УДК 517.53

Голуб А.П.

(Ін-т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА БАГАТОТОЧКОВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ

Using the method of generalized moment representations [3] approach is developed to construction and investigation of multipoint Padé approximants.

С использованием метода обобщенных моментных представлений разработан подход к построению и изучению многоточечных аппроксимаций Паде.

Поряд з класичними апроксимаціями Паде одним з важливих апаратів раціонального наближення функцій є так звані багатоточкові апроксимації Паде.

Означення 1 (див. [1, с.289]). Нехай $z_1, z_2, \dots, z_R \in \mathscr{D}$ – деякі точки, що належать зв'язній підмножині $\mathscr{D}$ комплексної площини, M та N -невід'ємні цілі числа, а $L = (l_1, l_2, \dots, l_R)$ – вектор з додатними цілими координатами такими, що $\sum\limits_{r=1}^{R} l_r = M + N + 1$. Будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f^L(z_1, \dots, z_R; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{1}$$

де $P_M(z)$ та $Q_N(z)$ - алгебраїчні многочлени степенів $\leq M$ та $\leq N$ відповідно, є багатоточковою (або ж R-точковою) апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ в точках $z_1, z_2, \dots, z_R$ індексу L функції f, аналітичної в області $\mathscr{D}$, якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z_1, \dots, z_R; z) = O((z - z_r)^{l_r}) \tag{2}$$

при $z \to z_r$, $r = \overline{1, R}$.

Очевидно, що при $R = 1$ і $z_1 = 0$ це означення збігається з означенням класичних апроксимацій Паде (див. [1, с.292]). В різних публікаціях багатоточкові апроксиманти Паде називаються також раціональними інтерполянтами, апроксимантами Ньютона–Паде та ін.

В роботі [2] було описано підхід до побудови та вивчення двоточкових апроксимацій Паде, що базується на застосуванні узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [3]. Наведемо відповідне означення.

Означення 2. Узагальненим моментним зображенням числової послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ називається двопараметрична сукупність рівностей

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{3}$$

де $x_k \in \mathscr{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathscr{Y}$, $j = \overline{0, \infty}$, а $\langle ., . \rangle$ - білінійна форма, визначена на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Будемо говорити, що узагальнене моментне зображення вигляду (3) визначене на банаховому просторі $\mathscr{X}$, якщо $x_k \in \mathscr{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathscr{X}^*$, $j = \overline{0, \infty}$, і $\langle x, y \rangle = y(x)$, де $y(x)$ – значення функціоналу $y \in \mathscr{X}^*$ на елементі $x \in \mathscr{X}$.

Легко бачити, що якщо в (3) $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{L}_2[\Delta, d\mu]$ – гільбертів простір функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$ на множині $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \int\limits_{\Delta} x(t)y(t)d\mu(t)$, за елементи x_k вибрати функції $x_k(t) = t^k$, $k = \overline{0, \infty}$, а за елементи y_j вибрати функції $y_j(t) = t^j$, $j = \overline{0, \infty}$, то отримаємо зображення, еквівалентне класичній проблемі моментів.

У випадку, коли в просторі $\mathscr{X}$ існує лінійний оператор $A : \ \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

а у просторі $\mathscr{Y}$ існує лінійний оператор $A^* : \ \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ такий, що

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \ \forall x \in \mathscr{X}, \ y \in \mathscr{Y},$$

(будемо називати оператор A^* спряженим до оператора A відносно білінійної форми $\langle, ., \rangle$) то зображення (3) еквівалентне зображенню

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{5}$$

При цьому твірна функція f послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \tag{6}$$

при додаткових припущеннях про збіжність рядів буде мати зображення

$$f(z) = \langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \rangle, \tag{7}$$

де $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ – резольвентна функція оператора A.

Має місце наступний результат, що узагальнює теорему 5.1 з [2] на випадок багатоточкових апроксимацій Паде.

Теорема. Нехай функція f аналітична в деякій зв'язній області D, що містить точки $z_0 := 0,\ z_1, \ldots, z_R$ і зображена в цій області степеневим рядом (6), для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle,\ k, j = \overline{0, \infty}, \tag{8}$$

