УДК 517.53

Голуб А.П.
(Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ-ЧЕБИШЕВА ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

В 1981 р. В.К.Дзядик [1] запропонував поняття узагальнених моментних представлень, що надалі [2-3] було застосоване до побудови та вивчення раціональних апроксимацій ряду спеціальних функцій.

Означення 1. *Узагальненим моментним представленням числової послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *на добутку двох лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *називається двохпараметрична сукупність рівностей*

$$s_{k+j} =< x_k, y_j >, \ k, j = \overline{0, \infty}, \qquad (1)$$

де $x_k \in \mathscr{X}, \ k = \overline{0, \infty}, y_j \in \mathscr{Y}, \ j = \overline{0, \infty},$ *а* $< .,. > -$ *білінійна форма, означена на* $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

В [4] метод узагальнених моментних представлень було застосовано до побудови та дослідження апроксимацій Паде-Чебишева.

Означення 2. *Нехай функція* $f \in C[-1, 1]$ *розкладаєть-*

ся в рівномірно збіжний ряд Фур'є-Чебишева вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z), \tag{2}$$

де $T_k(z) = \cos\arccos z$ *- многочлени Чебишева першого роду. Апроксимантою Паде-Чебишева функції* f *порядку* $[M/N]$ *називається раціональний поліном*

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{3}$$

степінь чисельника якого не перевищує M, *а степінь чисельника не перевищує* N, *і такий, що має місце розвинення*

$$f(z)Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z). \tag{4}$$

В даній статті встановлено результати, що узагальнюють результати статті [4].

Теорема 1. *Нехай функція* f *розкладається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є-Чебишева*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z), \tag{5}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і при цьому для послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне представлення*

$$s_{k+j} = < x_k, y_j >, \ k, j = \overline{0, \infty} \tag{6}$$

на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Нехай, крім того, при деяких $M \geq N$, $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ є відмінним від нуля визначник

$$\Delta[M/N] = \det \|s_{M+1+k+j} + s_{M+1+k-j}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0. \qquad (7)$$

Тоді апроксиманта Паде-Чебишева функції f порядку $[mM + n/mN]$ існує і має представлення

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)}, \qquad (8)$$

де

$$Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} T_{mk}(z), \qquad (9)$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{k} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{M} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}), \qquad (10)$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, визначаються з умов біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (x_{M+1+k} + x_{M+1-k}) \qquad (11)$$

вигляду

$$< X_N, y_j >= 0,\ j = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Враховуючи (5) та (9), отримаємо

$$f(z)Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_{mj}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(T_{m(k+j)+n}(z) + T_{|m(k-j)+n|}(z) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=j}^{\infty} s_{k-j} T_{mk+n}(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{[j-n/m]} s_k T_{m(j-k)-n}(z) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=[j-n/m]+1}^{\infty} s_k T_{m(k-j)+n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k-j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}(s_{k-j}+s_{k+j}) =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) < X_N, y_{k-M-1} >,$$

звідки і випливає твердження теореми 1.

Теорема 2. *Апроксиманти Паде-Чебишева функцій, що мають представлення*

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} d\mu(t), \qquad (10)$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, *а* $\mu(t)$ *- неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті* $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$, *порядків* $[mM + n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, *мають представлення*

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)}, \qquad (11)$$

де

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2} U_N(2T_m(z)), \qquad (12)$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} \left(U_N(2T_m(z)) - U_N(t + 1/t)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_N(t + 1/t) \right) d\mu(t), \qquad (13)$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ визначаються з умов біортогональності для полінома $X_N(t) = t^{M+1}U_N(t+1/t)$ вигляду

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t) d\mu(t) = 0, \ k = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Оскільки, як відомо (див. [5, с.144])

$$\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} T_{km+n}(z) t^k,$$

то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{km+n}(z),$$

де

$$s_k = \int\limits_{\alpha}^{\beta} t^k d\mu(t).$$

Отже, у відповідності з теоремою 1, щоб побудувати апроксиманту Паде-Чебишева функції f порядку $[mM+n/mN]$, $M \geq N \geq 0$ необхідно побудувати біортогональний поліном

$$X_N(t) = t^{M+1} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \left(t^j + t^{-j}\right),$$

що задовольняє умовам

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t) d\mu(t) = 0, \ k = \overline{0, N-1}.$$

Неважко бачити, що поліном $X_N(t)/t^{M+1}$ буде алгебраїчним многочленом степеня N від змінної $t+1/t$. Позначимо його через $U_N(w)$. Отже

$$\frac{X_N(t)}{t^{M+1}} = U_N\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

Оскільки системи функцій $\{t^k\}_{k=0}^N$ та $\{t^{M+1}(t+1/t)^j\}_{j=0}^N$ є чебишевськими на $[\alpha,\beta]$, то згідно з [3] невироджена біортогоналізація можлива. Крім того, поліном $U_N(t+1/t)$ має на (α,β) рівно N простих нулів. Розглянемо тепер

$$U_N(2T_m(z)) = \sum_{j=0}^N c_j^{(N)}\left(e^{imj\arccos z} + e^{-imj\arccos z}\right) =$$

$$= 2\sum_{j=0}^N c_j^{(N)} T_{mj}(z) = 2Q_{mN}(z).$$

Таким чином, знаменник апроксиманти Паде-Чебишева $[mM+n/MN]_f^T(z)$ має вигляд

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2}U_N(2T_m(z)).$$

Користуючись (10) та (12) отримаємо

$$f(z)Q_{mN}(z) = Q_{mN}(z)\int_\alpha^\beta \frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}d\mu(t) =$$

$$= Q_{mN}(z)\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}-\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)\right)d\mu(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{M}s_kT_{km+n}(z)\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)\right)U_N(2T_m(z))d\mu(t)+Q_{mN}(z)\sum_{k=0}^{M}s_kT_{km+n}(z)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}-\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)\right)\left(U_N(2T_m(z))-U_N(t+1/t)\right)d$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}-\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)\right)U_N(t+1/t)d\mu(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)U_N(2T_m(z))d\mu(t),$$

звідки і випливає формула (13).

Література

1. Дзядык В.К. Об обобщении проблемы моментов//Докл. АН УССР. – 1981. – N 6. – С. 8–12.

2. Дзядык В.К., Голуб А.П. Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3.–15. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

3. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.25).

4. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде-Чебышева//Укр.мат.журн. – 1990. – **42**, N 6. – С. 762–766.

5. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.– М.: Наука, 1983. – 384 с.