Наука, 1967. 273 с. 47. *Berezanski Ju. M., Us G. F.* Eeigenfunctions expansions of operators admitting separation of an infinite number of variables.— Rep. on Math. Phys., 1975, vol. 7, N 1, p. 103—126. 48. *Wertz W.* Nonparametric density estimators in abstract and homogeneous spaces.— Commun. Statist., p. 290—301. 49. *Hoffman—Jorgensen J.* Measures which agree on balls.— Math. Scand. 1975, 37, p. 319—326. 50. *Kondratiev Ju. G., Samoilenko Ju. S.* The spaces of trial and generalized functions of infinite number of variables.— Rep. on Math. Phys., 1978, vol. 14, N3, p. 323—348.

Надійшла до редколегії 12.05.82

УДК 519.48

Ю. А. ДРОЗД, д-р фіз.-мат. наук

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБРИ ЛІ $\mathfrak{sl}$ (2)

Мета цієї роботи — застосувати методи, розроблені школою І. М. Гельфанда при вивченні модулів Харіш-чандри [3, 4, 10], до більш широких класів зображень алгебр Лі і, зокрема, до вивчення зображень над полями додатньої характеристики. Хоча ми обмежуємося найпростішим випадком алгебри $\mathfrak{sl}$ (2), на думку автора, запропонований підхід можна поширити на всі класичні напівпрості алгебри Лі. Як наслідок, у останньому параграфі одержано повну класифікацію обмежених зображень алгебри $\mathfrak{sl}$ (2) над полем характеристики $p > 2$.

1. **Категорії** $A_{\tau\sigma}$. Далі $\mathfrak{g}$ позначатиме алгебру Лі $\mathfrak{sl}$ (2) над полем K характеристики $p \neq 2$; $\{e, f, h\}$ — стандартний базис $\mathfrak{g}$ з таблицею множення $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$.

Якщо V — деякий $\mathfrak{g}$-модуль, позначимо V_λ кореневий підпростір для h із власним значенням λ. Надалі завжди вважатимемо, що всі простори V_λ скінченновимірні і $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$. Категорію таких модулів позначимо M. Якщо поле K алгебраїчно замкнене, то M містить, зокрема, усі скінченновимірні $\mathfrak{g}$-модулі. Виділимо у M повні підкатегорії: H, що складається з модулів, у яких оператор h має власний базис; C, що складається з модулів, у яких власний базис має оператор Казимира $c = h^2 - 2h + 4ef = h^2 + 2h + 4fe$; $CH = C \cap H$.

Розглянемо факторгрупу $T = K/j(2\mathbf{Z})$, де j — єдиний гоморфізм $\mathbf{Z} \to K$ (якщо $p > 2$, то $j(2\mathbf{Z})$ збігається з простим підполем $\mathbf{F}_p \subset K$). Нехай $S = T \times K$. Для кожної пари $(\tau, \sigma) \in S$ позначимо $M(\tau, \sigma)$ повну підкатегорію у M, утворену тими модулями, у яких всі власні значення h належать класу τ, а оператор c має єдине власне значення σ. Аналогічний зміст матимуть позначення $H(\tau, \sigma)$, $C(\tau, \sigma)$, $CH(\tau, \sigma)$.

Лема 1. $M = \bigoplus_{\tau,\sigma} M(\tau, \sigma)$, тобто будь-який модуль $V \in M$ однозначно розкладається у пряму суму підмодулів $V = \bigoplus_{\tau,\sigma} V(\tau, \sigma)$, де $V(\tau, \sigma) \in M(\tau, \sigma)$.

Доведення тривіально випливає з того, що $e(V_\lambda) \subset V_{\lambda+2}$, $f(V_\lambda) \subset V_{\lambda-2}$, а c комутує з e, f, h. Отже, надалі можна вивчати окремо кожну категорію $M(\tau, \sigma)$.

