УДК 517.53

А.П. Голуб, Л.О.Чернецька (Інститут математики НАН України, Київ)

A.P. Golub, L.O.Chernetska

Апроксиманти типу Паде деяких класів функцій кількох змінних

Padé type approximants for some classes of multivariate functions

By means of the extension of V.K. Dzyadyk's method of generalized moment representations to the multidimensional case, we construct and investigate Padé type approximants for some classes of multivariate functions.

С помощью распространения метода обобщенных моментных представлений В.К. Дзядыка на многомерный случай, построены и исследованы аппроксиманты типа Паде для некоторых классов функций нескольких переменных.

Одним з найбільш ефективних і поширених апаратів раціональної апроксимації аналітичних функцій є апроксиманти Паде. Питанням побудови та дослідження апроксимацій типу Паде функцій багатьох змінних займаються вже понад чотирьох десятків років. Їхньому вивченню і застосуванню присвячена обширна література (див., наприклад, [1], [2], бібліографію в [3]).

У 1981 році В.К. Дзядик [4] запропонував метод узагальнених моментних зображень, який дозволив з єдиних позицій розглядати питання, пов'язані з вивченням апроксимант Паде багатьох важливих спеціальних функцій, зокрема, таких, що не належать до класу марковських функцій. Даний підхід було розвинуто А.П.Голубом в [5], [6].

Вказаний підхід було поширено на багатовимірний випадок (див. [7]). Метою даної статті є побудова апроксимант типу Паде для деяких класів функцій кількох змінних спеціального вигляду .

Наведемо відповідне означення.

Означення 1(7). *Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$ називається сукупність рівностей*

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \quad \mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{1}$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathscr{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathscr{Y}$.

Розглянемо формальний степеневий ряд за d змінними

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_d)\in\mathbb{C}^d, \mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}_+^d, \mathbf{z}^{\mathbf{k}}=z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_d^{k_d}$.

Введемо для зручності ряд позначень.

Для $p = 0, 1, \ldots, d$ позначимо $\Omega_p = \big\{\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, d\} : |\omega| = p\big\}$.

Впорядкуємо елементи кожної з множин $\omega \in \Omega_p :$ $\omega = \{l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, l_p(\omega)\}$ так, що $1 \leqslant l_1(\omega) < l_2(\omega) < \ldots < l_p(\omega) \leqslant d$.

Те ж саме зробимо з елементами доповнення $\overline{\omega} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus \omega =$ $= \{m_1(\omega), m_2(\omega), \ldots, m_{d-p}(\omega)\} \in \Omega_{d-p}$ так, що $1 \leqslant m_1(\omega) < m_2(\omega) <$ $< \ldots < m_{d-p}(\omega) \leqslant d$.

Для кожної множини $\omega \in \Omega_p, p = 1, \ldots, d$, введемо позначення

$$\boldsymbol{\delta}(\omega) = (\delta_1(\omega), \delta_2(\omega), \ldots, \delta_d(\omega)),$$

де

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = (\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots, \varepsilon_d(\omega)),$$

де

$$\varepsilon_i(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

так що

$$\delta_i(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega) + 1}{2}, i = 1, 2, \ldots, d.$$

Позначимо також $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d$, так що $\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}(\varnothing), \mathbf{0} = \boldsymbol{\delta}\big(\{1, 2, \ldots, d\}\big)$.

Для векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$, через $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ позначимо покоординатний добуток векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_d b_d)$.

Для кожного вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ позначимо

$$\Delta(\mathbf{a}) = \big\{\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d : j_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}, i = 1, 2, \ldots, d\big\}.$$

Розглянемо при фіксованому $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}_+^d$ деяку неперервну функцію $\Phi_{\mathbf{N}} : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) множина $\mathscr{D}_{\Phi_{\mathbf{N}}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d | \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ — обмежена в $\mathbb{R}_+^d$;

2) потужність множини $\mathscr{D}_{\Phi_{\mathbf{N}}} \bigcap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d | x_i \geqslant N_i, i = 1, 2, \ldots, d\}$ дорівнює $\prod\limits_{i=1}^{d} (N_i + 1) - 1$;

3) для всіх $i = 1, 2, \ldots, d$ існують однозначно визначені функції

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

для $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_+^{d-1} | \, \exists x_i \in \mathbb{R}_+ : \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ такі, що $\Phi_{\mathbf{N}}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d), x_{i+1}, \ldots, x_d) \equiv 0$;

4) при кожному $i = 1, 2, \ldots, d : \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \geqslant N_i$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i$.

