МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 1 (1969), 19—24

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДРЕШЕТОК

Ю. А. Дрозд

Для модулей целочисленных представлений порядков в полупростых алгебрах доказываются теоремы, аналогичные теоремам о распределении простых идеалов в полях алгебраических чисел. Библ. 5 назв.

Одно из центральных мест в алгебраической теории чисел занимают вопросы, связанные с распределением простых идеалов, в частности, теорема о бесконечности числа простых идеалов в классах и теорема Дирихле об арифметической прогрессии. Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо целых чисел некоторого поля алгебраических чисел; тогда всякий идеал этого поля является $\mathfrak{o}$-решеткой (т. е. свободной абелевой группой конечного ранга, на которой $\mathfrak{o}$ действует как кольцо операторов), а простые идеалы — максимальными подрешетками в $\mathfrak{o}$. Естественно попытаться найти аналоги теорем о распределении для случая решеток L с более общими кольцами операторов Λ (Λ-решеток, или Λ-модулей представлений). В настоящей заметке мы получим такие аналоги при некотором ограничении на решетку L (условие (E) ниже). В доказательстве важную роль играют результаты Эйхлера [1, 2] об арифметических свойствах простых алгебр. Мы используем также технику иделей (см. [3, 4]) и, конечно, классические результаты о распределении простых идеалов в числовых полях.

Всюду в дальнейшем L будет обозначать некоторую Λ-решетку, $\Gamma = \mathrm{Hom}_\Lambda(L, L)$ — ее кольцо эндоморфизмов. Γ является порядком в конечномерной алгебре $A = \Gamma \otimes \mathbf{Q}$

над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Мы будем предполагать, что алгебра A удовлетворяет следующему условию:

(E): алгебра A полупроста, и если $A = \sum_{i=1}^{t} A_i$ — ее разложение в прямую сумму простых алгебр, то ни один из факторов A_i не является вполне определенным телом кватернионов над своим центром (т. е. таким телом, что $A_i \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел, есть прямая сумма тел кватернионов).

Для всякого нетривиального нормирования v поля рациональных чисел обозначим через $\mathbf{Q}_v$ пополнение $\mathbf{Q}$ относительно v, $A_v = A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v$. Если $v = v_p$ есть p-адическое нормирование, то обозначим $\boldsymbol{Z}_v = \boldsymbol{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, а если $v = v_\infty$ — архимедово нормирование, то положим $\boldsymbol{Z}_v = \mathbf{Q}_v = \mathbf{R}$. Обозначим также $L_v = L \otimes Z_v$, $\Gamma_v = \Gamma \otimes Z_v = \mathrm{Hom}_\Lambda (L_v, L_v)$. Мультипликативная группа A_v^* есть локально компактная группа, причем Γ_v^* при $v \neq v_\infty$ — ее компактная открытая подгруппа. Группой иделей J_A алгебры A назовем ограниченное прямое произведение групп A_v^* относительно подгрупп Γ_v^* (см. [3]). J_A есть локально компактная группа, причем A^* естественно отождествляется с дискретной подгруппой в J_A с помощью диагонального вложения. Отметим, что группа J_A не зависит от порядка Γ, а только от самой алгебры A, так как если Γ' — другой порядок в A, то для почти всех v (т. е. для всех v, кроме конечного числа) $\Gamma_v' = \Gamma_v$.

Для всякого двустороннего идеала I кольца Γ положим

$$J(\Gamma, I) = \prod_v \Gamma_v^* (I);$$

$$J_+(\Gamma, I) = \prod_v \Gamma_{v+}^* (I),$$

где $\Gamma_v^* (I) = \{\gamma \mid \gamma \in \Gamma_v^*, \gamma \equiv 1 \pmod{I\Gamma_v}\}$, а $\Gamma_{v+}^* (I) = \Gamma_v^*(I)$ при $v \neq v_\infty$ и $\Gamma_{v_\infty +}^* (I)$ есть связная компонента единицы группы $\Gamma_{v_\infty}^* = A_{v_\infty}^*$. $J(\Gamma, I)$ и $J_+(\Gamma, I)$ — открытые подгруппы в J_A, и всякая открытая подгруппа в J_A содержит $J_+(\Gamma, I)$ для некоторого I.

