

УДК 517.53

**Н. М. Гаврилюк** (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк)

**А. П. Голуб** (Ін-т математики НАН України, Київ)

### АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ РЯДІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ДРОБОВО–ЛІНІЙНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

*Exact expressions of Padé approximants are constructed for some basic hypergeometric series.*

*Для деяких базисних гіпергеометричних рядів побудовано явні вирази їх апроксимант Паде.*

В [1] встановлено такий результат.

**Теорема 1.** *Апроксиманти Паде функції*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0 z^k}{(1 - \delta \gamma^k) t_0 + \delta \gamma^k}, \quad (1)$$

де  $\gamma, \delta \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ,  $t_0 \in (0, 1)$ , порядків  $[N - 1/N]$ ,  $N \geq 1$ , існують, не вироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N - 1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \quad (2)$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} z^{N-k}, \quad (3)$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^m c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1 - \delta \gamma^{m-k}) t_0 + \delta \gamma^{m-k}}, \quad (4)$$

а  $c_k^{(N)}$ ,  $k = \overline{0, N}$ , – коефіцієнти біортогонального полінома

$$Y_N = \sum_{k=0}^N c_k^{(N)} y_k, \quad (5)$$

© Н. М. Гаврилюк, А. П. Голуб, 2014

що визначається співвідношеннями

$$Y_N(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

де

$$x_k(t) = \frac{t}{(1 - \delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j}\right), \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Відзначимо, що коефіцієнти ряду (1) можуть бути записані у вигляді

$$s_k = \frac{t_0}{t_0 - \delta t_0 \gamma^k + \delta \gamma^k} = \frac{t_0}{t_0 + \delta(1 - t_0)\gamma^k} = \frac{1}{1 + \varepsilon \gamma^k},$$

де

$$\varepsilon = \frac{\delta(1 - t_0)}{t_0}.$$

Для сталої  $\varepsilon$ , очевидно, справедливі нерівності  $0 < \varepsilon < \infty$ .

Отже, функцію (1) можна записати у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1 + \varepsilon \gamma^k}.$$

При  $q \neq 1$  та  $a \in \mathbb{R}$   $q$ -символ Похгаммера, або зсунутий  $q$ -факторіал визначається за формулою (див., наприклад, [2, с. 22])

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1 - a)(1 - aq) \cdot \dots \cdot (1 - aq^{n-1}), & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

З урахуванням цього позначення

$$1 + \varepsilon \gamma^k = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon\gamma) \cdot \dots \cdot (1 + \varepsilon\gamma^k)}{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon\gamma) \cdot \dots \cdot (1 + \varepsilon\gamma^{k-1})} = \frac{(1 + \varepsilon)(-\varepsilon\gamma; \gamma)_k}{(-\varepsilon; \gamma)_k}.$$

Таким чином,

$$f(z) = \frac{1}{1 + \varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_k}{(-\varepsilon\gamma; \gamma)_k} z^k = \frac{1}{1 + \varepsilon} {}_2\phi_1 \left[ \begin{matrix} \gamma; -\varepsilon \\ -\varepsilon\gamma \end{matrix}; \gamma; z \right], \quad (7)$$

де базисний гіпергеометричний ряд визначається формулою (див. [2, с. 23])

$${}_2\phi_1 \left[ \begin{matrix} a; b \\ c \end{matrix} ; q; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(q; q)_n (c; q)_n} z^n.$$

Відзначимо, що визначення коефіцієнтів біортогонального полінома (5) можна звести до підрахунку визначників матриці Коші, завдяки чому апроксиманти Паде (2)–(4) можна записати в явному вигляді. А саме, має місце наступний результат.