З врахуванням цих позначень встановлено результат, що дозволяє для рядів вигляду (2) з коефіцієнтами, для яких справедливі зображення вигляду (1), будувати їх d-вимірні апроксиманти типу Паде.

Теорема 1 [7]. *Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду вигляду* (2) *справджується узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Якщо для деякого* $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ *існує узагальнений поліном вигляду*

$$Y_{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}} \tag{3}$$

такий, що $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$, *і при* $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : \mathbf{k} + \mathbf{N} \in \mathscr{D}_{\Phi_{\mathbf{N}}}\}$ *виконуються умови біортогональності*

$$\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}} \rangle = 0. \tag{4}$$

Тоді раціональна функція

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(z)},$$

де $Q(z) = \sum\limits_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c^{(\mathbf{N})}_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}$, *а* $P(\mathbf{z}) = \sum\limits_{p=0}^{d-1}\sum\limits_{\omega\in\Omega_p}\prod\limits_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum\limits_{\substack{0\leqslant k_{m_i(\omega)}\leqslant N_{m_i(\omega)}-1, i=1,2,\ldots,d-p\\ \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{k})\leqslant 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$
$\times \sum\limits_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}} s_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}$,

має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) для всіх $\mathbf{k}\in\mathscr{D}_{\Phi_{\mathbf{N}}}\cap\mathbb{Z}^d_+$, *а, отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде ряду (2) порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \mathscr{D}_{\Phi_{\mathbf{N}}}\cap\mathbb{Z}^d_+ \setminus \{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d_+ : x_i \geqslant N_i, i=1,2,\ldots,d\}$, *а* $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Узагальнені моментні зображення вигляду (1) можна записати також в операторному вигляді. Припустимо, що лінійні простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є нарізно неперервною, і у просторі $\mathscr{X}$ задано попарно комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_i : \mathscr{X}\to\mathscr{X}, i=1,2,\ldots,d$, такі що

$$A_i x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}, i=1,2,\ldots,d,$$

для кожного $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_+$, де $\mathbf{e}_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) = \mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}(\{i\})$, $i=1,2,\ldots,d$, а у просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_i^{\star} : \mathscr{Y}\to\mathscr{Y}, i=1,2,\ldots,d$, спряжені відповідно до операторів $A_i, i=1,2,\ldots,d$, відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Тоді зображення (1) можна записати у вигляді

$$s_{\mathbf{k}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{0}}\rangle = \Big\langle \prod_{i=1}^{d} A_i^{k_i} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}}\Big\rangle,\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d_+, \tag{5}$$

і ряд (2) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(\mathbf{z}) = \Big\langle \prod_{i=1}^{d} \mathcal{R}_{z_i}(A_i) x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \Big\rangle, \tag{6}$$

де $\mathcal{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвентна функція оператора A.

Нехай $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L_2([0,1], d\mu)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією μ, яка має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$. Задамо на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) y(t) d\mu(t), \tag{7}$$

яка буде нарізно неперервною.

Розглянемо в просторі $\mathscr{X}$ при деякому фіксованому $d_1, 1 < d_1 < d$, обмежені, попарно комутуючі між собою лінійні оператори $A_1, A_2, \dots, A_d :$ $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$:

$$(A_p \varphi)(t) = t\varphi(t), p = \overline{1, d_1},$$

$$(A_l \varphi)(t) = (1-t)\varphi(t), l = \overline{d_1+1, d}.$$

В такому разі при $x_{\mathbf{0}}(t), y_{\mathbf{0}}(t) \equiv 1$ функцію (2) запишемо у вигляді

$$f(\mathbf{z}) = \Big\langle \prod_{k=1}^{d_1} \mathcal{R}_{z_k}(A_1) \prod_{m=d_1+1}^{d} \mathcal{R}_{z_m}(A_d) x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \Big\rangle =$$

$$= \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{\prod\limits_{k=1}^{d_1}(1 - z_k t) \prod\limits_{k=d_1+1}^{d}(1 - z_k(1-t))}. \tag{8}$$