Напомним связь между группами иделей и Λ-решетками рода L (см. [4]). Говорят, что Λ-решетка L' принадлежит роду L, и пишут $L'VL$, если $L_v' \simeq L_v$ для всех v. Такие решетки естественно рассматривать вложенными в пространство $\widetilde{L} = L \otimes Q$. Тогда $L'_v = \xi_v L_v$ ($\xi_v \in A^*_v$), причем $\xi_v \in \Gamma^*_v$ для почти всех v и потому (ξ_v) есть элемент J_A. Наоборот, всякому иделю $\xi = (\xi_v)$ соответствует Λ-решетка $L' = \xi L$ такая, что $L'_v = \xi_v L_v$ для всех v (очевидно, тогда $L' \vee L$). Отображение $\xi \to \xi L$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между множеством $\{L\}$ классов изоморфизма Λ-решеток рода L и множеством двойных смежных классов $\{\Gamma\} = A^* \diagdown J_A / J\ (\Gamma, \Gamma)$. В частности, $\{\Gamma\}$ можно отождествлять с множеством классов изоморфизма Γ-решеток главного рода (т. е. рода Γ). Тогда каждой Γ-решетке главного рода $M = \xi\Gamma$ соответствует Λ-решетка рода L $ML = \xi L$.

Зафиксируем в алгебре A некоторый максимальный порядок $\overline{\Gamma}$, содержащий Γ, и обозначим через h порядок фактор-группы $\overline{\Gamma}/\Gamma$. Пусть $S = \{v_p / p \mid h\}$ (заметим, что h и S не зависят от выбора $\overline{\Gamma}$). Λ-решетку L' рода L назовем *регулярной* (в L), если $L'_v = L_v$ при $v \in S$, *целой* (в L), если $L' \subset L$. В каждом классе изоморфизма Λ-решеток рода L содержатся регулярные целые решетки [4]. Регулярную целую решетку рода L, являющуюся максимальной Λ-подрешеткой в L, назовем *простой* (в L).

Разложим алгебру A в прямую сумму простых: $A = \sum_{i=1}^{t} A_i$. Тогда и $J_A = \prod_{i=1}^{t} J_{A_i}$, и J_{A_i} можно рассматривать как подгруппы в J_A. Компоненты иделя ξ относительно этого разложения обозначим через ξ^i. Будем говорить, что идель ξ Γ-*канонический*, если из того, что $\xi_v \in \Gamma^*_v$, следует, что $\xi_v = 1$. Идель ξ назовем Γ-*целым* (Γ-*регулярным*), если $\xi_v \in \Gamma_v$ для всех v (соответственно $\xi_v \in \Gamma^*_v$ при $v \in S$). ξ назовем Γ-*простым*, если он Γ-канонический, а Γ-решетка главного рода $\xi\Gamma$ проста в Γ. Очевидно, если идель ξ является Γ-целым (Γ-регулярным, Γ-простым), то и решетка ξL целая (соответственно регулярная, простая) в L.

Если ξ есть Γ-регулярный целый идель, то и все идели ξ^i также являются регулярными и целыми. При этом $\xi L = \bigcap_{i=1}^{t} \xi^i L$. Решетку $\xi^i L$ назовем i-й компонентой решетки ξL. Идель ξ назовем Γ-*полупростым*, если каждый идель ξ^i либо прост, либо равен 1. Соответственно Λ-решетку L' рода L назовем *полупростой в* L, если все ее компоненты либо просты в L, либо совпадают с L.

Пусть C — центр алгебры A, $C=\sum_{i=1}^{t} C_i$ — его разложение. Определен гомоморфизм приведенной нормы $N: A^* \to C^*$, который можно продолжить до непрерывного открытого гомоморфизма $J_N: J_A \to J_C$, а также гомоморфизм абсолютной нормы $n: C^* \to Q^*$, который можно продолжить до $J_n: J_C \to J_Q$. Очевидно, если $\xi \in J_A$ есть Г-канонический регулярный целый идель и $J_n(J_N(\xi))$ — простой идель, то ξ есть Г-простой идель. Такие идели мы будем называть *простыми первой степени*. Полупростые идели, все нееденичные компоненты которых первой степени, назовем *полупростыми первой степени*. Эти определения очевидным образом распространяются и на Λ-решетки рода L.