Розглянемо кільце $\Sigma = K[[x, y]]$ формальних рядів від двох змінних над полем K і визначимо для кожної пари $(\tau, \sigma) \in S$ деяку Σ-категорію* $A_{\tau\sigma}$. За множину об'єктів $A_{\tau\sigma}$ приймемо клас τ, а за множину твірних морфізмів — $\{e_\lambda, f_\lambda \mid \lambda \in \tau\}$, де $e_\lambda : (\lambda - 2) \to \lambda$, $f_\lambda : \lambda \to (\lambda - 2)$, причому ці твірні задовольняють співвідношенням $e_\lambda f_\lambda = g_\lambda 1_\lambda$ та $f_\lambda e_\lambda = g_\lambda 1_{\lambda-2}$, де $g_\lambda = [y - (x + \lambda - 1)^2 - (\sigma + 1)]/4$. Для будь-якої K-категорії A позначимо $R(A)$ категорію зображень A (K-лінійних функторів з A до категорії скінченновимірних векторних просторів над K).

Лема 2. Категорії $M(\tau, \sigma)$ та $R(A_{\tau\sigma})$ ізоморфні.

Доведення. Взаємно обернені функтори $F : M(\tau, \sigma) \to R(A_{\tau\sigma})$ та $G : R(A_{\tau\sigma}) \to M(\tau, \sigma)$ задамо такими правилами: $(FV)(\lambda) = V_\lambda$, причому для $v \in V_\lambda$ $(FV)(x)v = (h - \lambda)v$, $(FV)(y)v = (c - \sigma)v$, $(FV)(e_{\lambda+2})v = ev$ та $(FV)(f_\lambda)v = fv$. $GU = \bigoplus_{\lambda\in\tau} U(\lambda)$, причому для $u \in U(\lambda)$ $hu = U(x + \lambda)u$, $eu = U(e_{\lambda+2})u$, $fu = U(f_\lambda)u$. Тривіально перевіряється, що FV дійсно є зображенням $A_{\tau\sigma}$, GU є $\mathfrak{g}$-модулем, причому $GFV = V$ і $FGU = U$.

Позначимо $A^h_{\tau\sigma} = A_{\tau\sigma}/(x)$, $A^c_{\tau\sigma} = A_{\tau\sigma}/(y)$ і $A^{ch}_{\tau\sigma} = A_{\tau\sigma}/(x, y)$.

Наслідок. $H(\tau, \sigma) \simeq R(A^h_{\tau\sigma})$, $C(\tau, \sigma) \simeq R(A^c_{\tau\sigma})$ і $CH(\tau, \sigma) \simeq R(A^{ch}_{\tau\sigma})$.

Категорії $A_{\tau\sigma}$ містять багато ізоморфних об'єктів. Дійсно, якщо $\lambda^2 - 2\lambda \neq \sigma$, елемент g_λ має у кільці Σ обернений, а тому e_λ та f_λ — ізоморфізми. Нагадаємо [7], що остовом категорії A зветься повна підкатегорія B, всі об'єкти якої неізоморфні, причому кожен об'єкт з A ізоморфний прямій сумі об'єктів з B. Якщо B — остов A, то, очевидно, категорії $R(A)$ та $R(B)$ еквівалентні. Отже, нам треба обчислити остов $B_{\tau\sigma}$ категорії $A_{\tau\sigma}$. Звичайно, це залежить від пари (τ, σ). Розіб'ємо S на три частини S_0, S_1, S_2 за правилом: $(\tau, \sigma) \in S_0$, якщо $\sigma \neq \lambda^2 - 2\lambda$ для всіх $\lambda \in \tau$; $(\tau, \sigma) \in S_1$, якщо існує єдине значення $\lambda \in \tau$, для якого $\sigma = \lambda^2 - 2\lambda$; $(\tau, \sigma) \in S_2$, якщо існують два різних значення $\lambda, \mu \in \tau$, для яких $\sigma = \lambda^2 - 2\lambda = \mu^2 - 2\mu$.