Очевидно,

$$\frac{1}{1 - z_m(1-t)} = \frac{1}{1 - z_m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_m t}{z_m - 1}} = \frac{1}{1 - z_m} \cdot \frac{1}{1 - \widetilde{z}_m t},$$

де $\widetilde{z}_m = \dfrac{z_m}{z_m - 1}$.

В [1] було використано співвідношення

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{d}(1-w_kt)}=\frac{1}{\prod\limits_{k<j}(w_k-w_j)}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{d}w_k^{d-1}(-1)^{k+1}\prod_{\substack{p<q\\p,q\neq k}}(w_p-w_q)\cdot\frac{1}{1-w_kt}\right\}=$$

$$=(-1)^{d-1}\sum_{k=1}^{d}\frac{w_k^{d-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{d}(w_p-w_k)}\cdot\frac{1}{1-w_kt}.$$

Враховуючи це так покладаючи

$$w_k=\begin{cases}z_k & \text{при } k=\overline{1,d_1},\\ \widetilde{z}_k=\dfrac{z_k}{z_k-1} & \text{при } k=\overline{d_1+1,d}.\end{cases}$$

Отримуємо:

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{d_1}(1-z_kt)\prod\limits_{k=d_1+1}^{d}(1-z_k(1-t))}=$$

$$=\prod_{k=d_1+1}^{d}\frac{1}{1-z_k}\cdot\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{d_1}(1-z_kt)\prod\limits_{k=d_1+1}^{d}(1-\widetilde{z}_kt)}=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{k=d_1+1}^{d}(1-z_k)}(-1)^{d-1}\left\{\sum_{k=1}^{d_1}\frac{z_k^{d-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{d_1}(z_p-z_k)\prod\limits_{p=d_1+1}^{d}(\widetilde{z}_p-z_k)}\cdot\frac{1}{1-z_kt}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=d_1+1}^{d}\frac{\widetilde{z}_k^{d-1}}{\prod\limits_{p=1}^{d_1}(z_p-\widetilde{z}_k)\prod\limits_{\substack{p=d_1+1\\p\neq k}}^{d}(\widetilde{z}_p-\widetilde{z}_k)}\cdot\frac{1}{1-\widetilde{z}_kt}\right\}=$$

$$=(-1)^{d-1}\left\{\sum_{k=1}^{d_1}\frac{z_k^{d-1}}{\prod\limits_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{d_1}(z_p-z_k)\prod\limits_{p=d_1+1}^{d}(z_p+z_k-z_pz_k)}\cdot\frac{1}{1-z_kt}+\right.$$

$$+(-1)^{d_1}\sum_{k=d_1+1}^{d}\frac{z_k^{d-1}}{\prod\limits_{p=1}^{d_1}(z_p+z_k-z_pz_k)\prod\limits_{\substack{p=d_1+1\\ p\neq k}}^{d}(z_k-z_p)}\cdot\frac{1}{1-z_k(1-t)}\Bigg\}.$$

Коефіцієнти $s_{\mathbf{k}}$ в розвиненні функції f в формальний степеневий ряд d змінних мають вигляд

$$s_{\mathbf{k}}=\langle x_{\mathbf{k}},y_{\mathbf{0}}\rangle=\langle A_1^{k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}}A_d^{k_{d_1+1}+\ldots+k_d}x_{\mathbf{0}},y_{\mathbf{0}}\rangle=$$

$$=\int\limits_0^1 t^{k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}}(1-t)^{k_{d_1+1}+\ldots+k_d}d\mu(t). \qquad (9)$$

