0(t) \equiv 1$, матимемо функцію

$$f(z) = \int\limits_0^t \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{\cos zt + \sin z(1-t)}{\cos z}dt = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z\cos z}.$$

Для побудови відповідного узагальненого моментного зображення залишилось записати послідовності $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$. Для парних показників ми вже маємо формули (19)–(20). З цих же формул легко отримати і формули для непарних показників

$$x_{2k+1}(t) = (Ax_{2k})(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{k-m}}{(2m+1)!(2k-2m)!}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$y_{2j+1}(t) = x_{2j+1}(t) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{j-m}}{(2m+1)!(2j-2m)!}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Приклад 12 ([86]). Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = C[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}\right),\ 0 < \gamma < \infty,\ \gamma \neq 1.$$

Оскільки дробово-лінійне відображення

$$\sigma(t) = \frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}$$

при кожному $0 < \gamma < \infty$, $\gamma \neq 1$, є диффеоморфізмом відрізка $[0,1]$ на себе, то визначений таким зображенням оператор A дійсно відображає простір $C[0,1]$ в $C[0,1]$. Неважко підрахувати, що

$$(A^k\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-\gamma^k)t+\gamma^k}\right),\ k = \overline{0,\infty}.$$

Візьмемо

$$x_0(t) = \frac{t}{(1-\delta)t+\delta},\ 0 < \delta < \infty,\ \delta \neq 1.$$

Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t+\delta\gamma^k},\ k = \overline{0,\infty}.$$

Візьмемо тепер $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^*$ і $\langle x, y\rangle = y(x)$. Розглянемо лінійний неперервний функціонал на $C[0,1]$

$$y_0(x) = x(t_0),$$

де $t_0 \in (0,1)$. Тоді отримаємо

$$s_k = \langle x_k, y_0\rangle = l_0(x_k) = x_k(t_0) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)t_0+\delta\gamma^k},\ k = \overline{0,\infty}.$$

Неважко переконатись, що, якщо позначити

$$t_j := \frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0+\gamma^j},\ j = \overline{0,\infty},$$

і визначити лінійні неперервні функціонали

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j}\right),\ j = \overline{0,\infty},$$

то ми отримаємо узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = y_j(x_k),\ k, j = \overline{0,\infty},$$

послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Розглянемо тепер білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt,$$

на добутку просторів $\mathscr{X} = C[0,1]$ та $\mathscr{Y} = C[0,1]$. Покладемо $y_0(t) \equiv 1$. Тоді матимемо

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}dt =$$

$$= \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2},\ k = \overline{0,\infty}.$$

Неважко підрахувати, що

$$(A^*\psi)(t) = \frac{\gamma}{(1-(1-\gamma)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma t}{1-(1-\gamma)t}\right).$$

Степені спряженого оператора матимуть зображення

$$(A^{*j}\psi)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma^j t}{1-(1-\gamma^j)t}\right),\ j = \overline{0,\infty},$$

і, отже,

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2},\ j = \overline{0,\infty}.$$

Приклад 13. В гільбертовому просторі $\mathscr{X} = L_2(-\infty,\infty)$ розглянемо лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi(t+\lambda),\ 0 < \lambda < \infty.$$

Як легко переконатися, степені цього оператора та спряженого до нього оператора A^* мають зображення

$$(A^k\varphi)(t) = \varphi(t + k\lambda),\ k = \overline{0,\infty},$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \psi(t - j\lambda),\ j = \overline{0,\infty}.$$

Візьмемо тепер

$$x_0(t) = \exp\{-\alpha(t+\gamma)^2\},\ 0 < \alpha < \infty,\ -\infty < \gamma < \infty,$$

$$y_0(t) = \exp\{-\beta t^2\},\ 0 < \beta < \infty.$$

Тоді отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \exp\{-\alpha(t + k\lambda + \gamma)^2\},\ k = \overline{0,\infty},$$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \exp\{-\beta(t - j\lambda)^2\},\ j = \overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_k(t) y_0(t) dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha(t + k\lambda + \gamma)^2 - \beta t^2\} dt =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma + k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\},\ k = \overline{0,\infty}.$$

5^0. Біортогональні поліноми та їх властивості. Як вже зазначалося в п.2^0, задача побудови апроксимант Паде функцій, для коефіцієнтів степеневих розкладів яких відомі узагальнені моментні зображення, зводиться до біортогоналізації певних систем функцій. Розглянемо деякі загальні властивості біортогональних поліномів. Зазначимо, що відповідні питання вивчалися рядом дослідників (див., наприклад, [87, 88]). В.К. Дзядиком [89] було встановлено наступний результат.

Теорема 4. Нехай $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ – така числова послідовність, що всі її визначники Ганкеля

$$H_N = H_{0,N} = \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}$$

відмінні від нуля, і нехай в лінійному просторі $\mathscr{X}$ задана послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а в лінійному просторі $\mathscr{Y}$ – послідовність $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$, і при цьому справедливі рівності

$$\langle x_k, y_j \rangle = s_{k+j}, \quad k, j = \overline{0,\infty},$$

де $\langle .,. \rangle$ - білінійна форма, задана на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тоді, якщо при кожному $N = \overline{0,\infty}$ побудувати узагальнені поліноми

$$X_0 = \varepsilon_0 x_0, \quad X_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1,\infty}, \tag{21}$$

та

$$Y_0 = \varepsilon_0 y_0, \quad Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1,\infty}, \qquad (22)$$

де $\varepsilon_N := \frac{1}{\sqrt{H_N H_{N-1}}}$, $N = \overline{0,\infty}$, $H_{-1} := 1$, то будуть виконуватися співвідношення біортогональності

$$\langle X_M, Y_N \rangle = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0,\infty}.$$

Побудуємо для описаних вище систем біортогональних поліномів тричленні рекурентні співвідношення при додаткових обмеженнях, пов'язаних з узагальненими моментними зображеннями.

Теорема 5. [90] Нехай за умов теореми 3 в просторі $\mathscr{X}$ існує лінійний обмежений оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

а в просторі $\mathscr{Y}$ оператор A^*, спряжений до оператора A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$. Тоді для біортогональних поліномів (21), (22) справедливі наступні рекурентні співвідношення

$$AX_N = \alpha_N X_{N+1} + \gamma_N X_N + \alpha_{N-1} X_{N-1}, \quad N = \overline{0,\infty},$$

$$A^* Y_N = \alpha_N Y_{N+1} + \gamma_N Y_N + \alpha_{N-1} Y_{N-1}, \quad N = \overline{0,\infty},$$

де $\alpha_N = \frac{\sqrt{H_{N-1} H_{N+1}}}{H_N}$, $\quad N = \overline{0,\infty}, \quad \alpha_{-1} := 0,$

$$\gamma_N = \frac{\tilde{H}_N}{H_N} + \frac{\tilde{H}_{N-1}}{H_{N-1}},$$

а

$$\tilde{H}_N := \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ s_{N+1} & s_{N+2} & \cdots & s_{2N+1} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. В дещо більш вузькому формулюванні подібний результат наведено в [1, с.358] (див. також [91]).

При застосуванні систем біортогональних поліномів до раціональної апроксимації одним з найважливіших є питання знаходження критеріїв невиродженої біортогоналізованості більш ефективних, ніж відмінність від нуля визначників Ганкеля. Перш ніж зформулювати відповідний результат, наведемо наступне означення.

Означення 12 (див. [92, с.18]). Система заданих на деякій множині $\mathfrak{M}$ метричного простору, що містить принаймні $N+1$ точку, неперервних функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^{N}$, називається чебишовською на цій множині, якщо будь–який узагальнений поліном

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k(t),$$

коефіцієнти якого $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, не дорівнюють нулю одночасно, має на $\mathfrak{M}$ не більше N різних коренів.

Теорема 6. ([76]). Нехай $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ – деякі послідовності неперервних на $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, функцій, а $\mu(t)$ – неспадна функція що має нескінченну кількість точок зростання. Тоді для того, щоб $\forall M, N = \overline{0, \infty}$ існували поліноми вигляду

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} x_k(t)$$

та

$$Y_M(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j(t)$$

з відмінними від нуля старшими коефіцієнтами $c_N^{(N)} \neq 0$, $N = \overline{0, \infty}$, для яких виконуються співвідношення біортогональності

$$\int\limits_a^b X_M(t) Y_N(t) d\mu(t) = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0, \infty},$$

достатньо, щоб $\forall M, N = \overline{0, \infty}$ системи функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^{M}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{N}$ були чебишовськими на (a, b).

Перейдемо тепер до встановлення деяких властивостей інваріантності біортогональних поліномів.

Теорема 7 ([93]). Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що при деякому фіксованому $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякому фіксованому $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність нетривіальних узагальнених поліномів вигляду

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0 = P_N(A) x_0, \quad N = \overline{0, \infty},$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle X_N, y_j \rangle = \left\langle X_N, A^{*j} y_0 \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

де $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ - оператор, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$. Тоді для кожного $N = \overline{0,\infty}$ нетривіальний поліном $\tilde{X}_N$ вигляду

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} A^k x_0,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

де $\tilde{y}_j = A^{*j} \tilde{y}_0$, $j = \overline{0,\infty}$, а

$$\tilde{y}_0 = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A^*) y_0, \tag{23}$$

може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k,$$

де коефіцієнти γ_k, $k = \overline{N, M+N}$, визначаються з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(n)} \left(-\frac{1}{\beta_m} \right) = 0, \quad n = \overline{0, \rho_m - 1}, \quad m = \overline{1, M^*},$$

де M^* – кількість різних між собою чисел β_m, а ρ_m – кратність числа β_m, $m = \overline{1, M^*}$, в зображенні (23).