В останньому випадку, очевидно, $\mu = 2 - \lambda$, причому $\lambda \in j(\mathbf{Z})$ і $\lambda \neq 1$.

Обчислимо будову $B_{\tau\sigma}$ та пов'язаних з нею категорій $B^h_{\tau\sigma}$, $B^c_{\tau\sigma}$ та $B^{ch}_{\tau\sigma}$ (остовів, відповідно, $A^h_{\tau\sigma}$, $A^c_{\tau\sigma}$ та $A^{ch}_{\tau\sigma}$). Відповідь істотно залежить від характеристики основного поля.

2. **Будова зображень у характеристиці** 0. У цьому розділі вважатимемо, що $p = 0$. Тоді $j : \mathbf{Z} \to K$ — мономорфізм, і ми ототожнимо $\mathbf{Z}$ та $j(\mathbf{Z})$. Кожен клас $\tau \in T$ природним чином упорядкований: $\lambda < \mu$ означає, що $\mu = \lambda + 2n$, де $n > 0$. Очевидно, для будь-якого об'єкту θ категорії $A_{\tau\sigma}$ маємо $A_{\tau\sigma}(\theta, \theta) = \Sigma$. Виявляється, що будова категорії $B_{\tau\sigma}$ залежить лише від того, до якої з множин S_i належить пара (τ, σ).

* Σ-категорією називають категорію A, для кожної пари (a, b) об'єктів якої на множині морфізмів $A(a, b)$ визначена структура Σ-модуля, причому множення морфізмів є Σ-білінійним [1].

Теорема 1. а) якщо $(\tau,\sigma)\in S_0$, категорія $B_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

б) якщо $(\tau,\sigma)\in S_1$, категорія $B_{\tau\sigma}$ ізоморфна Σ-категорії з двома об'єктами α, β і двома твірними морфізмами $a:\alpha\to\beta$ та $b:\beta\to\alpha$, зв'язаними співвідношеннями $ab=y1_\beta$ та $ba=y1_\alpha$;

в) якщо $(\tau,\sigma)\in S_2$, категорія $B_{\tau\sigma}$ ізоморфна Σ-категорії з трьома об'єктами α, β, γ і чотирма твірними морфізмами: $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\gamma\to\beta$ та $d:\beta\to\gamma$, зв'язаними співвідношеннями $ba=y1_\alpha$, $ab=y1_\beta$, $cd=(x+y)\,1_\beta$ та $dc=(x+y)\,1_\gamma$.

Доведення. Твердження а) очевидне. У випадку б) нехай $\lambda\in\tau$ — єдине значення, для якого $\lambda^2-2\lambda=\sigma$. Тоді існує автоморфізм Σ, який залишає x на місці, а g_λ переводить у y. Якщо виконати цей автоморфізм, то співвідношення для e_λ, f_λ у категорії $A_{\tau\sigma}$ набудуть вигляду: $e_\lambda f_\lambda=y1_\lambda$ та $f_\lambda e_\lambda=y1_{\lambda-2}$. Отже, після цього досить покласти $\alpha=\lambda-2$, $\beta=\lambda$, $a=e_\lambda$ та $b=f_\lambda$.

Нарешті, при $(\tau,\sigma)\in S_2$ нехай $\lambda<\mu$ — ті значення, для яких $\lambda^2-2\lambda=\mu^2-2\mu=\sigma$, причому $\mu=\lambda+2n$.

Покладемо $\alpha=\lambda-2$, $\beta=\lambda$, $\gamma=\mu$, а $a=e_\lambda$, $b=f_\lambda$, $c=g^{-1}f_{\lambda+2}\dots f_{\mu-2}f_\mu$ і $d=e_\mu e_{\mu-2}\dots e_{\lambda+2}$, де $g=\prod_{k=1}^{n-1}g_{\lambda+2k}$ (якщо $n=1$, то $g=1$).

