Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2014, Т.12, №?, 146-155

УДК 517.53

Н.М. Гаврилюк, **А.П. Голуб** (Ін–т математики НАН України, Київ).

АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ q–АНАЛОГІВ ЕКСПОНЕНТИ ТА ЇХ УЗАГАЛЬНЕНЬ

Padé approximants are constructed for a class of basic hypergeometric series including q–exponential function.

Побудовано апроксиманти Паде для класу базисних гіпергеометричних рядів, що включає в себе q–аналог експоненціальної функції.

Для $|q| < 1$ базисним гіпергеометричним рядом називається ряд вигляду

$$
{}_r\phi_s \left[\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{array} ;\ q;\ z \right] =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdot \ldots \cdot (a_r, q)_n}{(q; q)_n (b_1; q)_n \cdot \ldots \cdot (b_s; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+s-r} z^n,
$$

(див. [3, с.23]) де q–символ Похгаммера $(a; q)_n$ визначається формулою

$$
(a; q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq) \cdot \ldots \cdot (1-aq^{n-1}), & n \geq 1, \\ 1, & n = 0, \\ \prod\limits_{m=0}^{\infty} (1 - aq^m) = \lim\limits_{n\to\infty} (a; q)_n, & n = \infty. \end{cases}
$$

Представниками базисних гіпергеометричних рядів є так звані q–аналоги експоненти

$$
e_q(z) = {}_1\phi_0(0; -; q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(z; q)_\infty}, \quad |z| < 1,
$$

та

$$E_q(z) = {}_0\phi_0(-;-;q;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n = (-z;q)_\infty.$$

Вони пов'язані між собою співвідношенням

$$e_q(z)E_q(-z) = 1,$$

і мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{q\to 1-} e_q(z(1-q)) = \lim_{q\to 1-} E_q(z(1-q)) = e^z$$

(див. [3, с. 28]).

В [5,6] запропоновано підходи до побудови та дослідження апроксимант Паде функції $e_q(z)$ та її узагальнень з використанням узагальнених моментних зображень. Зокрема, в [6] для цієї мети використано узагальнені моментні зображення вигляду

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0,\infty},$$

з оператором A та білінійною формою $< .,. >$, що виражаються через q–інтеграл Джексона (див. [3, с.39])

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q\tau = t(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k)q^k. \tag{1}$$

Цей же підхід можна використати і до побудови та вивчення апроксимант Паде функції $E_q(z)$ та її узагальнень.

При $0 \le \alpha < 1$ визначимо лінійний простір

$$\mathcal{X}_\alpha = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \exists M > 0, |f(x)x^\alpha \mid < M, \quad \forall x \in [0,1] \right\}.$$

Введемо в $\mathcal{X}_\alpha$ норму

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)x^\alpha|.$$

Тоді $\mathcal{X}_\alpha$ при кожному $0 \le \alpha < 1$ буде банаховим простором.

Неважко преконатися, що лінійний оператор A вигляду (1) є обмеженим в просторі $\mathcal{X}_\alpha$, а білінійна форма

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^1 \varphi(\tau)\psi(\tau) d_q\tau \tag{2}$$

є роздільно неперервною на добутку просторів $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$.

Спряженим до оператора A відносно білінійної форми (2) буде оператор

$$\left(A^\star \psi\right)(t) = \int\limits_{qt}^1 \psi(\tau) d_q\tau = \int\limits_0^1 \psi(\tau) d_q\tau - \int\limits_0^{qt} \psi(\tau) d_q\tau$$

(див.[6]).

Розглянемо в просторі $\mathcal{X}_\alpha$ оператор

$$\left(B\varphi\right)(t) = \left(A\varphi\right)(qt) = \int\limits_0^{qt} \varphi(\tau) d_q\tau = qt(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(tq^{n+1})q^n.$$

Легко бачити, що

$$\left(B\varphi\right)(t) = t(1-q)\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(tq^n)q^n = \left(A\varphi\right)(t) - (1-q)t\varphi(t).$$

А тому

$$\left(B^\star \psi\right)(t) = \left(A^\star \psi\right)(t) - (1-q)t\psi(t) = \int\limits_{qt}^1 \psi(\tau) d_q\tau - (1-q)t\psi(t) =$$

$$= \int\limits_t^1 \psi(\tau) d_q\tau.$$

Якщо покласти $x_0(t) \equiv 1$, то

$$x_k(t) = \left(B^k x_0\right)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k} q^{\frac{k(k+1)}{2}} t^k, \ k = \overline{0,\infty}. \tag{3}$$

Покладаючи $y_0(t) \equiv 1$, отримаємо послідовність

$$s_k = \langle B^k x_0, y_0 \rangle = \int\limits_0^1 x_k(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} x_k(q^n) q^n =$$

$$= \frac{(1-q)^{k+1} q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q;q)_{k+1}}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{4}$$

коефіцієнтів степеневого розвинення функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q;q)_k} z^{k-1} = \frac{E_q(-z(1-q)) - 1}{z}. \tag{5}$$