Теорема 8 ([94]). Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що при деякому фіксованому $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякому фіксованому $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність узагальнених поліномів вигляду

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} A^{*j} y_0, \quad N = \overline{0,\infty},$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle x_k, Y_N \rangle = \left\langle A^k x_0, Y_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ - оператор, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$. Тоді для кожного $N \geq M+1$, $M > 0$, нетривіальний поліном $\tilde{Y}_N$ вигляду

$$\tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де $\tilde{x}_k = A^k \tilde{x}_0$, $k = \overline{0, \infty}$, а $\tilde{x}_0$ є розв'язком операторного рівняння

$$\prod_{m=1}^{M^*} (1 - \beta_m A)^{\rho_m} \tilde{x}_0 = x_0,$$

де числа $\beta_m, = \overline{1, M^*}$, різні між собою, а $\sum_{m=1}^{M^*} \rho_m = M$, може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{Y}_N = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \ldots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \ldots & \varepsilon_N^{(r_1-1)}(\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \ldots & \varepsilon_N^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \ldots & Y_N \end{Vmatrix},$$

де

$$\varepsilon_k(z) = \frac{f(z) Q_k(z) - P_{k-1}(z)}{z^k},$$

а

$$[k-1/k]_f(z) = \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)}$$

апроксиманти Паде функції $f(z) = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \right\rangle$ порядків $[k-1/k]$, $k \geq 1$.

Теорема 9 ([95]). Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний неперервний оператор $A: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що для деякого фіксованого $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякого фіксованого $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність нетривіальних узагальнених поліномів вигляду

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0,$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle X_N, y_j \rangle = \left\langle X_N, A^{*j} y_0 \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Тоді для кожного $N = \overline{1, \infty}$ нетривіальний поліном $\tilde{X}_N$ вигляду

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{A}^k x_0,$$

де
$$\tilde{A}x = Ax + \langle x, \lambda_{00}y_0 + \lambda_{01}y_1\rangle x_0 + \langle x, \lambda_{10}y_0 + \lambda_{11}y_1\rangle x_1,$$
який задовольняє умови біортогональності
$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = \left\langle \tilde{X}_N, \tilde{A}^{*j} y_0 \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$
якщо тільки $1+\lambda_{10}s_0+\lambda_{11}s_1 \neq 0$, може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді
$$\tilde{X}_N = X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \tilde{x}_k - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m \sum_{k=m+1}^{N} c_k^{(N)} \times$$
$$\times \left\{ (\lambda_{00} + \delta s_1) s_{k-m-1} + (\lambda_{01} + \lambda_{10} + \delta s_0) s_{k-m} + \lambda_{11} s_{k-m+1} \right\} +$$
$$+ x_0 \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\lambda_{10} s_k + \lambda_{11} s_{k+1}), \tag{24}$$
де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$, а $s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle$, $k = \overline{0, \infty}$. При цьому, якщо $N \geq 2$, то остання сума в (24) дорівнює нулю.

6^0. Властивості інваріантності апроксимацій Паде. Незважаючи на те, що апроксиманти Паде є суттєво нелінійним апаратом наближення функцій, рядом дослідників було встановлено, що при деяких перетвореннях наближуваної функції вони зберігають свій вигляд та властивості (див. [1, с.42-45]). На основі підходу, основаного на застосуванні узагальнених моментних представлень можна пов'язати властивості інваріантності апроксимант Паде з властивостями інваріантності біортогональних поліномів і певним чином узагальнити існуючі результати.

Теорема 10. Нехай для функції
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$
існує та є невиродженою апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,
$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$
Тоді для функції
$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+\lambda z} f\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right)$$
також існує та є невиродженю її апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, і при цьому
$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{Q}_N(z) = (1+\lambda z)^N Q_N\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right),$$

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = (1+\lambda z)^{N-1} P_{N-1}\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right),$$

Зауваження. Твердження теореми 10 еквівалентне твердженню теореми Бейкера, Гаммеля та Уіллса про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях аргументу, наведеної в [1, с.42-43].

Теорема 11 ([95]). Нехай для функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існує апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \left\{((1+\lambda_{11}s_1)z - \lambda_{11}s_0)\, f(z) + \lambda_{11}s_0^2\right\} \left\{\left(((\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_1 - \lambda_{00})\, z^2 + \right.\right.$$
$$+ \left((\lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10})s_0 - \lambda_{01} - \lambda_{10}\right) z - \lambda_{11}\Big)\, f(z) +$$
$$\left. + \left((1 + (\lambda_{10}+\lambda_{01})s_0 + (\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_0^2 + \lambda_{11}s_1)z + \lambda_{11}s_0\right)\right\}^{-1},$$

де λ_{00}, λ_{01}, λ_{10}, λ_{11} – деякі константи такі, що $1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1 \neq 0$, також існує апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$ і при цьому її знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ з точністю до сталого множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = Q_N(z)\left\{1 + (\lambda_{01}+\lambda_{10})s_0 + \lambda_{11}s_0\frac{1}{z} + \lambda_{11}s_1 - \delta s_0^2\right\} -$$
$$-P_{N-1}(z)\left\{\lambda_{00}z + \delta s_1 z + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \frac{\lambda_{11}}{z} - \delta s_0\right\},$$

де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$.

Зауваження. З теореми 11 можна вивести, як частинний випадок, теорему про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях функцій, наведену в [1, с.44].

Теорема 12. ([93]). Нехай для деякої функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують її апроксиманти Паде порядків $[N+m-1/N+m]$, $m=\overline{1,M}$, і нехай

$$\Psi_M(t)=\prod_{m=1}^{M^*}(1+\beta_m t)^{r_m}=\sum_{m=0}^{M}\alpha_m t^m$$

– деякий алгебраїчний многочлен степені M. Тоді знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ апроксиманти Паде порядку $[N-1/N]$ функції

$$\tilde{f}(z)=\sum_{m=0}^{M}\alpha_m\frac{f(z)-\sum\limits_{j=0}^{m-1}s_j z^j}{z^m}$$

з точністю до сталого множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z)=\frac{1}{z^M\Psi_M(\frac{1}{z})}\det U_M(z),$$

де матриця $U_M(z)=\|u_{k,j}\|_{k,j=1}^{M}$ складена з елементів

$$u_{k,j}=\frac{d^p}{dw^p}\{w^j Q_{N+j}(w)\}\bigg|_{w=-\beta_m},$$

$k=\overline{1,M-1}$, $j=\overline{1,M}$, $m=\max\left\{l:\ \sum\limits_{n=1}^{l-1}r_n\le k\right\}$, $p=k-\sum\limits_{n=1}^{m}r_n$,
$u_{M,j}=z^jQ_{N+j}(z)$, $j=\overline{1,M}$, а $Q_{N+j}(z)$, $j=\overline{1,M}$, – знаменники апроксимант Паде функції $f(z)$ порядків $[N+j-1/N+j]$.

Теорема 13. ([94]) Нехай для функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k z^k$$

існують та невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$ та $[N-2/N-1]$, $N\ge 2$,

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

$$[N-2/N-1]_f(z)=\frac{P_{N-2}(z)}{Q_{N-1}(z)}.$$

І нехай в деякій точці $\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\varepsilon_{N-1}(\beta)=\frac{f(\beta)Q_{N-1}(\beta)-P_{N-2}(\beta)}{\beta^{N-1}}\ne 0.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z)=\frac{zf(z)-\beta f(\beta)}{z-\beta}$$

існує та невироджена апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$. При цьому

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) Q_N(z) - z P_{N-1}(z)\right\} -$$

$$-\frac{z\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) Q_{N-1}(z) - z P_{N-2}(z)\right\},$$

$$\tilde{Q}_N(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta) Q_N(z) - z\varepsilon_N(\beta) Q_{N-1}(z).$$

7^0. Побудова та властивості апроксимацій Паде спеціальних функцій. За допомогою узагальнених моментних зображень, побудованих в прикладі 1, можна встановити наступні результати.

Теорема 14. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (k+N)! z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = 2(-1)^N \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \binom{N}{2m+1} (2N-2m-1)! z^{2m}.$$

Апроксиманти Паде експоненти були побудовані ще Ш. Ермітом [38] і надалі вивчалися цілим рядом дослідників. В.К. Дзядиком та Л.І. Філозофом [67] для побудови цих апроксимант було використано апроксимаційний метод наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, який став однією з відправних точок створення методу узагальнених моментних представлень.

Теорема 15. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z) - 1}{z},\ \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (\nu+1)_{N+k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N} z^k \sum_{m=0}^{k} \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\nu+1)_{k-m+1}}.$$

Апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції були побудовані Г.ван Россумом [96]. Побудова цих апроксимант з використанням узагальнених моментних зображень здійснена в [74, 97].

Теорема 16 ([98]).Нехай функція $\varphi_0(t) \in C[0,1]$ є такою, що для будь-якого алгебраїчного многочлена $p(t)$, $\deg p(t) \leq N$, узагальнений поліном

$$A_N(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t p(t-\tau)\varphi_0(\tau) d\tau$$

має не більше, ніж N коренів на $(0,1)$. Тоді для аналітичної функції

$$f(z) = \int\limits_0^1 \varphi_0(t) e^{z(1-t)} dt,$$

її апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують і збігаються до $f(z)$ рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

З теореми 16, зокрема випливає збіжність діагональних апроксимант Паде експоненти e^z та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$, $\nu > -1$.

В прикладі 2 нами було побудоване узагальнене моментне зображення для гіпергеометричної функції Гаусса.