Оскільки $g_\mu=g_\lambda+(\lambda-1)\,x$, для доведення твердження в) залишається виконати автоморфізм Σ_{g_λ}, який переводить $(\lambda-1)\,x$ в x, а g_λ в y.

Зауваження 1. Якщо деяка категорія B має скінченну множину об'єктів, її зображення збігаються із зображенням алгебри $\widetilde{B}=\oplus B\,(\theta,\theta')$, де θ і θ' незалежно пробігають усі об'єкти B, а добуток елементів $a\in B\,(\theta,\theta')$ та $b\in B\,(\omega,\omega')$ визначається як їхній добуток у категорії B при $\theta=\omega'$ і як 0 при $\theta\neq\omega'$ [11]. Легко бачити, що у випадку а) теореми 1 $\widetilde{B}_{\tau\sigma}=\Sigma$; у випадку б) $\widetilde{B}_{\tau\sigma}$ ізоморфна підалгебрі у алгебрі $M_2(\Sigma)$ (2×2)-матриць з коефіцієнтами у Σ, утвореній тими матрицями (a_{ij}), у яких $a_{12}\in y\Sigma$; у випадку в) $\widetilde{B}_{\tau\sigma}$ ізоморфна підалгебрі у $M_3(\Sigma)$, утвореній тими матрицями (a_{ij}), у яких $a_{12}\in y\Sigma$, $a_{23}\in(x+y)\,\Sigma$, а $a_{13}\in y\,(x+y)\,\Sigma$. Усі ці алгебри суть чисто нетерові [8], тобто їхній центр нетерів (він збігається з Σ) і $\widetilde{B}_{\tau\sigma}$—скінченно-породжений модуль над центром, який не має мінімальних підмодулів.

Зауваження 2. Незважаючи на те, що категорії $B_{\tau\sigma}$ (або алгебри $\widetilde{B}_{\tau\sigma}$) мають досить просту будову, їхні зображення можуть бути вельми складними. Добре відомо, що вже алгебра Σ є дикою, тобто її категорія зображень містить у собі категорію зображень будь-якої скінченно-породженої алгебри*, тим більше дикими будуть усі категорії $B_{\tau\sigma}$.

* Точні означення диких та ручних алгебр наведені в статті [7].

Для категорій $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ відповідь, звичайно, буде простішою. Позначимо $\Delta=K\,[[x]]$. Оскільки $\Delta\simeq\Sigma/(x)\simeq\Sigma/(y)$, категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ можна розглядати як Δ-категорії, причому $B^h_{\tau\sigma}(\theta,\theta)=B^c_{\tau\sigma}(\theta,\theta)=\Delta$ для будь-якого об'єкту θ.

*Наслідок 1**. а) якщо $(\tau,\sigma)\in S_0$, категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ мають по одному об'єкту;

б) якщо $(\tau,\sigma)\in S_1$, категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ ізоморфні Δ-категорії з двома об'єктами α, β і двома твірними $a:\alpha\to\beta$ та $b:\beta\to\alpha$, які зв'язані співвідношеннями $ab=x1_\beta$ та $ba=x1_\alpha$, за винятком випадку $\tau=1+2\mathbf{Z}$, $\sigma=-1$, коли співвідношення для $B^c_{\tau\sigma}$ треба замінити на $ab=x^21_\beta$ та $ba=x^21_\alpha$;

в) якщо $(\tau,\sigma)\in S_2$, категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ ізоморфні Δ-категорії з трьома об'єктами α, β, γ і чотирма твірними $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\gamma\to\beta$ та $d:\beta\to\gamma$, зв'язаними співвідношеннями $ba=x1_\alpha$, $ab=cd=x1_\beta$ та $dc=x1_\gamma$.

Доведення безпосередньо випливає з доведення теореми 1.