Для знаходження апроксиманти типу Паде для функції (2) за теоремою 1, нам потрібно побудувати поліноми

$$X_{\mathbf{N}}(t)=\sum_{k_1=0}^{N_1}\ldots\sum_{k_d=0}^{N_d}c_{k_1,k_2,\ldots,k_d}^{(N_1,\ldots,N_d)}t^{k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}}(1-t)^{k_{d_1+1}+\ldots+k_d},$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\langle X_{\mathbf{N}},y_{\mathbf{j}}\rangle=0 \qquad (10)$$

при $\mathbf{j}\in\big\{(j_1,j_2,\ldots,j_d)\in\mathbb{Z}_+^d|\, j_i\in[0,N_i], i=\overline{1,d}\big\}\setminus\big\{(N_1,N_2,\ldots,N_d)\big\}$.

Оскільки в даному випадку $X_{\mathbf{N}}(t)$ буде алгебраїчним многочленом степеня $N_1+N_2+\ldots+N_d$, який ортогональний до многочленів степеня $\leqslant N_1+\ldots+N_d-1$, то він збігатиметься з точністю до сталого множника з многочленом степеня $N_1+\ldots+N_d$, ортонормованим на $[0,1]$ за мірою $d\mu$ (див. [8, с. 268]):

$$\sum_{k_1=0}^{N_1}\ldots\sum_{k_d=0}^{N_d}c_{k_1,\ldots,k_d}^{(N_1,\ldots,N_d)}t^{k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}}(1-t)^{k_{d_1+1}+\ldots+k_d}=P_{N_1+N_2+\ldots+N_d}(t). \qquad (11)$$

З рівності (11) коефіцієнти $c_{k_1,\ldots,k_d}^{(N_1,\ldots,N_d)},\mathbf{k}\in\Delta(\mathbf{N})$ можна визначити багатьма способами. Оскільки функції вигляду (2) є симетричними за своїми змінними тоді і тільки тоді, коли $d\mu(t)\equiv d\mu(1-t)$, то доречно розглянути два випадки.

Випадок (I). В несиметричному випадку як один з варіантів знаходження коефіцієнтів $c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{k_1,\ldots,k_d}, \mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N})$ розглянемо наступний.

$$\sum_{i=0}^{N_1+\ldots+N_d} p_i^{(N_1+\ldots+N_d)} t^i = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} c_{k_1,0,\ldots,0} t^{k_1} + t^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} c_{N_1,k_2,0,\ldots,0} t^{k_2} +$$

$$+ t^{N_1+N_2} \sum_{k_3=0}^{N_3-1} c_{N_1,N_2,k_3,0,\ldots,0} t^{k_3} + \ldots + t^{N_1+\ldots+N_{d_1-1}} \sum_{k_{d_1}=0}^{N_{d_1}-1} c_{N_1,N_2,\ldots,N_{d_1-1},k_{d_1},0,\ldots,0} t^{k_{d_1}} +$$

$$+ t^{N_1+\ldots+N_{d_1}} \sum_{k_{d_1+1}=0}^{N_{d_1+1}-1} c_{N_1,\ldots,N_{d_1},k_{d_1+1},0,\ldots,0} (1-t)^{k_{d_1+1}} +$$

$$+ t^{N_1+\ldots+N_{d_1}} (1-t)^{N_{d_1+1}} \sum_{k_{d_1+2}=0}^{N_{d_1+2}-1} c_{N_1,\ldots,N_{d_1},N_{d_1+1},k_{d_1+2},0,\ldots,0} (1-t)^{k_{d_1+2}} + \ldots +$$

$$+ t^{N_1+\ldots+N_{d_1}} (1-t)^{N_{d_1+1}+\ldots+N_{d-2}} \sum_{k_{d-1}=0}^{N_{d-1}-1} c_{N_1,\ldots,N_{d_1},N_{d_1+1},\ldots,k_{d-1},0} (1-t)^{k_{d-1}} +$$

$$+ t^{N_1+\ldots+N_{d_1}} (1-t)^{N_{d_1+1}+\ldots+N_{d-1}} \sum_{k_d=0}^{N_d} c_{N_1,\ldots,N_{d_1},N_{d_1+1},\ldots,N_{d-1},k_d} (1-t)^{k_d}.$$