і при цьому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ збігається в області D до аналітичної функції $\Phi : D \to \mathscr{X}$, яка в околах точок $z_1, z_2, \ldots, z_R$ має зображення у вигляді збіжних рядів $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k^{(r)} (z - z_r)^k,\ r = \overline{1, R}$. Нехай також для деяких $M, N \in \mathbb{Z}_+$, $M \geq N - 1$ і деякого індексу $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$, $l_0 \geq M + 1$ визначник

$$H_{N,M}^{(L)} = \begin{vmatrix} s_{M+1-N} & s_{M+2-N} & \ldots & s_M \\ . & . & \ldots & . \\ s_{l_0-N-1} & s_{l_0-N} & \ldots & s_{l_0-2} \\ s_{0,M+1-N}^{(1)} & s_{0,M+2-N}^{(1)} & \ldots & s_{0,M}^{(1)} \\ . & . & \ldots & . \\ s_{l_1-1,M+1-N}^{(1)} & s_{l_1-1,M+2-N}^{(1)} & \ldots & s_{l_1-1,M}^{(1)} \\ . & . & \ldots & . \\ s_{l_R-1,M+1-N}^{(R)} & s_{l_R-1,M+2-N}^{(R)} & \ldots & s_{l_R-1,M}^{(R)} \end{vmatrix},$$

де $s_{k,j}^{(r)} = \langle x_k^{(r)}, y_j \rangle$, є відмінним від нуля.

Тоді $(R+1)$–точкова апроксиманта Паде порядку $[M, N]$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_R$ індексу L функції f може бути записана у вигляді

$$[M/N]_f^L(z_0, z_1, \ldots, z_r; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}, P_M(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{M-N+j} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються з умов $\langle x_k^{(r)}, Y_N \rangle = 0$, $k = \overline{0, l_r - 1}$, $r = \overline{1, R}$, та $\langle x_k, Y_N \rangle = 0$, $k = \overline{0, l_0 - M - 2}$, в яких нетривіальний узагальнений поліном Y_N має вигляд $Y_N = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_{j+M+1-N}$. Якщо за вказаних умов в лінійному нормованому просторі $\mathscr{X}$ існує лінійний обмежений оператор A, такий що $Ax_k = x_{k+1}$, $k = \overline{0, \infty}$ і в області D є аналітичною його резольвентна функція $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, то похибка $(R+1)$–точкової апроксимації Паде порядку $[M/N]$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_R$ індексу $L = (l_0, l_1, \ldots, l_R)$ функції f може бути зображена у вигляді

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{M+1}(z - z_r)^{l_r}}{Q_N(z)} \langle \left[R_{z_r}^{\#}(A)\right]^{l_r} R_z^{\#}(A) x_0, Y_N \rangle,$$

а в околі точки $z_0 = 0$ – у вигляді

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)} \langle R_z^{\#}(A) x_{l_0 - M - 1}, Y_N \rangle.$$

Доведення. На основі (8) запишемо

$$s_{k+j+M+1-N} = \langle x_k, y_{j+M+1-N} \rangle, \; k, j = \overline{0, \infty}. \tag{9}$$

Помножимо рівності (9) на z^k і просумуємо їх по k від 0 до ∞. Зліва отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{k+j+M+1-N} z^k = \sum_{k=j+M+1-N}^{\infty} s_k z^{k-j-M-1+N} =$$

$$= \frac{1}{z^{j+M+1-N}} \left(f(z) - \sum_{m=0}^{j+M-N} s_k z^k \right). \tag{10}$$

Справа будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \langle x_k, y_{j+M+1-N}\rangle = \langle \Phi(z), y_{j+M+1-N}\rangle. \qquad (11)$$

Помножимо рівності (10) та (11) на $c_j^{(N)}$, $j=\overline{0,N}$, і просумуємо їх по j від 0 до N

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{f(z) - \sum\limits_{m=0}^{j+M-N} s_k z^k}{z^{j+M+1-N}} = \frac{1}{z^{M+1}}\left\{f(z)Q_N(z) - P_M(z)\right\}. \qquad (12)$$

Справа отримаємо

$$\sum_{j=0}^{N} \langle \Phi(z), y_{j+M+1-N}\rangle = \langle \Phi(z), Y_N\rangle =$$

$$= \begin{cases} O\left((z-z_r)_r^l\right) & \text{при } z \to z_r,\ r=\overline{1,R}, \\ O\left(z^{l_0-M-1}\right) & \text{при } z \to 0. \end{cases} \qquad (13)$$

З (12) та (13) випливає перше твердження теореми. Легко бачити, що

$$R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1} = (I - (z-z_r)A - z_rA)^{-1} =$$

$$= R_{z_r}^{\#}(A)(I-(z-z_r)AR_{z_r}^{\#}(A))^{-1} = R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_r)^k\left[AR_{z_r}^{\#}(A)\right]^k.$$

Отже маємо

$$x_k^{(r)} = R_{z_r}^{\#}(A)\left[AR_{z_r}^{\#}(A)\right]^k x_0 = \left[R_{z_r}^{\#}(A)\right]^{k+1} x_k.$$