Зауваження. З результатів роботи [8] безпосередньо випливає, що в усіх випадках категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ (або відповідні алгебри) ручні, тобто їхні нерозкладні зображення залежать від кількох дискретних і, можливо, одного неперервного параметра. Точніше, класифікація зображень цих категорій зводиться до задачі, розв'язаної у роботі [9].

Нарешті, у категоріях $B^{ch}_{\tau\sigma}$ для будь-якого об'єкту θ маємо $B^{ch}_{\tau\sigma}(\theta,\theta)=K$.

Наслідок 2. а) якщо $(\tau,\sigma)\in S_0$, категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

б) якщо $(\tau,\sigma)\in S_1$, категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має два об'єкти α, β і два твірних $a:\alpha\to\beta$ та $b:\beta\to\alpha$, зв'язаних співвідношеннями $ab=0$ та $ba=0$;

в) якщо $(\tau,\sigma)\in S_2$, категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має три об'єкти α, β, γ і чотири твірних $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\gamma\to\beta$ та $d:\beta\to\gamma$, зв'язаних співвідношеннями $ab=cd=0$, $ba=0$ та $dc=0$.

Зауваження 1. Безпосереднє і досить легке обчислення показує, що категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має у випадку а) єдне, у випадку б) — 4, а у випадку в) — 9 нерозкладних зображень**. Звичайно, категорії $CH\,(\tau,\sigma)\simeq R\,(B^{ch}_{\tau\sigma})$ містять всі незвідні зображення з категорії M.

Зауваження 2. Очевидно, усі скінченновимірні нерозкладні $\mathfrak{g}$-модулі V належать $M\,(\tau,\sigma)$, де $(\tau,\sigma)\in S_2$, причому $V_\theta=0$ при $\theta<\lambda$ або $\theta\geqslant\mu$, тобто у відповідному зображенні U категорії $B_{\tau\sigma}$ маємо $U\,(\alpha)=U\,(\gamma)=0$, а тому $U\,(x)=U\,(y)=0$, це зображення є незвідним і повністю визначається натуральним числом n, для якого $\mu=\lambda+2n$ (звичайно, $n=\dim V$).

3. **Будова зображень у характеристиці** p. Надалі вважатимемо, що $p>2$. Тоді $j\,(2\mathbf{Z})=\mathbf{F}_p$, кожен клас $\tau\in T$ має p елементів і то-

* Для категорій $B^h_{\tau\sigma}$ (модулів Харіш-чандри) цей результат міститься у праці [4].

** Відповідні зображення алгебри Лі $\mathfrak{K}$ описав Габріель [6, п. 7.8.16].

му всі модулі з $M(\tau,\sigma)$ скінченновимірні. Крім того, відомо [5], що оператори e^p та f^p комутують з усіма елементами алгебри $\mathfrak{g}$. Тому їм відповідають елементи w_+ і w_- з центру $Z_{\tau\sigma}$ категорії $A_{\tau\sigma}$. Очевидно, якщо $a \in A_{\tau\sigma}(\theta, \theta')$, то $w_+ a = a e_\theta e_{\theta-2} \dots e_{\theta-2(p-1)}$, а $w_- a = a f_{\theta-2(p-1)} \dots f_{\theta-2} f_\theta$. Звідси $w_+ w_- = g = \prod\limits_{\theta\in\tau} g_\theta$.

Легко бачити, що $Z_{\tau\sigma} = \Sigma[w_+, w_-]$ і для будь-якого $\theta \in \tau$ маємо $A_{\tau\sigma}(\theta, \theta) = Z_{\tau\sigma}$.