Отже, при $k_1 = \overline{0, N_1-1}, k_2 = \ldots = k_d = 0$ маємо:

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{k_1,\ldots,k_d} = p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{k_1}.$$

При $k_1 = N_1, k_2 = \overline{0, N_2-1}, k_3 = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,k_2,0,\ldots,0} = p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{N_1+k_2}.$$

При $k_1 = N_1, k_2 = N_2, k_3 = \overline{0, N_3-1}, k_4 = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,k_3,0,\ldots,0} = p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{N_1+N_2+k_3}.$$

Продовжуючи аналогічно, з тих самих міркувань запишемо:

При $k_1 = N_1, \quad k_2 = N_2, \quad \ldots, k_{d_1-1} = N_{d_1-1}, k_{d_1} = \overline{0, N_{d_1} - 1}$, $k_{d_1+1} = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d_1-1},k_{d_1},0,\ldots,0} = p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{N_1+N_2+\ldots+N_{d_1-1}+k_{d_1}}.$$

При $k_1 = N_1, k_2 = N_2, \ldots, k_{d_1} = N_{d_1}, \; k_{d_1+1} = \overline{0, N_{d_1+1} - 1}$, $k_{d_1+2} = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d_1},k_{d_1+1},0,\ldots,0} = (-1)^{k_{d_1+1}} \sum_{i=k_{d_1+1}}^{N_{d_1+1}-1} p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{i+N_1+N_2+\ldots+N_{d_1}} \binom{i}{k_{d_1+1}}.$$

При $k_1 = N_1, \; \ldots, k_{d_1} = N_{d_1}, \; k_{d_1+1} = N_{d_1+1}, \; k_{d_1+2} = \overline{0, N_{d_1+2} - 1}$, $k_{d_1+3} = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d_1},N_{d_1+1},k_{d_1+2},0,\ldots,0} = (-1)^{k_{d_1+2}} \sum_{i=k_{d_1+2}}^{N_{d_1+2}-1} p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{i+N_1+N_2+\ldots+N_{d_1+1}} \binom{i}{k_{d_1+2}}.$$

При $k_1 = N_1, \; \ldots, k_{d_1} = N_{d_1}, \; k_{d_1+1} = N_{d_1+1}, \; k_{d_1+2} = \overline{0, N_{d_1+2} - 1}$, $k_{d_1+3} = \ldots = k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d_1},N_{d_1+1},k_{d_1+2},0,\ldots,0} = (-1)^{k_{d_1+2}} \sum_{i=k_{d_1+2}}^{N_{d_1+2}-1} p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{i+N_1+N_2+\ldots+N_{d_1+1}} \binom{i}{k_{d_1+2}}.$$

І так далі міркуючи, запишемо останні дві рівності:

При $k_1 = N_1, \; \ldots, k_{d-2} = N_{d-2}, k_{d-1} = \overline{0, N_{d-1} - 1}, k_d = 0:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d-2},k_{d-1},0} = (-1)^{k_{d-1}} \sum_{i=k_{d-1}}^{N_{d-1}-1} p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{i+N_1+N_2+\ldots+N_{d-2}} \binom{i}{k_{d-1}}.$$

При $k_1 = N_1, \; \ldots, N_{d-1}, k_d = \overline{0, N_d - 1}:$

$$c^{(N_1,\ldots,N_d)}_{N_1,N_2,\ldots,N_{d-1},k_d} = (-1)^{k_d} \sum_{i=k_d}^{N_d-1} p^{(N_1+\ldots+N_d)}_{i+N_1+N_2+\ldots+N_{d-1}} \binom{i}{k_d}.$$

