УДК 517.5

Голуб А.П.

(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В 1981 г. В.К. Дзядык [1] предложил понятие обобщенных моментных представлений числовых последовательностей, которое оказалось весьма полезным для решения задач построения и исследования поведения аппроксимаций Паде многих элементарных и специальных функций [2-3]. Приведем соответствующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что для последовательности комплексных чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ построено обобщенное моментное представление на произведении линейных пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, если известны последовательности $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathscr{X}$, $\{y_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathscr{Y}$ и билинейная форма $\langle .,. \rangle$, определенная на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, такие что $\forall k, j = \overline{0,\infty}$ справедливы равенства

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle. \tag{1}$$

В случае, когда в пространстве $\mathscr{X}$ существует такой линейный оператор $A : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}$, что

$$Ax_k = x_{k+1},\ k = \overline{0,\infty},$$

а в пространстве $\mathscr{Y}$ существует линейный оператор $A^* : \mathscr{Y} \mapsto \mathscr{Y}$, такой что

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad \forall x \in \mathscr{X}, \quad \forall y \in \mathscr{Y},$$

(будем называть оператор A^* сопряженным к оператору A относительно билинейной формы $\langle .,. \rangle$), представление (1) можно записать в виде

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle,\ k = \overline{0,\infty}. \tag{2}$$

При этом, если пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ являются нормированными и в некоторой области $\mathscr{D} \in \mathbb{C}$, содержащей начало координат, равномерно сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k A^k x_0$, то производящая функция f последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяемая рядом $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k z^k$, будет иметь представление

$$f(z) = \langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \rangle, \tag{3}$$

где $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, а I - тождественный в $\mathscr{X}$ оператор.

Легко видеть, что, если положить $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{L}[\Delta, d\mu]$ - гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом по мере $d\mu$ на борелевском множестве $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_{\Delta} x(t)y(t)d\mu(t)$, в качестве элементов x_k и y_j выбрать степенные функции $x_k(t) = y_k(t) = t^k$, $k = \overline{0,\infty}$, то представление (1) эквивалентно классической проблеме моментов на Δ (см., например, [4]). Как известно, для разрешимости классической проблемы моментов с неубывающей функцией μ, имеющей бесконечное число точек роста, необходимым условием является положительность определителей Ганкеля

$$H_N = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2N} \end{vmatrix} > 0,\ N = \overline{0,\infty}.$$

При этом, если ввести оператор A, действующий в $\mathscr{L}[\Delta, d\mu]$ по правилу

$$(Ax)(t) = tx(t),$$

то с учетом введенных обозначений представление (3) имеет вид

$$f(z) = \int\limits_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1 - zt}.$$

Функции, имеющие такие представления, называются марковскими функциями.

Вместе с тем множество последовательностей, имеющих представления вида (1)-(2), а соответственно и функций, представимых в виде (3) не ограничивается случаем классической проблемы моментов. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. В пространстве непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций $\mathscr{X} = C[0,1]$ расмотрим линейный ограниченный оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau,$$

для которого

$$(R_z^{\#}(A)\varphi)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Степени оператора A запишутся в виде

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Положим теперь $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Тогда

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!},$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Обобщенное моментное представление имеет вид

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)!} = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}\frac{(1-t)^j}{j!}dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Поскольку полученная функция f является целой и отлична от алгебраического многочлена, то для соответствующей последовательности классическая проблема моментов не разрешима (см. [5, Гл.VII, §2, п.4^0]).

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{X} = C[0;1]$ оператор A, действующий по правилу

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t),$$

который является линейной комбинацией оператора интегрирования, рассмотренного в предыдущем примере, и оператора умножения на независимую переменную, соответствующего классической степенной проблеме моментов на сегменте $[0;1]$. Тогда, решая соответствующее линейное интегральное уравнение, получим

$$(R_z^{\#}(A)\varphi)(t) = ((I - zA)^{-1}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - zt} + \varkappa z \int\limits_0^t \varphi(t)\frac{(1-\tau z)^{\varkappa - 1}}{(1 - tz)^{\varkappa + 1}}d\tau.$$