Звідси отримаємо

$$f(z) - [M/N]_f^L(z) = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_r)^k\left[AR_{z_r}^{\#}(A)\right]^k x_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R_{z_r}^{\#}(A)\sum_{k=l_r}^{\infty}(z-z_r)^k\left[AR_{z_r}^{\#}(A)\right]^k x_0, Y_N\rangle = .$$

$$= \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}(z-z_r)^{l_r}\langle R^{\#}_{z_r}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_r)^k\left[AR^{\#}_{z_r}(A)\right]^{l_r+k}x_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1}(z-z_r)^{l_r}}{Q_N(z)}\langle\left[R^{\#}_{z_r}(A)\right]^{l_r}R^{\#}_{z}(A)x_0, Y_N\rangle.$$

В околі ж точки $z_0 = 0$ отримаємо

$$f(z) - [M/N]^L_f(z) = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle R^{\#}_z(A)x_0, Y_N\rangle = \frac{z^{M+1}}{Q_N(z)}\langle\sum_{k=0}^{\infty}z^kA^kx_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{M+1+l_0-N-1}}{Q_N(z)}\langle\sum_{k=0}^{\infty}z^kA^{k+l_0-M-1}x_0, Y_N\rangle =$$

$$= \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)}\langle A^{l_0-M-1}R^{\#}_z(A)x_0, Y_N\rangle = \frac{z^{l_0}}{Q_N(z)}\langle R^{\#}_z(A)x_{l_0-M-1}, Y_N\rangle.$$

Теорему доведено.

Розглянемо тепер багатоточкові апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції $f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z}$, $\nu > -1$. На основі теореми 2.2 з [4] можна зробити висновок, що для коефіцієнтів степеневого розвинення цієї функції $s_k = \frac{1}{(\nu+1)_{k+1}}$, $k = \overline{0,\infty}$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $C[0,1] \times L[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j}dt,\ k,j = \overline{0,\infty}.$$

Отже, в цьому випадку $(\Phi(z)x_0)(t) = \left(R^{\#}_z(A)x_0\right)(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^kt^k}{k!} = e^{zt}$. Легко бачити, що $e^{zt} = e^{(z-z_r)t+z_rt} = e^{z_rt}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_r)^kt^k}{k!}$, і $x^{(r)}_k = e^{z_rt}\frac{t^k}{k!}$, $k = \overline{0,\infty}$. Отже, для побудови багатоточкових апроксимант Паде функції $f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z}$, $\nu > -1$, порядку $[M/N]$ в точках $z_0 = 0, z_1, \dots, z_r$ індексу $L = (l_0, l_1, \dots, l_R)$ потрібно буде знайти нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^{N}c^{(N)}_j\frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 e^{z_r t}\frac{t^k}{k!}Y_N(t)dt = 0,\ k=\overline{0,l_r-1},\ r=\overline{1,R},$$

та

$$\int_0^1 \frac{t^k}{k!}Y_N(t)dt = 0,\ k=\overline{0,l_0-M-1}.$$

Оскільки система функцій $\{e^{z_r t}\}_{r=0}^{R}$ є AT–системою (див. [5]) на $[0,1]$, якщо тільки числа z_r є дійсними і різними між собою, то такий нетривіальний узагальнений поліном дійсно існує і має на $(0,1)$ рівно N простих нулів. Це дає змогу встановити наступний результат.

Твердження. $(R+1)$–точкова апроксиманта Паде функції $f(z)=\frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z}$, $\nu>-1$, порядку $[M/N]$, $M\geq N-1$, в точках $z_0=0,z_1,\ldots,z_r\in\mathbb{R}$ індексу $L=(l_0,l_1,\ldots,l_R)$, $l_0\geq M+1$, може бути зображена у вигляді

$$[M/N]_f^L(z_0,z_1,\ldots,z_r;z)=\frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}, P_M(z)=\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}z^{N-j}\sum_{m=0}^{M-N+j}\frac{1}{(\nu+1)_{m+1}}z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j=\overline{0,N}$, визначаються з умов

$$\int_0^1 e^{z_r t}\frac{t^k}{k!}\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}\frac{(1-t)^{j+\nu}}{(\nu+1)_j}dt=0,$$

для $k=\overline{0,l_r-1}$, $r=\overline{1,R}$; $k=\overline{0,l_0-N-2}$, $r=0$. При $N\to\infty$ ці апроксиманти будуть збігатися до наближуваної функції рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Література

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде.– М.: Мир, 1986. – 502 с.

2. Голуб А.П. Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981.– С.16–56. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

3. Дзядык В.К. Об обобщении проблемы моментов // Докл.АН УССР. – 1981. – N6. – С.8-12.

4. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.

5. Никишин Е.М. О совместных аппроксимациях Паде // Мат.сборник. – 1980. – 113, N4. – С.499-519.