Випадок (II). У симетричному випадку будемо вважати, що

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_{d_1},$$

$$N_{d_1+1}=N_{d_1+2}=\ldots=N_d,$$

і при цьому

$$N_1+N_2+\ldots+N_{d_1}=N_{d_1+1}+N_{d_1+2}+\ldots+N_d.$$

Нехай $N_1=N_2=\ldots=N_{d_1}=N$, $N_{d_1+1}=N_{d_1+2}=\ldots=N_d=M$. Тоді $d_1N=(d-d_1)M$ і

$$X_{\mathbf{N}}(t)=\sum_{k_1=0}^{N}\ldots\sum_{k_{d_1}=0}^{N}\sum_{k_{d_1+1}=0}^{M}\ldots\sum_{k_d=0}^{M}c_{k_1,\ldots,k_d}^{(N_1,\ldots,N_d)}t^{k_1+\ldots+k_{d_1}}(1-t)^{k_{d_1+1}+\ldots+k_d}=P_{2d_1N}(t).$$

Покладемо

$$c_{k_1,k_2,\ldots,k_d}=0 \text{ при } k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}\neq k_{d_1+1}+\ldots+k_d;$$

$$c_{k_1,k_2,\ldots,k_d}=\widetilde{c}_{|\mathbf{k}|/2} \text{ при } k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}=k_{d_1+1}+\ldots+k_d=|\mathbf{k}|/2.$$

Тоді

$$X_{\mathbf{N}}(t)=\sum_{m=0}^{2d_1N}\widetilde{c}_{|\mathbf{k}|/2}t^{\sum\limits_{i=1}^{d_1}k_i}(1-t)^{\sum\limits_{i=d_1+1}^{d}k_i}=P_{2d_1N}(t)=\sum_{i=0}^{2d_1N}p_i^{(2d_1N)}t^i.$$

Згідно з лемою 3.1 (див., [9]) коефіцієнти $\widetilde{c}_m$ мають вигляд:

$$\widetilde{c}_m=\begin{cases}p_0^{(2d_1N)} & \text{при } m=0,\\ \sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{(2m-j-1)!j}{m!(m-j)!}p_j^{(2d_1N)} & \text{при } m\geqslant 1.\end{cases}\tag{12}$$

У випадку міри $d\mu(t)=t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt$ коефіцієнти степеневого розвинення функції (8) дорівнюють

$$s_{\mathbf{k}}=\frac{\Gamma(k_1+k_2+\ldots+k_{d_1}+\nu+1)\Gamma(k_{d_1+1}+\ldots+k_d+\sigma+1)}{\Gamma(|\mathbf{k}|+\nu+\sigma+2)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\sum\limits_{i=1}^{d_1}k_i+\nu+1)\Gamma(\sum\limits_{i=d_1+1}^{d}k_i+\sigma+1)}{\Gamma(|\mathbf{k}|+\nu+\sigma+2)}.\tag{13}$$

Отже, отримаємо функцію

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sum\limits_{i=1}^{d_1} k_i+\nu+1)\Gamma(\sum\limits_{i=d_1+1}^{d} k_i+\sigma+1)}{\Gamma(|\mathbf{k}|+\nu+\sigma+2)} z_1^{k_1}\ldots z_d^{k_d}, \qquad (14)$$

яка буде гіпергеометричним рядом другого порядку (див. [10]).

У цьому випадку поліном $X_{\mathbf{N}}(t)$ буде збігатися з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі $P_{|\mathbf{N}|}^{(\nu,\sigma)*}(t)$ степеня $|\mathbf{N}|$.

Запишемо явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [11, с. 581, п.(22.3.3)]) (сталу для зручності покладемо рівною 1)

$$P_{N_1+\ldots+N_d}^{(\nu,\sigma)*}(t) = \sum_{m=0}^{N_1+\ldots+N_d} (-1)^m \binom{N_1+\ldots+N_d}{m} \frac{\Gamma(N_1+\ldots+N_d+\nu+\sigma+m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} t^m. \qquad (15)$$

У випадку, коли $\nu=\sigma$, що відповідає симетричному випадку, поліном $X_{\mathbf{N}}$ буде збігатися з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Гегенбауера $C_{2d_1N}^{(\nu+1/2)}$.