Теорема 17. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1} {}_2F_1(\varkappa+\nu+1, 1; \nu+2; z), \ \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = (\varkappa+\nu) \sum_{k=1}^{N-1} z^k \sum_{m=0}^{k} (-1)^{N-m} \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\varkappa+\nu+k-m)_{N-k+1}}.$$

Апроксиманти Паде гіпергеометричної функції Гаусса були побудовані А. Паде [5]. Асимптотичне поводження похибки апроксимації була досліджена Ю. Люком [99, 100]. Відповідні результати з використанням узагальнених моментних зображень були отримані [74, 97].

В прикладі 4 нами було побудоване узагальнене моментне зображення для послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції типу Міттаг-Леффлера

$$f(z) = E_\rho(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\nu)}$$

при $\nu > 0$, $0 < \rho < \infty$.

Теорема 18 ([76, 98]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = E_\rho(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\nu\right)},$$

$\nu > 0$, $0 < \rho \leq 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, збігаються до f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Зауваження. Збіжність рядків таблиці Паде для функції Міттаг-Леффлера доведена в [101].

В прикладі 5 ми побудували узагальнене моментне зображення для послідовності коефіцієнтів степеневого розвинення функції

$$f(z) = \frac{E_q(z)-1}{z},$$

де $E_q(z)$ - q-аналог експоненти. Щоб побудувати апроксиманти Паде функції f порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, необхідно біортогоналізувати функціональні послідовності $\left\{t^{(k+1)_q-1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ та $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Має місце наступний результат, який можна трактувати як узагальнення формули Родріга для ортогональних многочленів Лежандра.

Теорема 19 ([102]). Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q-1},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D визначається формулою

$$(D\varphi)(t) = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} \varphi'\left(t^{\frac{1}{q}}\right), \tag{25}$$

а узагальнений поліном U_{2N} має зображення

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q - 1}.$$

Використовуючи теорему 19 можна отримати явний вигляд апроксимант Паде q-аналога експоненти.

Теорема 20 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z},$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!(N+m)q!}{m_q!(N-m)_q!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q!(2N-m)_q!}{(N-m)_q! m_q!(j-m+1)_q!}.$$

Зауваження. Діагональні поліноми Паде функції $E_q(z)$ були раніше іншим способом побудовані в [78].

Теорему 19 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 21 ([102]). Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D визнача.ться формулою (25), а узагальнений поліном U_{2N} має зображення

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q - 1 + \nu q^{N+m}}.$$

Використовуючи теорему 21, можна побудувати апроксиманти Паде для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 22 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \prod_{j=1}^{N+m} \left(j_q + \nu q^{j-1}\right),$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q!}{(N-m)_q! m_q! (j-m+1)_q!} \prod_{r=j-m+2}^{2N-m} \left(r_q + \nu q^{r-1}\right).$$

Є справедливим також наступний результат.

Теорема 23. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})},$$

де $|q| > 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, при $N \to \infty$ збігаються до функції f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Використовуючи теорему 20, можна побудувати апроксиманти Паде ще для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 24 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} \left(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa\right)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})} z^k$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m}(-1)^m \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm} \frac{\prod\limits_{p=1}^{N+m}\left(p_q+\nu q^{p-1}\right)}{\prod\limits_{r=1}^{m}\left(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa\right)},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{k=0}^{j}(-1)^{N-k} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{p=j-k+2}^{2N-k}\left(p_q+\nu q^{p-1}\right)}{\prod\limits_{r=j-k+1}^{N-k}\left(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa\right)},$$

а через $\left[\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right]$ позначено так звані многочлени Гаусса (див. [79, с.49])

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} := \begin{cases} \frac{k_q!}{m_q!(k-m)_q!}, & \text{якщо} \quad 0 \leq m \leq k, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Апроксиманти Паде функцій, для послідовностей коефіцієнтів степеневих розвинень яких узагальнені моментні зображення наведено в прикладах 7 та 8, можуть бути зображені в термінах многочленів, ортогональних по відношенню до білінійної форми

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(\tau)y(\tau)d_q\tau.$$

Такі многочлени були вивчені В. Ханом (див. [83,103]), зокрема, q-поліноми Лежандра $L_N(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 L_N(x;q)L_M(x;q)d_qx = 0$$

при $N \neq M$ можуть бути зображені з точністю до сталого множника у вигляді

$$L_N(x;q) = {}_2\Phi_1 \left[\begin{array}{ccc} q^{-N}, & q^{N+1}; & qx \\ & q & \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+1};q\right)_k}{(q;q)_k(q;q)_k}(qx)^k,$$

а q-поліноми Якобі $R_N^{(\nu,0)}(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 R_N^{(\nu,0)}(x;q)R_M^{(\nu,0)}(x;q)x^\nu d_qx = 0$$

при $M \neq N$ можуть бути зображені з точністю до сталого множника у вигляді

$$R_N^{(\nu,0)}(x;q) = {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q^{-N}, & q^{N+\nu+1}; & qx \\ & q^{\nu+1} & \end{matrix} \right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k}{(q;q)_k \left(q^{\nu+1};q\right)_k} (qx)^k.$$

Теорема 25 ([84]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{{}_1\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{matrix} \right] - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} x^{N-k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k}{(q;q)_k (1-q)^k} q^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-j} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \left(q^{\nu+1};q\right)_{m-j+1} (1-q)^{N-m-1}}.$$

Теорема 26 ([84]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix} \right]$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} x^{N-k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k q^k}{(1+\varkappa-\varkappa q)^k (q;q)_k \left(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k},$$

$$P_{N-1}(z) = (1-q) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z^m}{(1+\varkappa-\varkappa q)^{N-m}} \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-j} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \left(q^{\nu+1};q\right)_{m-j+1} \left(\frac{q^{N-j+\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_{N-m}}.$$

Зауваження. Незалежно іншим шляхом результати, еквівалентні твердженням теорем 25 та 26, були отримані в [55,56].

Наведемо результати, що стосуються побудови апроксимант Паде функцій, розглянутих в прикладах 8–10.

Теорема 27 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{4-z^2}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = N! z^N + \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!} z^{N-m},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{[(j+1)/2]! [j/2]!}{(j+1)!} z^j.$$

Теорема 28 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{2j+2} \left(2^{2j+2}-1\right) B_{j+1}}{(2j+2)!} z^j,$$

а B_j - числа Бернуллі, що визначаються формулами (див. [104, с.765])

$$B_j = \frac{(2j)!}{\pi^{2j} 2^{2j-1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{3^{2j}} + \frac{1}{4^{2j}} + \dots \right\}. \tag{26}$$

Зауваження. Апроксиманти Паде функції $\frac{\mathrm{tg} z}{z}$ раніше іншим способом були побудовані в [100, с.67]

Теорема 29 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z \cos z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{[k/2]} z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(N+m)!}{(m-k)!} \{\varepsilon_m + \delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^{[k/2]} z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(N+m)!}{(m-k)!} \{\varepsilon_m + \delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} \frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right) B_{j+1}}{(2j+2)!} z^{2j} + \sum_{j=0}^{[k]-1} \frac{E_{j+1}}{(2j+2)!} z^{2j+1} \right\},$$

а

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad m - \text{парне}, \\ 0, & \text{якщо} \quad m - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k = m, \\ 0, & \text{якщо} \quad k \neq m, \end{cases}$$

при цьому числа Бернуллі B_j визначаються формулами (26), числа Ейлера E_j - формулами (18).

Зауваження. Аналогічно можна побудувати також апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, для функції $f(z) = \frac{\sec\sqrt{z}-1}{z}$. Цей результат еквівалентний побудові діагональних апроксимант Паде для функції $\cos z$, що виконана в [68].

Застосування узагальнених моментних зображень, побудованих в прикладі 11, дає наступні результати.

Теорема 30 ([86]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0 z^k}{(1-\delta\gamma^k)\, t_0 + \delta\gamma^k},$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\backslash\{1\}$, $t_0 \in (0,1)$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^{m-k})\, t_0 + \gamma^{m-k}},$$

а $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти біортогонального полінома

$$L_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} l_j,$$

що визначається співвідношеннями

$$L_N(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де

$$x_k(t) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)\, t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$l_j(x) = x\left(\frac{t_0}{(1-\delta\gamma^j)\, t_0 + \delta\gamma^j}\right), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Теорема 31. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2} \right\} z^k,$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^{j-m}} + \frac{(\ln\delta + j - m\ln\gamma)\delta\gamma^{j-m}}{(1-\delta\gamma^{j-m})^2} \right\}$$

а $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти полінома

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)\, t + \delta\gamma^k},$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\int\limits_0^1 X_N(t)\frac{\gamma^j}{\left(1-\left(1-\gamma^j\right)t\right)^2}dt=0,\quad j=\overline{0,N-1}.$$

Використовуючи узагальнені моментні зображення з оператором зсуву, побудовані в прикладі 12, можна встановити наступний результат.

Теорема 32. Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}z^k,$$

де $\alpha,\beta,\lambda>0$, $-\infty<\gamma<\infty$, порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, існують, невироджені і можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{k=0}^{N}z^{N-k}d_k^{(N)}\exp\{\alpha(k\lambda+\gamma)^2\},$$

$$P_{N-1}(z)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{N-1}z^m\sum_{k=0}^{m}d_{N-k}^{(N)}\times$$

$$\times\exp\left\{\alpha\left(\lambda^2N^2-\frac{\beta}{\alpha+\beta}m^2\lambda^2+2\lambda(\gamma-k\lambda)\left(N-\frac{\beta}{\alpha+\beta}m\right)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\gamma-\lambda k)^2\right)\right\},$$

а $d_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти полінома

$$X_N(t)=\sum_{k=0}^{N}d_k^{(N)}\exp\{-\alpha kt\},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}X_N(t)\exp\left\{\beta jt-\frac{1}{4\lambda}(\alpha t^2+2\alpha\gamma t+\beta t^2)\right\}dt=0$$

для $j=\overline{0,N-1}$.