**Теорема 2.** *Апроксиманти Паде функції (7) при  $\gamma \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ,  $\varepsilon \in (0, \infty)$ , порядків  $[N - 1/N]$ ,  $N \geq 1$ , можуть бути записані у вигляді (2), де*

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^N z^{N-k} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{k+N}}{(-\varepsilon; \gamma)_k \gamma^{(2N-k-1)k/2} (\gamma; \gamma)_k (\gamma; \gamma)_{N-k}}.$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{2N-k}}{(-\varepsilon; \gamma)_{N-k} \gamma^{\frac{(N+k-1)(N-k)}{2}} (\gamma; \gamma)_k (\gamma; \gamma)_{N-k}} \times \\ \times \frac{1}{1 + \varepsilon \gamma^{m-k}}.$$

**Доведення.** Згідно з [3, с. 94] нетривіальний біортогональний поліном (5), для якого є справедливими співвідношення (6), можна записати в детермінантному вигляді

$$Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_N \end{vmatrix}, \quad (8)$$

де  $\varepsilon_N$  — ненульова константа, що може обиратися з міркувань нормування полінома  $Y_N$ . Розкладаючи визначник (8) за елементами

останнього рядка, отримаємо

$$Y_N = \varepsilon_N \sum_{j=0}^N (-1)^{N-j} y_j \times \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots & s_N \\ s_1 & \dots & s_j & s_{j+2} & \dots & s_{N+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{N-1} & \dots & s_{N+j-2} & s_{N+j} & \dots & s_{2N-1} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Але для послідовності  $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$  має місце узагальнене моментне зображення (див. [3, с. 91])

$$s_{k+j} = y_j(x_k) = x_k(t_j), \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Отже,

$$\begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_{j-1} & s_{j+1} & \dots & s_N \\ s_1 & \dots & s_j & s_{j+2} & \dots & s_{N+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{N-1} & \dots & s_{N+j-2} & s_{N+j} & \dots & s_{2N-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0(t_0) & \dots & x_0(t_{j-1}) & x_0(t_{j+1}) & \dots & x_0(t_N) \\ x_1(t_0) & \dots & x_1(t_{j-1}) & x_1(t_{j+1}) & \dots & x_1(t_N) \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{N-1}(t_0) & \dots & x_{N-1}(t_{j-1}) & x_{N-1}(t_{j+1}) & \dots & x_{N-1}(t_N) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Неважко переконатися, що визначник (10) можна виразити через визначник матриці Коші (див., наприклад, [4, с. 494]).

Дійсно,

$$\begin{aligned} x_k(t_j) &= \frac{t_j}{(1 - \delta\gamma^k)t_j + \delta\gamma^k} = \frac{1}{1 - \delta\gamma^k + \delta\gamma^k t_j^{-1}} = \frac{\gamma^{-k}}{\gamma^{-k} - \delta + \delta t_j^{-1}} = \\ &= \frac{\gamma^{-k}}{\xi_k + \eta_j}, \end{aligned}$$

де  $\xi_k = \gamma^{-k} - \delta$ ,  $\eta_j = \delta t_j^{-1}$ .

Таким чином, останній визначник дорівнює

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_0 + \eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_0 + \eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_0 + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_0 + \eta_N} \\ \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1 + \eta_0} & \cdots & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1 + \eta_{j-1}} & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1 + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{\gamma^{-1}}{\xi_1 + \eta_N} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1} + \eta_0} & \cdots & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1} + \eta_{j-1}} & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1} + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{\gamma^{-N+1}}{\xi_{N-1} + \eta_N} \end{vmatrix} = \\
 & = \prod_{k=0}^{N-1} \gamma^{-k} \begin{vmatrix} \frac{1}{\xi_0 + \eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_0 + \eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_0 + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_0 + \eta_N} \\ \frac{1}{\xi_1 + \eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_1 + \eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_1 + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_1 + \eta_N} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\xi_{N-1} + \eta_0} & \cdots & \frac{1}{\xi_{N-1} + \eta_{j-1}} & \frac{1}{\xi_{N-1} + \eta_{j+1}} & \cdots & \frac{1}{\xi_{N-1} + \eta_N} \end{vmatrix} = \\
 & = \prod_{k=0}^{N-1} \gamma^{-k} \frac{\prod_{i < m} (\xi_i - \xi_m) \prod_{i < m; i, m \neq j} (\eta_i - \eta_m)}{\prod_{i=0}^{N-1} \prod_{m=0; m \neq j}^N (\xi_i + \eta_m)} = \\
 & = \varkappa_N^{(1)} \frac{\prod_{m=1}^N \prod_{i=0}^{m-1} (\eta_j - \eta_m)}{\prod_{i=0}^{j-1} (\eta_i - \eta_j) \prod_{m=j+1}^N (\eta_j - \eta_m)} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (\xi_i + \eta_j)}{\prod_{i=0}^{N-1} \prod_{m=0}^N (\xi_i + \eta_m)} = \\
 & = \varkappa_N^{(2)} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (\xi_i + \eta_j)}{\prod_{i=0}^{j-1} (\eta_i - \eta_j) \prod_{m=j+1}^N (\eta_j - \eta_m)},
 \end{aligned}$$