Наша цель состоит в доказательстве следующих основных теорем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $A=\sum_{i=1}^{t} A_i$ — *полупростая* Q-*алгебра, удовлетворяющая условию* (E), Γ — *порядок в алгебре* A, I — *двусторонний идеал в* Γ *и* ξ — *произвольный идель из* J_A. *Рассмотрим множество* X Γ-*полупростых иделей, принадлежащих двойному смежному классу* $A^*\xi J_+(\Gamma, I)$, *и множества* $X^i=\{\mu^i/\mu\in X\}$. *Тогда все множества* X^i *бесконечны, причем если* μ *пробегает все* X, *то* μ^i *пробегают независимым образом все* X^i. *То же верно, если за* X *принять множество полупростых иделей первой степени, принадлежащих* $A^*\xi J_+(\Gamma, I)$.

Следствие. *Если* L *есть такая* Λ-*решетка, что алгебра* $A=\mathrm{Hom}_\Lambda(\widetilde{L}, \widetilde{L})$ *удовлетворяет условию* (E), *то в каждом классе изоморфизма* Λ-*решеток рода* L *лежит бесконечно много полупростых в* L *решеток. Если в каком-либо классе лежит простая в* L *решетка, то в нем лежит и бесконечно много простых в* L *решеток.*

ТЕОРЕМА 2 (теорема Дирихле). *Пусть* L — *такая* Λ-*решетка, что алгебра* $A=\mathrm{Hom}_\Lambda(\widetilde{L}, \widetilde{L})$ *удовлетворяет условию* (E), $\Gamma=\mathrm{Hom}_\Lambda(L, L)$, $L'=\xi L$ $(\xi\in J_A)$ — *регулярная целая* Λ-*решетка рода* L, P *и* Q — *двусторонние идеалы в* Γ, $a\in A^*$, *причем* $a\Gamma+Q=P+Q=\Gamma$, *а* $L'\supset PL$. *Обозначим через* X *множество полупростых* Γ-*решеток главного рода первой степени* M *таких, что* $ML'=bL$, *где* $b\in\Gamma$, *причем* $b\equiv a \pmod Q$ *и, кроме того,* $b\xi_v^{-1}\in\Gamma_{v+}^*(P)$ *для всех* v. *Через* X^i *обозначим множество* i-*х компонент решеток из* X. *Тогда все множества* X^i *бесконеч-*

ны, и если M пробегает все X, то M^i пробегают независимым образом все X^i.

Ввиду приведенных выше рассуждений, доказательство этих теорем очевидным образом сводится к случаю, когда алгебра A простая с центром C, а порядок Γ максимален (что и будет предполагаться до конца доказательства). Мы будем, далее, использовать следующие два результата, доказательства которых фактически даны в [1] и [2].

ТЕОРЕМА N. $\operatorname{Im} J_N \cap C^* = \operatorname{Im} N$.

ТЕОРЕМА N*. *Если алгебра A удовлетворяет условию* (E) *и* ξ, η *— такие идели из* J_A, *что* $J_N(\xi) = J_N(\eta)$, *то* $\eta \in A^* \xi J_+ (\Gamma, I)$ *для любого идеала* I.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в J_C открытую подгруппу $U = J_N(J_+(\Gamma, I))$. Очевидно, $(J_C : C^* U) < \infty$, поэтому из теорем о равномерном распределении простых идеалов для числовых полей (см. [3], гл. VIII) следует, что в каждом классе смежности $J_C/C^* U$ лежит бесконечно много простых иделей первой степени. В частности, для всякого $\xi \in J_A$ существует бесконечно много простых иделей первой степени $\pi \in J_c$, таких, что $\pi = xJ_N(\xi) J_N(\varepsilon)$, где $x \in C^*$, $\varepsilon \in J_+(\Gamma, I)$. Но $\pi = J_N(\mu)$, где μ — Γ-простой идель первой степени, откуда следует, что $x = J_N(\mu\varepsilon^{-1}\xi^{-1})$ и в силу теоремы N $x = N(a)$, $a \in A^*$. Поэтому $J_N(\mu) = J_N(a\xi\varepsilon)$ и по теореме N^*, $\mu = a'(a\xi\varepsilon)\varepsilon'$, где $a' \in A^*$, $\varepsilon' \in J_+(\Gamma, I)$. Тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Положим $I = P \cap Q$, $S_P = \{v \mid P_v \neq \Gamma_v\}$, $S_Q = \{v \mid Q_v \neq \Gamma_v\}$ (очевидно, $S_P \cap S_Q = \phi$) и рассмотрим в J_A идели α и η, для которых