8^0. Побудова та дослідження сумісних апроксимант Паде. Метод узагальнених моментних зображень, як встановлено в [70], може бути застосованим і до вивчення сумісних апроксимант Паде. Спершу наведемо додаткове означення.

Означення 13 ([43]). Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій. Будемо говорити, що для набору F індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, є нормальним, якщо сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R існують і їх знаменник $Q_N(z)$ має степінь, що дорівнює в точності $|N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$.

Теорема 33 ([105]). Нехай F - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, кожна з яких у вказаному околі може бути зображена степеневим рядом

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

причому для послідовностей $\left\{s_k^{(\lambda)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, мають місце узагальнені моментні зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вигляду

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k^{(\lambda)}, y_j \right\rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}. \tag{27}$$

Тоді, якщо для деякого набору $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такого що $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} y_j, \quad c_0^{(R)} \neq 0, \quad c_{|N|}^{(R)} \neq 0,$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\left\langle x_{k+m_\lambda-|N|+1}^{(\lambda)}, Y_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, n_\lambda - 1}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

то індекс R є нормальним, і сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R можуть бути зображені у вигляді

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_{m_\lambda}(z)}{Q_N(z)}, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k},$$

$$P_{m_\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-j} \sum_{p=0}^{m_\lambda+j-|N|} s_p^{(\lambda)} z^p, \quad \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

Зауваження. У випадку, коли узагальнені моментні зображення (27) можуть бути записані у вигляді

$$s_k^{(\lambda)} = \left\langle A^k x_0^{(\lambda)}, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0, \infty},$$

відповідні похибки апроксимації можуть бути зображені у вигляді

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{z^{n_\lambda+m_\lambda+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A)x_{m_\lambda-|N|+1}, Y_N \right\rangle .$$

Теорема 33 дозволяє побудувати і дослідити сумісні апроксиманти Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 34 ([105]). Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1\left(1; \nu_\lambda + 1; z\right) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. Сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Наведемо ще один результат, що стосується поведінки знаменників сумісних апроксимант Паде вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 35 ([106]). Знаменники сумісних апроксимант Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1\left(1; \nu_\lambda + 1; z\right) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda = \nu_1 + \frac{\lambda-1}{\Lambda}$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $\nu_1 > -1$, індексів $\tilde{R} = [\tilde{N}/N]$, де $\tilde{N} = (|N| - 1, |N| - 1, \ldots, |N| - 1)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, а

$$n_\lambda = \begin{cases} \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] + 1 & \text{при} \quad \lambda = \overline{1, m}, \\ \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] & \text{при} \quad \lambda = \overline{m+1, \Lambda}, \end{cases}$$

а m - остача від ділення $|N|$ на Λ, рівномірно збігаються при $|N| \to \infty$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{|N|!} Q_N(z) \to \exp\left\{ \left(\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1} \right)^{\Lambda} - 1 \right) z \right\}.$$

Зауваження. Теореми 34–35 були незалежно іншим шляхом встановлені М. де Брюіном [52, 53].

Розглянемо тепер сумісні апроксиманти Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера.

Теорема 36 ([107]). Для сумісних апроксимант Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера

$$F = \{E_\rho(z, \nu_\lambda)\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\rho(\nu_\lambda - \nu_\mu) \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > 0$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $\rho > 0$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, є нормальним. При $0 < \rho \leq 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Аналогічно розглядаються сумісні апроксиманти Паде базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 37. Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu_\lambda q^{m-1})} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\nu_\mu \neq q + q^2 + \ldots + q^k + \nu_\lambda q^k$, $k = \overline{0,\infty}$, при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $q \neq 1$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, є нормальним. При $|q| > 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Зауваження. Побудові та дослідженню сумісних апроксимант Паде наборів базисних гіпергеометричних рядів присвячені роботи [55–57].

9^0. Побудова та дослідження апроксимант Паде–Чебишова. Апроксимації Паде–Чебишова є частинним випадком узагальнених апроксимацій Паде. Введемо означення дещо відмінне від того, що випливає з означення 4.

Означення 14. Нехай функція $f \in C[-1,1]$ розвивається в рівномірно збіжний ряд Фур'є–Чебишова вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z),$$

де $T_k(z) = \cos \arccos z$ - многочлени Чебишова першого роду. Апроксимантою Паде–Чебишова функції f порядку $[M/N]$ називається раціональний поліном

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathscr{R}[M/N],$$

такий, що має місце розвинення

$$f(z)Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z).$$

Теорема 38 ([108, 109]). Нехай функція f розвивається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є–Чебишова

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kT_{mk+n}(z),$$

де $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і при цьому для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j}=\langle x_k,y_j\rangle\,,\ k,j=\overline{0,\infty},$$

на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Нехай, крім того, при деяких $M\geq N$, $M,N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ є відмінним від нуля визначник

$$\Delta[M/N]=\det\|s_{M+1+k+j}+s_{M+1+k-j}\|_{k,j=0}^{N}\neq 0.$$

Тоді апроксиманта Паде–Чебишова функції f порядку $[mM+n/mN]$ існує і має зображення

$$[mM+n/mN]_f^T(z)=\frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z)=\sum_{k=0}^{N}c_k^{(N)}T_{mk}(z),\tag{12}$$

$$P_{mM+n}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{k}c_j^{(N)}s_{k-j}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=k}^{k}c_j^{(N)}s_{j-k}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-[-n/m]-1}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}s_{j-k}+\frac{1}{2}\sum_{k=[-n/m]+1}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}s_{k+j}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{M}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}(s_{k-j}+s_{k+j}),$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, визначаються з умов біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N=\sum_{k=0}^{N}c_k^{(N)}(x_{M+1+k}+x_{M+1-k})$$

вигляду

$$\langle X_N,y_j\rangle=0,\ j=\overline{0,N-1}.$$

Теорема 39. ([108, 109]). Апроксиманти Паде–Чебишова функцій, що мають зображення

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} d\mu(t),$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, а $\mu(t)$ - неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$, порядків $[mM + n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, мають зображення

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2} U_N(2T_m(z)),$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} \left(U_N(2T_m(z)) - U_N(t + 1/t) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_N(t + 1/t) \right) d\mu(t),$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ визначаються з умов біортогональності для полінома $X_N(t) = t^{M+1} U_N(t + 1/t)$ вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t) d\mu(t) = 0, \; k = \overline{0, N-1}.$$

10^0. Побудова та дослідження двоточкових апроксимант Паде. Є справедливим наступний результат, що дозволяє застосувати узагальнені моментні зображення до двоточкових апроксимацій Паде.

Теорема 40 ([74]). Нехай функція f є аналітичною в деякій зв'язній області $\mathscr{D}$, що містить точки $z = 0$ та $z = z_0$, і розвивається в цій області в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

і нехай для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \; k = \overline{0, \infty},$$

з лінійним оператором $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, резольвентна функція якого $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, є аналітичною в області $\mathscr{D}$. Нехай також при деяких $N, M \geq 0$ є відмінним від нуля визначник

$$\tilde{H}_{N,M} = \det \|\tilde{s}_{k,j+M}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0,$$

де $\tilde{s}_k = \langle \tilde{x}_k, y_0 \rangle$, а

$$\tilde{x}_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} x_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} A^k x_0.$$

Тоді, якщо побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} A^{*j} y_0,$$

для якого виконуються умови біортогональності вигляду

$$\langle \tilde{x}_k, Y_N \rangle = 0,\ k = \overline{0, N-1},$$

то раціональний поліном

$$[(N+M,N)/N]_f(0, z_0; z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

є двоточковою апроксимантою Паде індексу $[(N+M,N)/N]$ в точках 0 та z_0 функції f, тобто мають місце співвідношення

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0, z_0; z) = \begin{cases} O(z^{M+N}) & \text{при } z \to 0, \\ O\left((z-z_0)^N\right) & \text{при } z \to z_0. \end{cases}$$

Похибка апроксимації при цьому може бути представлена у вигляді

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0, z_0; z) = \frac{z^{N+M}(z-z_0)^N}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^N x_N, Y_N \right\rangle.$$

Теорема 41 ([74]). Двоточкові апроксиманти Паде функції

$$f(z) = {}_1F_1(1; \nu+1; z), \quad \nu > -1,$$

в точках $z = 0$ та $z = z_0 \in \mathbb{R}$ індексу $[(N+M,N)/N]$, $N, M \geq 0$, можуть бути записані у вигляді

$$[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а $d_j^{(N)}$ - коефіцієнти алгебраїчного многочлена $D_N(t) = \sum\limits_{j=0}^{N} d_j^{(N)} t^j$, ортонормованого на $[0,1]$ з вагою $e^{z_0(1-t)} t^{M+\nu} dt$. Для похибки апроксимації справедлива асимптотична формула

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \Gamma(\nu+1) z \int_0^1 \left(f(zu) - \sum_{m=0}^{M-1} s_m z^m u^m \right) D_N(t) e^{z_0(1-t)} t^{\nu} dt \times$$

$$\times \int_0^1 e^{z(1-t)} D_N(t) t^{M+\nu} dt \, (1 + o(1))$$

при $N \to \infty$. Двоточкові апроксиманти Паде $[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z)$ збігаються до f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

11^0. Побудова апроксимант Паде–Ерміта.