Поскольку в окрестности нуля $R_z^{\#}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k A^k$, то, раскладывая предыдущее равенство по степеням z, находим, что степени оператора A действуют по правилам

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-\varkappa + 1)_m (\varkappa + 1)_{k-1-m}}{m!(k-m-1)!}\tau^m t^{k-m-1} d\tau + t^k\varphi(t), \ k = \overline{1, \infty},$$

где через $(\alpha)_k$ обозначен символ Похгаммера:

$$(\alpha)_k := \alpha(\alpha+1)\cdot \ldots \cdot (\alpha + k - 1) \quad \text{при} \quad k \geq 1,$$

$$(\alpha)_0 := 1.$$

Положим теперь $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$, $\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Тогда

$$f(z) = \int\limits_0^1 (R_z^{\#}(A)x_0)(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{(1-zt)^{\varkappa+1}}dt = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z}.$$

Учитывая интегральное представление для гипергеометрической функции Гаусса (см.[6, п.15.3.1])

$$f(z) = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z} ={}_2 F_1(1, \varkappa+1; 2; z) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1-zt}\frac{t^{\varkappa}(1-t)^{-\varkappa}}{\Gamma(\varkappa+1)\Gamma(-\varkappa+1)}dt$$

видим, что при $|\varkappa| < 1$ полученная функция является марковской. Предположим, что так будет и при других значениях $\varkappa$, т.е.

$$f(z) = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z} = \int\limits_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Тогда

$$(1-z)^{-\varkappa} = 1 + \varkappa z\int\limits_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1-zt},$$

откуда при $z = iy$, $y \in \mathscr{R}$, получим

$$(1+y^2)^{-\varkappa/2}\left\{\sin\left(\varkappa \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) + i\cos\left(\varkappa \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)\right\} =$$

$$= 1 - \varkappa y^2\int\limits_{\Delta}\frac{td\mu(t)}{1+t^2y^2} + i\varkappa y\int\limits_{\Delta}\frac{d\mu(t)}{1+t^2y^2}.$$

Сравнивая поведение мнимых частей при $y \to \infty$, заключаем, что $-1 \le \varkappa \le 1$. Таким образом, полученная функция при $|\varkappa| > 1$ марковской не является. При этом обобщенное моментное представление имеет вид

$$s_{k+j} = \frac{(\varkappa+1)_{k+j}}{(k+j+1)!} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(\varkappa+1)_k t^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{j}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!}t^m dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

С учетом этого важным является вопрос об условиях существования представлений вида (1). Автором и В.К. Дзядыком [2] был установлен следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\mathscr{H}$ – бесконечномерное гильбертово пространство и $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная ортонормированная последовательность в нем. Тогда для того, чтобы числовая последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ имела в $\mathscr{H}$ обобщенное моментное представление вида

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

где

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

а элементы x_k, $k = \overline{0, \infty}$, и y_j, $j = \overline{0, \infty}$, имеют вид

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m, \tag{5}$$

и при этом $\alpha_k^{(k)} \neq 0$, $k = \overline{0, \infty}$, $\beta_j^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{0, \infty}$, необходимо и достаточно, чтобы все определители Ганкеля

$$H_N := H_{0,N} = \det \| s_{k+j} \|_{k,j=0}^{N}$$

последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ были отличными от 0.

Доказательство. Предположим, что представление (4) существует. Тогда

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m \right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{\min\{k,j\}} \alpha_m^{(k)} \beta_m^{(j)}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{6}$$

Рассмотрим при каждом $N = \overline{0, \infty}$ две треугольные матрицы

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_0^{(N)} & \alpha_1^{(N)} & \cdots & \alpha_N^{(N)} \end{pmatrix}$$

и

$$B_N = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \dots & \beta_0^{(N)} \\ 0 & \beta_1^{(1)} & \dots & \beta_1^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что, если ввести матрицы

$$S_N = \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2N} \end{pmatrix}, \quad N = \overline{0,\infty},$$