Резольвенту оператора B знаходимо з q–інтегрального рівняння

$$\varphi(t) - z(B\varphi)(t) = \psi(t),$$

$$\varphi(t) - z \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q \tau + z(1-q) t \varphi(t) = \psi(t). \tag{6}$$

Застосуємо до (6) оператор q–диференціювання (див. [1])

$$\frac{d_q}{d_q t} \Phi(t) = \frac{\Phi(t) - \Phi(qt)}{(1-q)t}. \tag{7}$$

Отримаємо

$$\frac{d_q}{d_q t} \varphi(t) - z\varphi(t) + z(1-q) q t \frac{d_q}{d_q t} \varphi(t) + z(1-q)\varphi(t) = \frac{d_q}{d_q t} \psi(t),$$

або ж

$$(1 + zq(1-q)t) \frac{d_q}{d_q t} \varphi(t) - zq\varphi(t) = \frac{d_q}{d_q t} \psi(t). \tag{8}$$

Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$(1 + zq(1-q)t) \frac{d_q}{d_q t} \varphi(t) = zq\varphi(t).$$

З урахуванням (7) звідси будемо мати

$$(1 + zq(1-q)t)\,\frac{\varphi(t) - \varphi(qt)}{(1-q)t} = zq\varphi(t),$$

або ж

$$\varphi(t) = (1 + zq(1-q)t)\,\varphi(qt).$$

Діючи аналогічно, далі отримаємо

$$\varphi(t) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + zq^m(1-q)t) \cdot \varphi(0).$$

Введемо позначення

$$\sigma(t) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^m(1-q)t)\,.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (8) будемо шукати у вигляді

$$\varphi(t) = C(t)\sigma(zt). \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (8), отримаємо

$$\frac{d_q}{d_q t}C(t) = \frac{1}{(1 + zq(1-q)t)\,\sigma(qzt)}\,\frac{d_q}{d_q t}\psi(t) = \frac{1}{\sigma(zt)}\,\frac{d_q}{d_q t}\psi(t).$$

Таким чином,

$$C(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(z\tau)}\,\frac{d_q}{d_q \tau}\psi(\tau) d_q\tau + C_0,$$

де C_0 — деяка константа. Для q–інтегралів є справедливою наступна формула інтегрування частинами

$$\int_0^t x(\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}y(\tau)d_q\tau = x(\tau)y(\tau)|_0^t - \int_0^t y(q\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}x(\tau)d_q\tau.$$

Отож,

$$C(t) = \frac{1}{\sigma(z\tau)}\psi(\tau)|_0^t - \int\limits_0^t \psi(\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}\frac{1}{\sigma(z\tau)}d_q\tau + C_0 =$$

$$= \frac{\psi(t)}{\sigma(zt)} - \psi(0) - \int\limits_0^1 \psi(q\tau)\frac{\frac{1}{\sigma(z\tau)} - \frac{1}{\sigma(zq\tau)}}{(1-q)\tau}d_q\tau + C_0.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{\sigma(z\tau)} - \frac{1}{\sigma(zq\tau)} = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+zq^m(1-q)\tau)} - \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}(1+zq^{m+1}(1-q)\tau)} =$$

$$= \frac{-zq(1-q)\tau}{\sigma(z\tau)},$$

дістанемо

$$C(t) = \frac{\psi(t)}{\sigma(zt)} - \psi(0) + zq\int\limits_0^t \frac{\psi(q\tau)}{\sigma(z\tau)}d_q\tau + C_0.$$

А значить,

$$\varphi(t) = (\mathcal{R}_z(B)\psi)(t) = \psi(t) - \psi(0)\sigma(zt) + zq\int\limits_0^t \frac{\sigma(zt)}{\sigma(z\tau)}\psi(q\tau)d_q\tau + C_0\sigma(zt).$$

Покладаючи $t = 0$, бачимо, що $\varphi(0) = \psi(0)$. Таким чином,

$$(\mathcal{R}_z(B)\psi)(t) = \psi(t) + zq\int\limits_0^t \frac{\sigma(zt)}{\sigma(z\tau)}\psi(q\tau)d_q\tau.$$

О.Коші встановив, що для всіх $a \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, $|w| < 1$ має місце розвинення (див., напр., [7, с. 31])

$$\prod_{m=0}^{\infty}\frac{(1-awq^m)}{(1-wq^m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}w^k.$$

При $a = t/\tau$, $w = -zq\tau(1-q)$ звідси отримаємо

$$\frac{\sigma(zt)}{\sigma(z\tau)} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 - zq^{m+1}t(1-q)}{1 - zq^{m+1}\tau(1-q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\tau;q)_k \left(-zq\tau(1-q)\right)^k}{(q;q)_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{m=0}^{k-1} (\tau - tq^m)}{(q;q)_k} \left(-zq(1-q)\right)^k .$$

Таким чином,

$$\left(\mathcal{R}_z(B)\psi\right)(t) = \psi(t) + zq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-zq(1-q)\right)^k}{(q;q)_k} \int\limits_0^t \prod_{m=0}^{k-1} \left(\tau - tq^m\right) \psi(q\tau) d_q\tau.$$