Теорема 42 ([70]). Нехай аналітичні функції $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, з набору F розвиваються в околі точки $z = 0$ в степеневі ряди

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

і при цьому для послідовностей $\left\{ s_k^{(\lambda)} \right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, мають місце узагальнені моментні зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вигляду

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k, y_j^{(\lambda)} \right\rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Тоді поліноми Паде–Ерміта набору F індексу $[M]$, $M = (m, m, \ldots, m)$, $|M| = \Lambda m$, можуть бути зображені у вигляді

$$[M]_F^{(\lambda)}(z) = \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j},$$

де коефіцієнти $c_{j,\lambda}^{(m)}$, $j = \overline{0, m}$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, задовольняють лінійні однорідні рівняння

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=1}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k^{(\lambda)} z^k \equiv 0,$$

$$\left\langle x_k, \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)} \right\rangle = 0$$

для $k = \overline{0, (m+1)(\Lambda-1)-1}$. При цьому буде мати місце рівність

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z) [M]_F^{(\lambda)}(z) = z^m \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} z^k x_k, Y_M \right\rangle,$$

де

$$Y_M = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)}.$$

7^0. Побудова та властивості апроксимацій Паде спеціальних функцій. За допомогою узагальнених моментних представлень, побудованих в прикладі 1, можна встановити наступні результати.

Теорема 14. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} (k+N)! z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = 2(-1)^N \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \begin{pmatrix} N \\ 2m+1 \end{pmatrix} (2N-2m-1)! z^{2m}.$$

Апроксиманти Паде експоненти були побудовані ще Ш. Ермітом [38] і надалі вивчалися цілим рядом дослідників. В.К. Дзядиком та Л.І. Філозофом [67] для побудови цих апроксимант було використано апроксимаційний метод наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, який став однією з відправних точок створення методу узагальнених моментних представлень.

Теорема 15. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{{}_1F_1(1; \nu+1; z) - 1}{z}, \ \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) (\nu+1)_{N+k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N} z^k \sum_{m=0}^{k} \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\nu+1)_{k-m+1}}.$$

Апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції були побудовані Г.ван Россумом [96]. Побудова цих апроксимант з використанням узагальнених моментних представлень здійснена в [74, 97].

Теорема 16 ([98]).Нехай функція $\varphi_0(t) \in C[0,1]$ є такою, що для будь-якого алгебраїчного многочлена $p(t)$, $\deg p(t) \leq N$, узагальнений поліном

$$A_N(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^t p(t-\tau)\varphi_0(\tau)d\tau$$

має не більше, ніж N коренів на $(0,1)$. Тоді для аналітичної функції $f(z)$, що визначається представленням

$$f(z) = \int\limits_0^1 \varphi_0(t) e^{z(1-t)} dt,$$

її апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують і збігаються до $f(z)$ рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

З теореми 16, зокрема випливає збіжність діагональних апроксимант Паде експоненти e^z та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$, $\nu > -1$.

В прикладі 2 нами було побудоване узагальнене моментне представлення для гіпергеометричної функції Гаусса.

Теорема 17. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1} {}_2F_1(\varkappa+\nu+1, 1; \nu+2; z), \ \nu > -1,$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = (\varkappa+\nu)\sum_{k=1}^{N-1} z^k \sum_{m=0}^{k} (-1)^{N-m} \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\varkappa+\nu+k-m)_{N-k+1}}.$$

Апроксиманти Паде гіпергеометричної функції Гаусса були побудовані А. Паде [5]. Асимптотична поведінка похибки апроксимації була досліджена Ю. Люком [99, 100]. Відповідні результати з використанням узагальнених моментних представлень були отримані [74, 97].

В прикладі 4 нами було побудоване узагальнене моментне представлення для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції типу Міттаг-Леффлера

$$f(z) = E_\rho(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho+\nu)}$$

при $\nu > 0$, $0 < \rho < \infty$.

Теорема 18 ([76, 98]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = E_\rho(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\nu\right)},$$

$\nu > 0$, $0 < \rho \le 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \ge 1$, збігаються до f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Зауваження. Збіжність рядків таблиці Паде для функції Міттаг-Леффлера доведена в [101].

В прикладі 5 ми побудували узагальнене моментне представлення для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{E_q(z)-1}{z},$$

де $E_q(z)$ - q-аналог експоненти. Щоб побудувати апроксиманти Паде функції f порядків $[N-1/N]$, $N \ge 1$, необхідно біортогоналізувати функціональні послідовності $\left\{t^{(k+1)_q-1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ та $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Має місце наступний результат, який можна трактувати як узагальнення формули Родріга для ортогональних многочленів Лежандра.

Теорема 19 ([102]). Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q-1},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D визначається формулою

$$(D\varphi)(t) = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} \varphi'\left(t^{\frac{1}{q}}\right), \tag{25}$$

а узагальнений поліном U_{2N} має представлення

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q - 1}.$$

Використовуючи теорему 19 можна отримати явний вигляд апроксимант Паде q-аналога експоненти.

Теорема 20 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z},$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!(N+m)q!}{m_q!(N-m)_q!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q!(2N-m)_q!}{(N-m)_q! m_q! (j-m+1)_q!}.$$

Зауваження. Діагональні поліноми Паде функції $E_q(z)$ були раніше іншим способом побудовані в [78].

Теорему 19 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 21 ([102]). Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt = 0, \quad j = \overline{0, N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = \left(D^N U_{2N}\right)(t),$$

де оператор D визнача.ться формулою (25), а узагальнений поліном U_{2N} має представлення

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q - 1 + \nu q^{N+m}}.$$

Використовуючи теорему 21, можна побудувати апроксиманти Паде для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 22 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \prod_{j=1}^{N+m} \left(j_q + \nu q^{j-1}\right),$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q!}{(N-m)_q! m_q! (j-m+1)_q!} \prod_{r=j-m+2}^{2N-m} \left(r_q + \nu q^{r-1}\right).$$

Має місце також наступний результат.

Теорема 23. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})},$$

де $|q| > 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, при $N \to \infty$ збігаються до наближуваної функції рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Використовуючи теорему 20, можна побудувати апроксиманти Паде ще для одного класу базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 24 ([102]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} \left(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa\right)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})} z^k$$

порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{m=0}^{N} z^{N-m}(-1)^m \begin{bmatrix} N\\ m\end{bmatrix} q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}\frac{\prod\limits_{p=1}^{N+m}\left(p_q+\nu q^{p-1}\right)}{\prod\limits_{r=1}^{m}(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa)},$$

$$P_{N-1}(z)=\sum_{j=0}^{N-1} z^j\sum_{k=0}^{j}(-1)^{N-k}\begin{bmatrix} N\\ k\end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}}\frac{\prod\limits_{p=j-k+2}^{2N-k}\left(p_q+\nu q^{p-1}\right)}{\prod\limits_{r=j-k+1}^{N-k}(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa)},$$

а через $\left[\begin{smallmatrix} k\\ m\end{smallmatrix}\right]$ позначено так звані многочлени Гаусса (див. [79, с.49])

$$\begin{bmatrix} k\\ m\end{bmatrix}:=\begin{cases}\frac{k_q!}{m_q!(k-m)_q!}, & \text{якщо}\quad 0\leq m\leq k,\\ 0, & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$$

Апроксиманти Паде функцій, для послідовностей коефіцієнтів степеневих розкладів яких узагальнені моментні представлення наведено в прикладах 7 та 8, можуть бути представлені в термінах многочленів, ортогональних по відношенню до білінійної форми

$$\langle x,y\rangle=\int\limits_0^1 x(\tau)y(\tau)d_q\tau.$$

Такі многочлени були вивчені В. Ханом (див. [83,103]), зокрема, q-поліноми Лежандра $L_N(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 L_N(x;q)L_M(x;q)d_qx=0$$

при $N\neq M$ можуть бути представлені з точністю до постійного множника у вигляді

$$L_N(x;q)={}_2\Phi_1\left[\begin{array}{ccc} q^{-N}, & q^{N+1}; & qx\\ & q & \end{array}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{\left(q^{-N};q\right)_k\left(q^{N+1};q\right)_k}{(q;q)_k(q;q)_k}(qx)^k,$$

а q-поліноми Якобі $R_N^{(\nu,0)}(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 R_N^{(\nu,0)}(x;q)R_M^{(\nu,0)}(x;q)x^\nu d_qx=0$$

при $M \neq N$ можуть бути представлені з точністю до постійного множника у вигляді

$$R_N^{(\nu,0)}(x;q) = {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^{-N}, & q^{N+\nu+1}; & qx \\ & q^{\nu+1} & \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k}{(q;q)_k \left(q^{\nu+1};q\right)_k}(qx)^k.$$

Теорема 25 ([84]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{{}_1\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{matrix}\right] - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути представлені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} x^{N-k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k}{(q;q)_k (1-q)^k} q^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-j} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \left(q^{\nu+1};q\right)_{m-j+1} (1-q)^{N-m-1}}.$$

Теорема 26 ([84]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix}\right]$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути представлені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} x^{N-k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+\nu+1};q\right)_k q^k}{(1+\varkappa-\varkappa q)^k (q;q)_k \left(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k},$$

$$P_{N-1}(z) = (1-q) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z^m}{(1+\varkappa-\varkappa q)^{N-m}} \sum_{j=0}^{m} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-j} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} \left(q^{\nu+1};q\right)_{m-j+1} \left(\frac{q^{N-j+\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_{N-m}}.$$

Зауваження. Незалежно іншим шляхом результати, еквівалентні твердженням теорем 25 та 26, були отримані в [55,56].