то равенства (6) равносильны равенствам

$$S_N = A_N B_N, \quad N = \overline{0,\infty},$$

и, следовательно,

$$H_N = \det\, S_N = \det A_N \cdot \det B_N =$$

$$= \prod_{k=0}^{N} \alpha_k^{(k)} \cdot \prod_{j=0}^{N} \beta_j^{(j)} \neq 0.$$

Чтобы доказать достаточность условий теоремы, примем во внимание, что согласно [7, гл.II, §4, теорема 1] любую невырожденную матрицу (и, в частности, невырожденные согласно условиям теоремы матрицы S_N, $N = \overline{0,\infty}$) можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы на верхнюю треугольную матрицу. Выберем числа $\alpha_k^{(k)}$, $k = \overline{0,\infty}$ и $\beta_j^{(j)}$, $j = \overline{0,\infty}$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha_0^{(0)}\beta_0^{(0)} = H_0, \quad \alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)} = \frac{H_1}{H_0}, \cdots, \alpha_N^{(N)}\beta_N^{(N)} = \frac{H_N}{H_{N-1}}, \cdots$$

и положим

$$\alpha_k^{(m)} = \alpha_k^{(k)} \frac{S_N \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 & m \\ 0 & 1 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{H_k}, \ k = \overline{0,m},$$

$$\beta_j^{(m)} = \beta_j^{(j)} \frac{S_N \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j-1 & j \\ 0 & 1 & \dots & j-1 & m \end{pmatrix}}{H_j}, \ j = \overline{0,m},$$

а $m = \overline{0,\infty}$, где через $S_N \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ q_1 & q_2 & \dots & q_r \end{pmatrix}$ обозначаются миноры матрицы S_N, расположенные на пересечении строк с номерами $0 \le p_1 < \ldots < p_r \le N$ и столбцов с номерами $0 \le q_1 < \ldots < q_r \le N$, т.е.,

$$S_N \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_r \\ q_1 & q_2 & \dots & q_r \end{pmatrix} = \det\|s_{p_k,q_j}\|_{k,j=0}^r.$$

Тогда при каждом $N = \overline{0,\infty}$ получим представление (9) с треугольными матрицами A_N и B_N, имеющими вид (7) и (8). По так выбранным числам $\alpha_k^{(m)}$

и $\beta_j^{(m)}$ при помощи равенств (5) зададим векторы x_k и y_j. Поскольку для соответствующих матриц (7) и (8) справедливы равенства (9), которые, как уже отмечалось, равносильны равенствам (4), то тем самым доказана и достаточность условий теоремы 1.

Замечание 1. Поскольку отличие от нуля определителя Ганкеля H_{N-1} последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ является необходимым условием существования и невырожденности аппроксиманты Паде $[N-1/N]_f(z)$ функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k z_k$ (см. [8, часть 1, теорема 1.1.2]), то тем самым теорема 1 утверждает, что обобщенные моментные представления последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ могут быть построены каждый раз, когда существуют и невырождены аппроксиманты Паде порядков $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k z^k$.

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы 1 мы могли убедиться, что каждый раз, когда выполнены ее условия, обобщенные моментные представления даже при фиксации пространства $\mathscr{H}$, ортонормированной последовательности $\{e_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ и вида (6) элементов x_k, $k=\overline{0,\infty}$, и y_j, $j=\overline{0,\infty}$, могут быть построены неоднозначно.

Перейдем теперь к выяснению условий существования представлений вида (2) и (3). Из результата Д.З. Арова [9, Предложение 1] вытекает, в частности, что для произвольной функции f, аналитической в круге $K_R=\{z: \ |z| \leq R\}$, $0<R<\infty$, и произвольного бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$, существуют элементы $x_0, y_0 \in \mathscr{H}$ и линейный ограниченный оператор $A: \ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, норма которого меньше $1/R$, и такой что $\forall z \in K_R$

$$f(z)=(R_z^{\#}(A)x_0, y_0). \tag{10}$$

Как отметил М.Л. Горбачук, аналогичное утверждение можно получить также из интегральной формулы Коши.

Замечание 3. В указанных построениях линейный оператор определяется только радиусом круга аналитичности, но не зависит от самой функции f, в связи с чем для наборов функций $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, аналитических в круге K_R, можно строить представления вида

$$f_\lambda(z)=(R_z^{\#}(A)x_0, y_0^{(\lambda)}),$$

что является существенным при изучении совместных аппроксимаций Паде наборов $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ (см., например, [10]).