Звідси

$$\left(B^k\psi\right)(t) = \frac{(-q)^k(1-q)^{k-1}}{(q;q)_{k-1}} \int\limits_0^t \prod_{m=1}^{k-1} \left(\tau - tq^{m-1}\right) \psi(q\tau) d_q\tau, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Враховуючи формулу

$$\int\limits_0^1 x(t) \int\limits_0^t K(t,\tau) y(\tau) d_q\tau d_q t = \int\limits_0^1 y(\tau) \int\limits_{q\tau}^1 K(t,\tau) x(t) d_q t d_q\tau,$$

також дістанемо

$$\left(B^{\star j}\psi\right)(t) = \frac{(-q)^j(1-q)^{j-1}}{(q;q)_{j-1}} \int\limits_{qt}^1 \prod_{m=1}^{j-1} \left(t - \tau q^{m-1}\right) \psi(q\tau) d_q\tau, \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Покладаючи $y_0(t) \equiv 1$, отримаємо

$$y_j(t) = \frac{(1-q)^j (t;q)_j}{(q;q)_j}, \quad j = \overline{1,\infty}. \tag{10}$$

Таким чином, ми побудували узагальнене моментне зображення для послідовності степеневих коефіцієнтів функції (5).

Теорема 1. Для числової послідовності (4) коефіцієнтів степеневого розвинення функції (5) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$ за білінійною формою (2)

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \ k, j \in \mathbb{X}_+,$$

де $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначаються формулами (3), а $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ — формулами (10).

Це дозволяє нам побудувати явні вирази для апроксимант Паде функції (5) з використанням теореми В.К.Дзядика (див., напр., [4, с. 22–23]) та врахуванням того факту, що для q– поліномів Лежандра $L_N(t;q)$, що задовольняють умови ортогональності

$$\int_0^1 L_N(t;q) L_M(t;q) d_q t = 0$$

при $N \neq M$, відомі формули

$$L_N(t;q) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_k \left(q^{N+1};q\right)_k}{\left((q;q)_k\right)^2} (qt)^k$$

(див., напр., [1]).

Теорема 2. Апроксиманти Паде функції (5) порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \tag{11}$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-k} \left(q^{N+1};q\right)_{N-k}}{(1-q)^{N-k}(q;q)_{N-k}} q^{-(N-k)(N-k-1)/2} z^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{(1-q)^{N-1-k}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-m} \left(q^{N+1};q\right)_{N-m} q^{(k-N+1)(k+N+2m)/2}}{(q;q)_{N-m}(q;q)_{k-m+1}}.$$

Цілком аналогічно можна покласти $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -\alpha$, $y_0(t) \equiv 1$ і отримати:

$$x_k(t) = \left(B^k x_0\right)(t) = \frac{(1-q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k} q^{\frac{k(k+1)}{2}+k\nu} t^{k+\nu}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{12}$$

$$s_k = \langle B^k x_0, y_0 \rangle = \int\limits_0^1 x_k(t) d_q(t) = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} x_k\left(q^n\right) q_n =$$

$$= \frac{(1-q)^{k+1} q^{\frac{k(k+1)}{2}+k\nu}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{13}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q)^{k-1} q^{\frac{k(k-1)}{2}+(k-1)\nu}}{(q^{\nu+1};q)_k} z^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{z} \left\{ {}_1\phi_1 \left[\begin{array}{c} q \\ q^\nu \end{array} ;\ q;\ z \right] - 1 \right\}. \tag{14}$$

Отож, для функції (14) мають місце аналоги теорем 1 та 2.

Теорема 3. Для числової послідовності (13) коефіцієнтів степеневого розвинення функції (14) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $\mathcal{X}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$ за білінійною формою (2)

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle,\ k, j \in \mathbb{X}_+,$$

де $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначаються формулами (12), а $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ — формулами (10).

Теорема 4. Апроксиманти Паде функції (14) порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді (11), де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-k} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-k}}{(1-q)^{N-k}(q;q)_{N-k}} q^{-(N-k)(N-k+\nu-1)/2} z^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{(1-q)^{N-1-k}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{k} \frac{\left(q^{-N};q\right)_{N-m} \left(q^{N+\nu+1};q\right)_{N-m} q^{\frac{(k-N+1)(k+N+2m)-(N+m-2k)\nu}{2}}}{(q;q)_{N-m}(q^{\nu+1};q)_{k-m+1}}.$$

1. *Andrews G.E., Askey R.* Classical orthogonal polynomials // Lecture Notes Math. — 1985. — **1171**. — P.36–62.

2. *Гаврилюк Н.М., Голуб А.П.* Сумісні апроксимації Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів// Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, №4. — С.67–74.

3. *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. — М.: Мир, 1993. — 349 с.

4. *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ.: Ін–т математики НАН України, 2002. — 222 с.

5. *Голуб А.П.* Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрически рядов // Укр. мат. журнал. —1989. —**41**, №6. — С.803–808.

6. *Голуб А.П.* Об одной разновидности обобщенных моментных представлений // Укр. мат. журнал. —1989. —**41**, №11. —с.1455–1460.

7. *Эндрюс Дж.* Теория разбиений. — М.: Наука, 1982. — 256 с.