Наведемо результати, що стосуються побудови апроксимант Паде функцій, розглянутих в прикладах 8–10.

Теорема 27 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{4-z^2}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = N! z^N + \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!} z^{N-m},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=1}^{N} (-1)^{[m/2]} \frac{1}{[(m-1)/2]!} \sum_{k=m}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k \frac{(N+k)!}{k!} \frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{[(j+1)/2]! [j/2]!}{(j+1)!} z^j.$$

Теорема 28 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right) B_{j+1}}{(2j+2)!} z^j,$$

а B_j - числа Бернуллі, що визначаються формулами (див. [104, с.765])

$$B_j = \frac{(2j)!}{\pi^{2j} 2^{2j-1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{3^{2j}} + \frac{1}{4^{2j}} + \dots \right\}. \tag{26}$$

Зауваження. Апроксиманти Паде функції $\frac{\mathrm{tg} z}{z}$ раніше іншим способом були побудовані в [100, с.67]

Теорема 29 ([85]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\frac{\sin z+1-\cos z}{z\cos z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}\{\varepsilon_m+\delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\},$$

$$P_{N-1}(z)=\sum_{k=0}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}\{\varepsilon_m+\delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)\}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]}\frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right)B_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j}+\sum_{j=0}^{[k]-1}\frac{E_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j+1}\right\},$$

а

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad m \text{ -- парне},\\ 0, & \text{якщо} \quad m \text{ -- непарне},\end{cases}$$

$$\delta_{k,m}=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad k=m,\\ 0, & \text{якщо} \quad k\neq m,\end{cases}$$

при цьому числа Бернуллі B_j визначаються формулами (26), числа Ейлера E_j - формулами (18).

Зауваження. Аналогічно можна побудувати також апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, для функції $f(z)=\frac{\sec\sqrt{z}-1}{z}$. Цей результат еквівалентний побудові діагональних апроксимант Паде для функції $\cos z$, що виконана в [68].

Застосування узагальнених моментних представлень, побудованих в прикладі 11, дає наступні результати.

Теорема 30 ([86]). Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_0 z^k}{(1-\delta\gamma^k)\,t_0+\delta\gamma^k},$$

де $\gamma,\delta\in(0,\infty)\backslash\{1\}$, $t_0\in(0,1)$, порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^{m-k})\, t_0 + \gamma^{m-k}},$$

а $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти біортогонального полінома

$$L_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} l_j,$$

що визначається співвідношеннями

$$L_N(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, N-1},$$

де

$$x_k(t) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)\, t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$l_j(x) = x\left(\frac{t_0}{(1-\delta\gamma^j)\, t_0 + \delta\gamma^j}\right), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Теорема 31. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2} \right\} z^k,$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^{j-m}} + \frac{(\ln\delta + j - m\ln\gamma)\delta\gamma^{j-m}}{(1-\delta\gamma^{j-m})^2} \right\}$$

а $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти полінома

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)\, t + \delta\gamma^k},$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t)\frac{\gamma^j}{\left(1-(1-\gamma^j)\,t\right)^2}dt = 0, \quad j=\overline{0,N-1}.$$

Використовуючи узагальнені моментні представлення з оператором зсуву, побудовані в прикладі 12, можна встановити наступний результат.

Теорема 32. Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}z^k,$$

де $\alpha,\beta,\lambda>0$, $-\infty<\gamma<\infty$, порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, існують, невироджені і можуть бути представлені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{k=0}^{N} z^{N-k}d_k^{(N)}\exp\{\alpha(k\lambda+\gamma)^2\},$$

$$P_{N-1}(z)=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}}\sum_{m=0}^{N-1}z^m\sum_{k=0}^{m}d_{N-k}^{(N)}\times$$

$$\times\exp\left\{\alpha\left(\lambda^2N^2-\frac{\beta}{\alpha+\beta}m^2\lambda^2+2\lambda(\gamma-k\lambda)\left(N-\frac{\beta}{\alpha+\beta}m\right)+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\gamma-\lambda k)^2\right)\right\},$$

а $d_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти полінома

$$X_N(t)=\sum_{k=0}^{N}d_k^{(N)}\exp\{-\alpha kt\},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_{-\infty}^{\infty}X_N(t)\exp\left\{\beta jt-\frac{1}{4\lambda}(\alpha t^2+2\alpha\gamma t+\beta t^2)\right\}dt=0$$

для $j=\overline{0,N-1}$.

8^0. Побудова та дослідження сумісних апроксимант Паде. Метод узагальнених моментних представлень, як встановлено в [70], може бути застосованим і до вивчення сумісних апроксимант Паде. Спершу наведемо додаткове означення.

Означення 13 ([43]). Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій. Будемо говорити, що для набору F індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, є нормальним, якщо сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R існують і їх знаменник $Q_N(z)$ має степінь, що дорівнює в точності $|N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$.

Теорема 33 ([105]). Нехай F - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, кожна з яких у вказаному околі представима степеневим рядом

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

причому для послідовностей $\left\{s_k^{(\lambda)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, мають місце узагальнені моментні представлення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вигляду

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k^{(\lambda)}, y_j \right\rangle, \quad k, j = \overline{0,\infty}. \tag{27}$$

Тоді, якщо для деякого набору $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такого що $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} y_j, \quad c_0^{(R)} \neq 0, \quad c_{|N|}^{(R)} \neq 0,$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\left\langle x_{k+m_\lambda-|N|+1}^{(\lambda)}, Y_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, n_\lambda - 1}, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda},$$

то індекс R є нормальним, і сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R можуть бути представлені у вигляді

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_{m_\lambda}(z)}{Q_N(z)}, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k},$$

$$P_{m_\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-j} \sum_{p=0}^{m_\lambda+j-|N|} s_p^{(\lambda)} z^p, \quad \lambda = \overline{1,\Lambda},$$

Зауваження. У випадку, коли узагальнені моментні представлення (27) можуть бути записані у вигляді

$$s_k^{(\lambda)} = \left\langle A^k x_0^{(\lambda)}, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0,\infty},$$

відповідні похибки апроксимації можуть бути представлені у вигляді

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{z^{n_\lambda+m_\lambda+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_{m_\lambda-|N|+1}, Y_N \right\rangle .$$

Теорема 33 дозволяє побудувати і дослідити сумісні апроксиманти Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 34 ([105]). Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1\left(1; \nu_\lambda+1; z\right) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, є нормальним. Сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Наведемо ще один результат, що стосується поведінки знаменників сумісних апроксимант Паде вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 35 ([106]). Знаменники сумісних апроксимант Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1\left(1; \nu_\lambda+1; z\right) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda = \nu_1 + \frac{\lambda-1}{\Lambda}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $\nu_1 > -1$, індексів $\tilde{R} = [\tilde{N}/N]$, де $\tilde{N} = (|N|-1, |N|-1, \ldots, |N|-1)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, а

$$n_\lambda = \begin{cases} \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] + 1 & \text{при} \quad \lambda = \overline{1,m}, \\ \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] & \text{при} \quad \lambda = \overline{m+1,\Lambda}, \end{cases}$$

а m - остача від ділення $|N|$ на Λ, рівномірно збігаються при $|N| \to \infty$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{|N|!} Q_N(z) \to \exp\left\{ \left(\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1} \right)^{\Lambda} - 1 \right) z \right\}.$$

Зауваження. Теореми 34–35 були незалежно іншим шляхом встановлені М. де Брюіном [52, 53].

Розглянемо тепер сумісні апроксиманти Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера.

Теорема 36 ([107]). Для сумісних апроксимант Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера

$$F = \{E_\rho(z, \nu_\lambda)\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\rho(\nu_\lambda - \nu_\mu) \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > 0$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $\rho > 0$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $0 < \rho \leq 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Аналогічно розглядаються сумісні апроксиманти Паде базисних гіпергеометричних рядів.

Теорема 37. Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu_\lambda q^{m-1})} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\nu_\mu \neq q + q^2 + \ldots + q^k + \nu_\lambda q^k$, $k = \overline{0, \infty}$, при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $q \neq 1$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $|q| > 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Зауваження. Побудові та дослідженню сумісних апроксимант Паде наборів базисних гіпергеометричних рядів присвячені роботи [55–57].

9^0. Побудова та дослідження апроксимант Паде–Чебишева. Апроксимації Паде–Чебишева є частинним випадком узагальнених апроксимацій Паде. Введемо означення дещо відмінне від того, що випливає з означення 4.