$$\alpha_v = \begin{cases} a, & v \notin S_Q; \\ 1, & v \in S_Q; \end{cases} \qquad \eta_v = \begin{cases} \xi_v, & v \in S_P \cup \{v_\infty\}; \\ 1, & v \notin S_P \cup \{v_\infty\}. \end{cases}$$

По теореме 1 в двойном смежном классе $A^*(\alpha\eta^{-1}) J_+(\Gamma, I)$ содержится бесконечно много Γ-простых иделей первой степени. Если μ — такой идель, то $\mu\varepsilon\eta = x\alpha$, где $x \in A^*$, $\varepsilon \in J_+(\Gamma, I)$. Пусть v_0 — единственное нормирование, для которого $\mu_v \neq 1$. Очевидно, можно считать, что $v_0 \notin S_P \cup S_Q$. Положим $b = xa$, $M = \mu\Gamma$ и рассмотрим равенство $\mu\varepsilon\eta = x\alpha$ покоординатно.

При $v \notin \{v_0\} \cup \{v_\infty\} \cup S_P \cup S_Q$ оно дает $\varepsilon_v = b$, откуда $bL_v = L_v = M_v L_v'$.

При $v = v_0$ будет $\mu_v \varepsilon_v = b_v$, откуда $bL_v = M_v L_v = M_v L_v'$.

При $v \in S_Q$ будет $\varepsilon_v = x$, откуда $x \equiv 1 \pmod{Q}$, т. е. $b \equiv a \pmod{Q}$, а также $bL_v = L_v = M_v L'_v$.

При $v \in S_P \cup \{v_\infty\}$ будет $\varepsilon_v \xi_v = b$, откуда $b\xi_v^{-1} \in \Gamma^*_{v+}(P)$ и при $v \in S_P$ $bL_v = L'_v = M_v L'_v$.

Таким образом, $ML' = bL$ и b удовлетворяет всем необходимым условиям. Теорема доказана.

Замечание. Автору неизвестно, остаются ли верными теоремы 1 и 2, если накладывать на алгебру A только условие полупростоты. Если бы это было так, то, в частности, был бы получен положительный ответ на гипотезу А. В. Ройтера о максимальном вложении (см. [5], замечание 2) в несколько ослабленной форме*): если Λ — порядок в полупростой алгебре, то для любых Λ-решеток L и L' одного рода существует решетка L_1, изоморфная L' и полупростая в L. Пока можно утверждать только, что решетку L_1 можно выбрать стабильно эквивалентной решетке L', т. е. такой, что $L_1 \oplus L \simeq L' \oplus L$.

Условие полупростоты, очевидно, существенно, так как если, например, $\Lambda = \mathbf{Z}[d]$, $d^2 = 0$, то в Λ вообще нет максимальных подрешеток главного рода.

Автор выражает глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, проявившему интерес к этой работе и давшему ряд важный указаний в процессе ее выполнения.

Институт математики
АН Украинской ССР

Поступило
18.XI.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Eichler M., Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z., **43** (1938), 481—494.

[2] Eichler M., Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen, J. reine u. angew. Math., **179** (1938), 227—251.

[3] Ленг С., Алгебраические числа, М., 1966.

[4] Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **80** (1965), 145—182.

[5] Ройтер А. В., О целочисленных представлениях, принадлежащих одному роду, Изв. АН СССР. Сер. матем., 30 (1966), 1315—1324.

*) В виде, сформулированном в [5], где требуется, чтобы L_1 была максимальной Λ-подрешеткой в L, эта гипотеза очевидным образом неверна, если алгебра A не проста, поэтому такое ослабление неизбежно и естественно.