тут і далі  $\varkappa_N^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , — деякі константи, що залежать від  $N$ , але не залежать від  $j$ . Підставимо в останню формулу значення

$$\xi_k = \gamma^{-k} - \delta, \quad \eta_j = \delta t_j^{-1}.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{X}_N^{(2)} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (\gamma^{-i} - \delta + \delta t_j^{-1})}{\prod_{i=0}^{j-1} (\delta t_i^{-1} - \delta t_j^{-1}) \prod_{m=j+1}^N (\delta t_j^{-1} - \delta t_m^{-1})} = \\
& = \mathcal{X}_N^{(2)} \frac{t_j^{-N} \prod_{i=0}^{N-1} \gamma^{-i} \prod_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta \gamma^i t_j + \delta \gamma^i)}{\delta^N t_j^{-N} \prod_{i=0}^{j-1} t_i^{-1} \prod_{m=j+1}^N t_m^{-1} \prod_{i=0}^{j-1} (t_j - t_i) \prod_{m=j+1}^N (t_m - t_j)} = \\
& = \mathcal{X}_N^{(3)} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta \gamma^i t_j + \delta \gamma^i)}{t_j \prod_{i=0}^N t_i^{-1} \prod_{i=0}^{j-1} (t_j - t_i) \prod_{m=j+1}^N (t_m - t_j)}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Розглянемо окремо

$$\begin{aligned}
t_j - t_i &= \frac{t_0}{(1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j} - \frac{t_0}{(1 - \gamma^i)t_0 + \gamma^i} = \\
&= \frac{t_0(1 - t_0)(\gamma^i - \gamma^j)}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)((1 - \gamma^i)t_0 + \gamma^i)}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Підрахуємо чисельник дробу (11), матимемо