Означення 14. Нехай функція $f \in C[-1, 1]$ розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є–Чебишева вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z),$$

де $T_k(z) = \cos \arccos z$ - многочлени Чебишева першого роду. Апроксимантою Паде–Чебишева функції f порядку $[M/N]$ називається раціональний поліном

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathscr{R}[M/N],$$

такий, що має місце розклад

$$f(z)Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z).$$

Теорема 38 ([108, 109]). Нехай функція f розкладається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є–Чебишева

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kT_{mk+n}(z),$$

де $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і при цьому для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне представлення

$$s_{k+j}=\langle x_k,y_j\rangle\,,\ k,j=\overline{0,\infty},$$

на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Нехай, крім того, при деяких $M\geq N$, $M,N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ є відмінним від нуля визначник

$$\Delta[M/N]=\det\|s_{M+1+k+j}+s_{M+1+k-j}\|_{k,j=0}^{N}\neq 0.$$

Тоді апроксиманта Паде–Чебишева функції f порядку $[mM+n/mN]$ існує і має представлення

$$[mM+n/mN]_f^T(z)=\frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z)=\sum_{k=0}^{N}c_k^{(N)}T_{mk}(z), \tag{12}$$

$$P_{mM+n}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{k}c_j^{(N)}s_{k-j}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=k}^{k}c_j^{(N)}s_{j-k}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-[-n/m]-1}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}s_{j-k}+\frac{1}{2}\sum_{k=[-n/m]+1}^{N}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}s_{k+j}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{M}T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}(s_{k-j}+s_{k+j}),$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, визначаються з умов біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N=\sum_{k=0}^{N}c_k^{(N)}(x_{M+1+k}+x_{M+1-k})$$

вигляду

$$\langle X_N,y_j\rangle=0,\ j=\overline{0,N-1}.$$

Теорема 39. ([108, 109]). Апроксиманти Паде–Чебишева функцій, що мають представлення

$$f(z)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}d\mu(t),$$

де $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m\in\mathbb{N}$, а $\mu(t)$ - неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті $[\alpha,\beta]\subset[-1,1]$, порядків $[mM+n/mN]$, $M\geq N\geq 0$, мають представлення

$$[mM+n/mN]_f^T(z)=\frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z)=\frac{1}{2}U_N(2T_m(z)),$$

$$P_{mM+n}(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}\left(U_N(2T_m(z))-U_N(t+1/t)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)U_N(t+1/t)\right)d\mu(t),$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ визначаються з умов біортогональності для полінома $X_N(t)=t^{M+1}U_N(t+1/t)$ вигляду

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^kX_N(t)d\mu(t)=0,\ k=\overline{0,N-1}.$$

10^0. Побудова та дослідження двоточкових апроксимант Паде. Має місце наступний результат, що дозволяє застосувати узагальнені моментні представлення до двоточкових апроксимацій Паде.

Теорема 40 ([74]). Нехай функція f є аналітичною в деякій зв'язній області $\mathscr{D}$, що містить точки $z=0$ та $z=z_0$, і розкладається в цій області в степеневий ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k,$$

і нехай для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне представлення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_k=\left\langle A^kx_0,y_0\right\rangle,\ k=\overline{0,\infty},$$

з лінійним оператором $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, резольвентна функція якого $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, є аналітичною в області $\mathscr{D}$. Нехай також при деяких $N, M \geq 0$ є відмінним від нуля визначник

$$\tilde{H}_{N,M} = \det \|\tilde{s}_{k,j+M}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0,$$

де $\tilde{s}_k = \langle \tilde{x}_k, y_0 \rangle$, а

$$\tilde{x}_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} x_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} A^k x_0.$$

Тоді, якщо побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} A^{*j} y_0,$$

для якого виконуються умови біортогональності вигляду

$$\langle \tilde{x}_k, Y_N \rangle = 0,\ k = \overline{0, N-1},$$

то раціональний поліном

$$[(N+M, N)/N]_f(0, z_0; z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

є двоточковою апроксимантою Паде індексу $[(N+M, N)/N]$ в точках 0 та z_0 функції f, тобто мають місце співвідношення

$$f(z) - [(N+M, N)/N]_f(0, z_0; z) = \begin{cases} O(z^{M+N}) & \text{при } z \to 0, \\ O\left((z-z_0)^N\right) & \text{при } z \to z_0. \end{cases}$$

Похибка апроксимації при цьому може бути представлена у вигляді

$$f(z) - [(N+M, N)/N]_f(0, z_0; z) = \frac{z^{N+M}(z-z_0)^N}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^N x_N, Y_N \right\rangle.$$

Теорема 41 ([74]). Двоточкові апроксиманти Паде функції

$$f(z) = {}_1F_1(1; \nu+1; z), \quad \nu > -1,$$

в точках $z = 0$ та $z = z_0 \in \mathbb{R}$ індексу $[(N+M,N)/N]$, $N, M \geq 0$, можуть бути записані у вигляді

$$[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\nu+1)_j}{j!} d_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а $d_j^{(N)}$ - коефіцієнти алгебраїчного многочлена $D_N(t) = \sum\limits_{j=0}^{N} d_j^{(N)} t^j$, ортонормованого на $[0,1]$ з вагою $e^{z_0(1-t)} t^{M+\nu} dt$. Для похибки апроксимації справедлива асимптотична формула

$$f(z) - [(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z) = \Gamma(\nu+1) z \int\limits_0^1 \left(f(zu) - \sum_{m=0}^{M-1} s_m z^m u^m \right) D_N(t) e^{z_0(1-t)} t^{\nu} dt \times$$

$$\times \int\limits_0^1 e^{z(1-t)} D_N(t) t^{M+\nu} dt \, (1+o(1))$$

при $N \to \infty$. Двоточкові апроксиманти Паде $[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z)$ збігаються до f рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

11^0. Побудова апроксимант Паде–Ерміта.

Теорема 42 ([70]). Нехай аналітичні функції $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, з набору F розкладаються в околі точки $z = 0$ в степеневі ряди

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

і при цьому для послідовностей $\left\{ s_k^{(\lambda)} \right\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, мають місце узагальнені моментні представлення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вигляду

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k, y_j^{(\lambda)} \right\rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Тоді поліноми Паде–Ерміта набору F індексу $[M]$, $M = (m, m, \ldots, m)$, $|M| = \Lambda m$, можуть бути представлені у вигляді

$$[M]_F^{(\lambda)}(z) = \sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j},$$

де коефіцієнти $c_{j,\lambda}^{(m)}$, $j = \overline{0,m}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, задовільняють лінійним однорідним рівнянням

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{j=1}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} z^{m-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k^{(\lambda)} z^k \equiv 0,$$

$$\left\langle x_k, \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)} \right\rangle = 0$$

при $k = \overline{0, (m+1)(\Lambda-1)-1}$. При цьому буде мати місце рівність

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z)[M]_F^{(\lambda)}(z) = z^m \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} z^k x_k, Y_M \right\rangle,$$

де

$$Y_M = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{j=0}^{m} c_{j,\lambda}^{(m)} y_j^{(\lambda)}.$$

Література

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде.– М.: Мир, 1986. – 502 с.

2. Jacobi C.G.J. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebroche rationale Function // J.für Reine Angewandte Math. – 1846. – 30. – S.127-156.

3. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // J.für Reine Angewandte Math. – 1881. – 90. – S.1-17.

4. Padé H. Sur la répresentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles // Ann.de l'Ecole Normale Sup.(3) – 1892. – 9, Suppl. – P.3-93.

5. Padé H. Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions // Ann.de l'Ecole Normale Sup.(3) – 1907. – 24. – P.341-400.

6. Чебышев П.Л. Избранные математические труды. – М.: Гостехиздат, 1946. – 199 с.

7. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях. – Харьков – Киев: ДНТВУ, 1936. – 154 с.

8. Марков А.А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименеее уклоняющихся от нуля. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 291 с.

9. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjessen Momentproblems. I,II,III // Math.Ann. – 1920. – 81. – S.235-319; 1921. – 82. – S.120-164, 168-187.

10. Hausdorf F. Summationsmethoden und Momentfolgen. I,II // Math.Zeitschrift. – 1921. – 9. – S.74-109, 280-299.

11. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 312 с.

12. Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1973. – 92, N1. – С.152-164.

13. Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Мат.сборник. – 1975. – 97, N4. – С.607-629.

14. Рахманов Е.А. О сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций // Мат.сборник. – 1977. – 112, N2. – С.162-169.

15. Рахманов Е.А. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Мат.сборник. – 1982. – 118. – С.104-117.

16. Лунгу К.Н. О свойствах функций, связанных с поведением полюсов аппроксимаций Паде // Мат.заметки. – 1981. – 29, N6. – С.843-848.

17. Gilewicz J. Story of rational approximation for the class of Stieltjes functions: from Stieltjes to recent optimal estimations of errors // Укр.мат.журн. – 1994. – 46, N7. – С.941-943.

18. Luke Y.L. On the error in Padé approximations for functions defined by Stieltjes integrals // Comput.Math. – 1977. – 3, N4. – P.307-314.

19. Baker G.A. Best error bounds for Padé approximants to convergent series of Stieltjes // J.Math.Phys. – 1969. – 10. – P.814-820.

20. Gautschi W. On Padé approximants associated with Hamburger series // Calcolo. – 1983. – 20, N2. – P.814-820.

21. Wynn P. Upon the Padé table derived from a Stieltjes series // SIAM J.Numer. Anal. – 1968. – 5. – P.805-834.

22. Hendriksen E., Rossum H.van. Moment methods in Padé approximation // J.Approx.Theory. – 1982. – 35, N3. – P.250-263.

23. Hendriksen E., Rossum H.van. Moment methods in Padé approximation: the unitary case // J.Math.Anal.and Appl. – 1984. – 104, N2. – P.512-525.

24. Nuttall J., Singh S.R. Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs // J.Approx.Theory. – 1977. – 21, N1. – P.1-42.

25. Stahl H. Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I,II // Constr.Approximat. – 1986. – 2, N3. – P.225-251.

26. Гончар А.А. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций // Мат.сборник. – 1975. – 98, N4. – С.564-577.

27. Суетин С.П. Обратные теоремы об обобщенных аппроксимациях Паде // Мат.сборник. – 1979. – 109, N4. – С.629-646.

28. Суетин С.П. О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера // ДАН СССР. – 1980. – 253, N6. – С.1322-1325.

29. Karlberg L. A convergence result for generalized Padé approximants. – Umeå, 1978. – 12 p. – (Preprint/ Dep.Math.Univ.Umeå; N4).

30. Гончар А.А., Гиермо Лопес Л. О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1978. – 105, N4. – С.512-524.

31. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения – Минск: Изд.БГУ, 1979. – 176 с.