Коефіцієнти цього многочлена можна обчислити зі співвідношення зв'язку з многочленом Якобі (див. [11, с. 584, (22.5.27)]):

$$C_N^{(\nu)}(t) = \frac{(2\nu)_N}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_N} P_N^{\left(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2}\right)}(t).$$

Отримаємо

$$p_i^{(2d_1N)} = (-1)^i \frac{(2\nu+1)_{2d_1N}}{(\nu+1)_{2d_1N}} \binom{2d_1N}{i} \frac{\Gamma(2d_1N+2\nu+1+i)}{\Gamma(\nu+1+i)}. \qquad (16)$$

Підставляючи (16) в (12), маємо

$$\widetilde{c}_m = \begin{cases} \dfrac{\Gamma^2(2d_1N+2\nu+1)}{\Gamma(2d_1N+\nu+1)\Gamma(2\nu+1)}, & m=0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m}(-1)^j\dbinom{2d_1N}{j}\dfrac{(2\nu+1)_{2d_1N}}{(\nu+1)_{2d_1N}}\dfrac{(2m-j-1)!j}{m!(m-j)!}\dfrac{\Gamma(2d_1N+2\nu+1+j)}{\Gamma(\nu+1+j)}, & m\geqslant 1. \end{cases} \tag{17}$$

Отже, для багатовимірних гіпергеометричних рядів другого порядку вигляду

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_d=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sum\limits_{i=1}^{d_1} k_i+\nu+1)\Gamma(\sum\limits_{i=d_1+1}^{d} k_i+\nu+1)}{\Gamma(|\mathbf{k}|+2\nu+2)} z_1^{k_1}\ldots z_d^{k_d} \tag{18}$$

на основі теореми 1 можна побудувати апроксиманти типу Паде, а саме, має місце такий результат.

Теорема 2. *При кожному* $\mathbf{N}=(N,\ldots,N,M,\ldots,M)\in\mathbb{N}^d$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{Q(\mathbf{z})}$$

де $Q(\mathbf{z}) = \sum\limits_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}$, $P(\mathbf{z}) = \sum\limits_{p=0}^{d-1}\sum\limits_{\omega\in\Omega_p}\prod\limits_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum\limits_{\substack{0\leqslant k_{m_i(\omega)}\leqslant N_{m_i(\omega)}-1, i=1,2,\ldots,d-p\\ \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{k})\leqslant 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}\times$ $\times \sum\limits_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}s_{\mathbf{k}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}$, $\Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{k}) = k_1+k_2+\ldots+k_d-2d_1N+1$, *коефіцієнти* $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ *обчислюються за формулами* (17), *а* $s_{\mathbf{k}}$ — *за формулами* (13), *має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду Тейлора–Маклорена для функції* f *вигляду* (18) *для всіх* $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}|\leqslant 4d_1N-1\}$, *а, отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде функції* (18) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M}=\{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}|\leqslant 4d_1N-1\}\setminus\{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d : k_1\geqslant N_1,\ldots,k_d\geqslant N_d\}$, *а* $\mathscr{N}=\Delta(\mathbf{N})$.

1. Бейкер Дж., мл. Аппроксимации Паде. Пер. с англ. / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс–Моррис. — М.: Мир, 1986. — 502 с.

2. Cuyt A. Padé approximants for operators: theory and applications / A. Cuyt. — Berlin: LNM 1065, Springer–Verlag, 1984. — 138 p.

3. Голуб А. П. Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних / А. П. Голуб, Л. О. Чернецька // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, №8. — С. 1035 – 1058.

4. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів / В. К. Дзядик // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.

5. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде / А. П. Голуб. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

6. Голуб А. П. Метод узагальнених моментних зображень в теорії раціональної апроксимації / А. П. Голуб // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №3. — С. 307 – 359.

7. Голуб А. П. Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних / А. П. Голуб, Л. О. Чернецька // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №9. — С. 1166 – 1174.

8. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979. — 416 с.

9. Голуб А. П. Побудова апроксимацій Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля за допомогою методу узагальнених моментних зображень / А. П. Голуб, Л. О. Чернецька // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН

України. — 2013. — **10**, №3. — С. 69–94.

10. Садыков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных — М.: Наука, 2014. — 408 с.

11. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.