Аналогичный результат справедлив и в случае целых функций.

Теорема 2. Для произвольной целой функции f и произвольного бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ существуют элементы $x_0, y_0 \in \mathscr{H}$ и линейный ограниченный оператор $A: \ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ с нулевым спектральным радиусом такой, что $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z)=(R_z^{\#}(A)x_0, y_0). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть функция f представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

Из условий теоремы вытекает, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|s_k|} = 0.$$

Отсюда следует, что можно выбрать монотонно убывающую к нулю последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ такую, что $\forall k = \overline{0,\infty}$

$$\sqrt[k]{|s_k|} \leq \delta_k.$$

В частности, если f является целой функцией конечного порядка ρ, то можно положить

$$\delta_k = \frac{\gamma}{n^{\rho}},$$

где $\gamma = \mathrm{const} > 0$ (см. [11, Глава 7, §1]). Для произвольного ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства $\mathscr{H}$ и произвольного $\lambda > 1$ рассмотрим последовательность элементов

$$x_k = (\lambda\delta_k)^k e_k, \ k = \overline{0,\infty},$$

и определим на элементах базиса $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ линейный ограниченный оператор A:

$$Ae_k = \lambda \frac{\delta_{k+1}^{k+1}}{\delta_k^k} e_{k+1}, \ k = \overline{0,\infty}.$$

Легко видеть, что

$$Ax_k = x_{k+1}, \ k = \overline{0,\infty},$$

С другой стороны, поскольку

$$A^m e_k = \lambda^m \frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k} e_{k+m}, \ k = \overline{0,\infty},$$

то

$$||A^m|| = \sup_k \lambda^m \frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k} = \sup_k \left(\frac{\delta_{k+m}}{\delta_k}\right)^k (\lambda\delta_{k+m})^m \leq (\lambda\delta_{k+m})^m,$$

а следовательно,

$$\sqrt[m]{||A^m||} \leq \lambda\delta_{k+m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, оператор A имеет нулевой спектральный радиус. Определим теперь элемент $y_0 \in \mathscr{H}$ в виде суммы следующего ряда

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^m} s_m e_m.$$

Очевидно,

$$||y_0||^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^{2m}} |s_m|^2 \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} < \infty,$$

следовательно, $y_0 \in \mathscr{H}$. С другой стороны

$$(x_k, y_0) = \left((\lambda\delta_k)^k e_k, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda\delta_m)^m} s_m e_m \right) = s_k,\ k = \overline{0,\infty},$$

а значит, справедливо представление (11).

Замечание 4. Из доказательства видно, что, если взять набор $\{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ целых функций порядка ρ, то для них можно построить представления вида

$$f_\lambda(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0^{(\lambda)})$$

с общим оператором A, имеющим нулевой спектральный радиус. Более того, оператор A может быть построен таким образом, что $\forall n = \overline{1,\infty}$

$$\sqrt[n]{||A^n||} \le \frac{C}{n^\rho},$$

где $C = \text{const}$.

Замечание 5. В теореме 2 доказано существование представлений для функций f в виде (10), (13), т.е. в терминах скалярного произведения, которое, как известно, является полуторалинейной формой. Трансформация этих представлений в представления в терминах билинейных форм является очевидной.

Автор благодарит члена-корреспондента НАН Украины М.Л. Горбачука за полезные обсуждения.

Литература

1. Дзядык В.К. Об обобщении проблемы моментов//Докл. АН УССР. – 1981. – N 6. – С. 8–12.

2. Дзядык В.К., Голуб А.П. Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3.–15. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

3. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.25).

4. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.– М.: ГИФМЛ, 1961. – 312 с.

5. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.– Киев: Наукова думка, 1988. – 304 с.

6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами.– М.: Наука, 1979. – 832 с.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1967. – 576 с.

8. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде.– М.: Мир, 1986. – 502 с.

9. Аров Д.З. Пассивные линейные стационарные динамические системы//Сиб. мат. журн. – 1979. – 20, N2. – С. 211–228.

10. Голуб А.П. О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций// Укр. мат. журн. – 1987. – 39, N6. – С. 701–706.

11. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.