32. Ровба Е.А. Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с r-й производной ограниченной вариации // Весцi НАН Беларусi. Сер.фiз.-мат.навук. – 1999. – N2. – С.8-13.

33. Ровба Е.А. Интерполяционные рациональные функции типа Фейера-Бернштейна // Вестн. Белорусского ун-та. Сер.1. – 1991. – N2. – С.75-78.

34. Философ Л.И. Условия сходимости многоточечных аппроксимаций Паде // Теория приближения функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.121-126.

35. Magnus A. On the structure of the two-point Padé table // Lect.Notes Math. – 1982. – 932. – P.176-193.

36. Njåstad O. A multi-point Padé approximation problem // Lect.Notes Math. – 1986. – 1199. – P.263-268.

37. Wallin H. Convergence and divergence of multipoint Padé approximants of meromorphic functions // Lect.Notes Math. – 1984. – 1105. – P.272-284.

38. Hermite C. Sur la fonction exponentielle // Oeuvres, t.III. – 1873. – P.151-181.

39. Angelesco M.A. Sur deux extensions des fractions continues algebriques // Comp.Rend.Acad.Sci.Paris. – 1919. – 168. – P.262-263.

40. Mahler K. Perfect systems // Compositio Math. – 1968. – 19. – P.95-166.

41. Coates J. On the algebraic approximation of functions. I,II,III // Indag. Math. – 1966. – 28. – P.421-461.

42. Jager H. A multidimensional generalization of the Padé table // Indag. Math. – 1964. – 26. – P.192-249.

43. Никишин Е.М. О совместных аппроксимациях Паде // Мат.сборник. – 1980. – 113, N4. – С.499-518.

44. Никишин Е.М. Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв.вузов.Матем. – 1986. – N2. – С.33-41.

45. Гончар А.А., Рахманов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Труды Мат.Ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР. – 1981. – 157. – С.31-48.

46. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

47. Аптекарев А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\}_{i=1}^k$ // Вестник МГУ. Мат. и мех. – 1981. – N2. – С.58-62.

48. Аптекарев А.И. Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско. // Мат.сборник. – 1988. – 136. – С.56-84.

49. Калягин В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат.сборник. – 1979. – 110, N4. – С.609-627.

50. Kaliaguine V. The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials // J.Comput.Appl.Math. – 1995. – 65. – С.181-193.

51. Парусников В.И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместное приближение функций // Мат.сборник. – 1981. – 114, N2. – С.322-333.

52. Bruin M.G. de. Some convergence results in simultaneous rational approximation to the set of hypergeometric functions $\{{}_1F_1(1;c_i;z)\}_{i=1}^n$ // Lect.Notes Math. – 1984. – 1071. – P.12-33.

53. Bruin M.G. de. Some explicit formulae in simultaneous Padé approximation // Linear Algebra and Its Applications. – 1984. – 63, Dec. – P.271-281.

54. Bruin M.G. de. Simultaneous Padé approximation and orthogonality // Lect. Notes Math. – 1985. – 1171. – P.74-83.

55. Bruin M.G. de. Simultaneous rational approximation to some q-hypergeometric functions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation. Dordrecht: Reidel, 1988. – P.135-142.

56. Bruin M.G. de., Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of simultaneous Hermite-Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\left\{ {}_1\Phi_1 \left(\begin{matrix} (1,1) \\ (c,\gamma_j) \end{matrix} ; z \right) \right\}_{j=1}^{n}$ // Numerical Algorithms. – 1992. – 3. – P.185-192.

57. Bruin M.G. de., Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of simultaneous Hermite-Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\{{}_2\Phi_0\left((A,\alpha_j),(1,1);z\right)\}_{j=1}^{n}$ // J.Comput.Appl.Math. – 1993. – 49. – P.37-43.

58. Chudnovsky G.V. Padé approximation and the Riemann monodromy problem // Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics. – Dordrecht: Reidel, 1980. – P.449-510.

59. Chudnovsky G.V. Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // Lect.Notes Math. – 1982. – 925. – P.299-322.

60. Nuttall J. Hermite-Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface // J.Approx.Theory. – 1981. – 32, N3. – P.233-240.

61. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J.Approx.Theory. – 1984. – 42, N4. – P.299-386.

62. Beckermann B., Labahn G. A uniform approach for Hermite-Padé and simultaneous Padé approximants and their matrix-type generalizations // Numerical Algorithms. – 1992. – 3. – P.45-54.

63. Дзядык В.К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв.АН СССР. Сер.мат. – 1974. – 38, N4. – C.937-967.

64. Дзядык В.К. А-метод и рациональная аппроксимация // Укр.мат.журн. – 1985. – 37, N3. – C.250-252.

65. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988. – 304 с.

66. Биленко В.И., Коновалов В.Н., Луковский И.А., Лучка А.Ю., Пухов Г.Е., Ронто Н.И. Аппроксимационные методы Дзядыка решения дифференциальных и интегральных уравнений // Укр.мат.журн. – 1989. – 41, N4. – C.454-465.

67. Дзядык В.К., Филозоф Л.И. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций // Мат.сборник. – 1978. – 107, N3. – C.347-363.

68. Дзядык В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Мат.сборник. – 1979. – 108, N2. – C.247-267.

69. Дзядык В.К. Об обобщении проблемы моментов // Докл.АН УССР. – 1981. – N6. – С.8-12.

70. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.25).

71. Дзядык В.К., Голуб А.П. Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3.–15. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

72. Радзієвський Г.В. Приватне повідомлення.

73. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

74. Голуб А.П. Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981.– С.16–56. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

75. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной плоскости. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

76. Голуб А.П. Об аппроксимации Паде функции Миттаг–Леффлера // Теория приближения функций и ее приложения.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.52-59.

77. Чып М.Н. Наддиагональная аппроксимация Паде функции типа Миттаг–Леффлера $E_{1/2}(z;\alpha)$, $\mathrm{Re}\alpha > 0$ // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.129-138.

78. Walliser R. Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion // Arch.Math. – 1985. – 44, N1. – S.59-64.

79. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

80. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов// Укр.мат.журн.– 1989.– 41, N 6. – С. 803–808.

81. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

82. Jackson F.H. Transformation of q-series // Messenger Math. – 1910. – 39. – P.145-153.

83. Andrews E., Askey R. Classical orthogonal polynomials // Lect. Notes. Math. – 1985. – 1171. – P.36-62.

84. Голуб А.П. Об одной разновидности обобщенных моментных представлений// Укр. мат.журн. – 1989. – 41, N 11. – С. 1455–1460.

85. Golub A.P. Generalized moment representations and Padé approximants// Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Інституту математики НАН України. Т.31. - К.: Інститут математики НАН України, 2000. – С.144-160.

86. Golub A.P. Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations// Теорія наближень та гармонічний аналіз: Тези доповідей Українського математичного конгресу. Секція 10. - К.: Інститут математики НАН України, 2001. – С.16.

87. Iserles A., Nørsett S.P. On the theory of bi-orthogonal polynomials // Math. and Comput. – 1986. – N 1. – 42 p.

88. Brezinski C. Biorthogonality and its applications to numerical analysis. – N.Y.: Marcel Dekker, 1992. – 166 p.

89. Дзядык В.К. Обобщенная проблема моментов и аппроксимации Паде//Укр. мат. журн. – 1983. – 35, N3. – С. 297–302.

90. Голуб А.П. Некоторые свойства биортогональных полиномов// Укр. мат. журн. – 1989. – 41, N 10. – С. 1384–1388.

91. Castro G., Seghier A. Recurrence relation for biorthogonal polynomials // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1997. – 324, N 12. – P.1413-1418.

92. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

93. Голуб А.П. Некоторые свойства биортогональных полиномов и их приложения к аппроксимациям Паде// Укр. мат.журн. – 1994. – 46, N 8. – С. 977–984.

94. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления, биортогональные полиномы и аппроксимации Паде//Укр. мат.журн. – 1994. – 46, N 10. – С. 1328–1335.

95. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и свойства инвариантности аппроксимаций Паде// Укр.мат. журн. – 1996. – 48, N 3. – С. 309–314.

96. Rossum H. van. Systems of orthogonal and quasiorthogonal polynomials connected with the Padé table. I, II, III // Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen. Ser. A. – 1955. – 58, N 4. – P.517-534.

97. Голуб А.П. Доказательства теорем Паде и ван Россума с использованием обобщенных моментных представлений // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения.– Киев: Ин-т математики АН УССР,

1989. – С.37-43.

98. Голуб А.П. Интегральные уравнения типа свертки и аппроксимации Паде // Исследования по теории аппроксимации функций.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С.21-23.

99. Luke Y.L. The special functions and their approximations. Vol.2. – N.Y.: Academic Press, 1992. – 486 p.

100. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

101. Lubinsky D.S. Uniform convergence of rows of the Padé table for functions with smooth Maclaurin series coefficients // Constr. Approx. – 1987. – 3. – P.307-330.

102. Голуб А.П. Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях // Укр.мат.журн.– 1989.– 41, N 7. – С. 961–965.

103. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985. – 215 с.

104. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

105. Голуб А.П. О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр.мат.журн.– 1987.– 39, N 6. – С. 701–706.

106. Голуб А.П. Сходимость знаменателей совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр.мат.журн.– 1987.– 40, N 6. – С. 792–795.

107. Голуб А.П. О совместных аппроксимациях Паде набора функций типа Миттаг-Леффлера // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С.38-42.

108. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде-Чебышева // Укр.мат.журн.– 1990.– 42, N 6. – С. 762–766.

106. Голуб А.П. Апроксиманти Паде-Чебишева одного класу функцій // Укр.мат.журн.– 2002. –54, N 1. – С. 15-19.