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=0}^{N-1} (t_j - \delta \gamma^i t_j + \delta \gamma^i) = \\
&= \prod_{i=0}^{N-1} \left( \frac{t_0}{(1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j} - \frac{\delta \gamma^i t_0}{(1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j} + \delta \gamma^i \right) = \\
&= \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (t_0 - \delta \gamma^{i+j} t_0 + \delta \gamma^{i+j})}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N} = \frac{t_0^N \prod_{i=0}^{N-1} \left( 1 + \frac{\delta(1-t_0)}{t_0} \gamma^{i+j} \right)}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{t_0^N \prod_{i=0}^{N-1} (1 + \varepsilon \gamma^{i+j})}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N} = \frac{t_0^N (1 + \varepsilon \gamma^j)(1 + \varepsilon \gamma^{j+1}) \cdots (1 + \varepsilon \gamma^{j+N-1})}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N} = \\
 &= \frac{t_0^N (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon \gamma) \cdots (1 + \varepsilon \gamma^{j+N-1})}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon \gamma) \cdots (1 + \varepsilon \gamma^{j-1})} = \\
 &= \frac{t_0^N (-\varepsilon; \gamma)_{j+N}}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N (-\varepsilon; \gamma)_j}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Підставимо (12) та (13) в (11). Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 &\varkappa_N^{(4)} \frac{t_0^N (-\varepsilon; \gamma)_{j+N}}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N (-\varepsilon; \gamma)_j} \times \frac{(1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j}{t_0} \times \\
 &\quad \times \prod_{i=0}^{j-1} \frac{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)((1 - \gamma^i)t_0 + \gamma^i)}{t_0(1 - t_0)(\gamma^i - \gamma^j)} \times \\
 &\quad \times \prod_{m=j+1}^N \frac{((1 - \gamma^m)t_0 + \gamma^m)((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)}{t_0(1 - t_0)(\gamma^j - \gamma^m)} = \\
 &= \varkappa_N^{(5)} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{j+N} ((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^{N+1}}{((1 - \gamma^j)t_0 + \gamma^j)^N (-\varepsilon; \gamma)_j} \times \\
 &\quad \times \frac{\prod_{i=0}^{j-1} ((1 - \gamma^i)t_0 + \gamma^i) \prod_{m=j+1}^N ((1 - \gamma^m)t_0 + \gamma^m)}{(t_0(1 - t_0))^N \prod_{i=0}^{j-1} (\gamma^i - \gamma^j) \prod_{m=j+1}^N (\gamma^j - \gamma^m)} = \\
 &= \varkappa_N^{(6)} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{j+N} \prod_{i=0}^N ((1 - \gamma^i)t_0 + \gamma^i)}{(-\varepsilon; \gamma)_j \prod_{i=0}^{j-1} (\gamma^i - \gamma^j) \prod_{m=j+1}^N (\gamma^j - \gamma^m)} = \\
 &= \varkappa_N^{(7)} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon; \gamma)_j \prod_{i=0}^{j-1} (\gamma^i - \gamma^j) \prod_{m=j+1}^N (\gamma^j - \gamma^m)}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо окремо

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{j-1} (\gamma^i - \gamma^j) &= \prod_{i=0}^{j-1} \gamma^i \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \gamma^{j-i}) = \prod_{i=0}^{j-1} \gamma^i \prod_{i=1}^j (1 - \gamma^i) = \\ &= \gamma^{j(j-1)/2} \prod_{i=1}^j (1 - \gamma^i) = \gamma^{j(j-1)/2} (\gamma; \gamma)_j. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \prod_{m=j+1}^N (\gamma^j - \gamma^m) &= \prod_{m=j+1}^N \gamma^m (\gamma^{j-m} - 1) = \prod_{m=j+1}^N \gamma^m \cdot \prod_{m=1}^{N-j} (\gamma^{-m} - 1) = \\ &= \prod_{m=j+1}^N \gamma^m \cdot \prod_{m=1}^{N-j} \gamma^{-m} \cdot \prod_{m=1}^{N-j} (1 - \gamma^m) = \gamma^{(j+1+N)(N-j)/2} \times \\ &\times \gamma^{-(N-j)(N-j+1)/2} \prod_{m=1}^{N-j} (1 - \gamma^m) = \gamma^{j(N-j)} (\gamma; \gamma)_{N-j}. \end{aligned}$$

У результаті отримаємо для визначників (10) формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N^{(8)} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon; \gamma)_j \gamma^{j(j-1)/2 + j(N-j)} (\gamma; \gamma)_j (\gamma; \gamma)_{N-j}} = \\ = \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{j+N}}{(-\varepsilon; \gamma)_j \gamma^{(2N-j-1)j/2} (\gamma; \gamma)_j (\gamma; \gamma)_{N-j}}. \end{aligned}$$

Згідно з (9) це означає, що коефіцієнти полінома (5) можуть бути записані у вигляді

$$c_k^{(N)} = \varepsilon_N (-1)^{N-k} \frac{(-\varepsilon; \gamma)_{k+N}}{(-\varepsilon; \gamma)_k \gamma^{(2N-k-1)k/2} (\gamma; \gamma)_k (\gamma; \gamma)_{N-k}},$$

звідки і випливає твердження теореми.

1. Golub A. P. Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 335 – 339.



2. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. — М.: Мир, 1993. — 349 с.
3. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
4. *Маршалл А., Олкін Й.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.