Теорема 2. а) якщо $(\tau, \sigma) \in S_0$, то $Z_{\tau\sigma} \simeq \Gamma_0 = \Sigma[z, t]/(zt - 1)$ і $B_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

б) якщо $(\tau, \sigma) \in S_1$, то $Z_{\tau\sigma} \simeq \Gamma_1 = \Sigma[z, t]/(zt - y)$ і $B_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

в) якщо $(\tau, \sigma) \in S_2$, то $Z_{\tau\sigma} \simeq \Gamma_2 = \Sigma[z, t]/(zt - xy)$, а $B_{\tau\sigma}$ ізоморфна Γ_2-категорії з двома об'єктами α, β і чотирма твірними морфізмами $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\alpha\to\beta$ та $d:\beta\to\alpha$, зв'язаними співвідношеннями $ab = x1_\beta$, $ba = x1_\alpha$, $cd = y1_\beta$, $dc = y1_\alpha$, $ad = z1_\beta$, $da = z1_\alpha$, $bc = t1_\alpha$, $cb = t1_\beta$.

Доведення. У випадку а) всі об'єкти категорії $A_{\tau\sigma}$ ізоморфні, а елемент g має обернений. Тому досить покласти $z = w_+$, $t = g^{-1} w_-$.

У випадку б) знову всі об'єкти категорії $A_{\tau\sigma}$ ізоморфні і існує автоморфізм Σ, який залишає x незмінним, а g переводить у y. Виконавши цей автоморфізм, залишається покласти $z = w_+$ і $t = w_-$.

Нарешті, у випадку в) нехай $\lambda \neq \mu$-ті значення з класу τ, для яких $\lambda^2 - 2\lambda = \mu^2 - 2\mu = \sigma$, причому $\mu = \lambda + 2n$, де $0 < n < p$. Тоді існує два класи ізоморфізму об'єктів категорії $A_{\tau\sigma}$: $\tau' = \{\lambda, \lambda + 2, \dots, \lambda + 2(n-1) = \mu - 2\}$ та $\tau'' = \{\mu, \mu + 2, \dots, \mu + 2(p-n-1) = \lambda - 2\}$. Позначимо $g' = \prod\limits_{\theta\in\tau'} g_\theta$, $g'' = \prod\limits_{\theta\in\tau''} g_\theta$. Виконаємо автоморфізм Σ, який переводить g' в x, а g'' в y. Після цього для доведення твердження в) залишається покласти $z = w_+$, $t = w_-$, $\alpha = \lambda - 2$, $\beta = \mu - 2$, $a = e_{\mu-2} \dots e_{\lambda+2} e_\lambda$, $b = f_\lambda f_{\lambda+2} \dots f_{\mu-2}$, $c = f_\mu f_{\mu+2} \dots f_{\lambda-2}$ та $d = e_{\lambda-2} \dots e_{\mu+2} e_\mu$.

Позначимо центри категорій $A^h_{\tau\sigma}$, $A^c_{\tau\sigma}$ та $A^{ch}_{\tau\sigma}$, відповідно, $Z^h_{\tau\sigma}$, $Z^c_{\tau\sigma}$ та $Z^{ch}_{\tau\sigma}$. Тоді, якщо A — одна з цих категорій, а Z — її центр, то $A(\theta, \theta) = Z$ для будь-якого об'єкту θ.

Наслідок 1. а) якщо $(\tau, \sigma) \in S_0$, то $Z^h_{\tau\sigma} \simeq Z^c_{\tau\sigma} \simeq \Lambda_0 = \Delta[z, t]/(zt - 1)$ і категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ мають по одному об'єкту;

б) якщо $(\tau, \sigma) \in S_1$, то категорії $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ мають по одному об'єкту, а $Z^h_{\tau\sigma} \simeq Z^c_{\tau\sigma} \simeq \Lambda_1 = \Delta[z, t]/(zt - x)$ за винятком випадку $\tau = \mathbf{F}_p$, $\sigma = -1$, коли $Z^c_{\tau\sigma} \simeq \Lambda_2 = \Delta[z, t]/(zt - x^2)$;

в) якщо $(\tau, \sigma) \in S_2$, то $Z^h_{\tau\sigma} \simeq Z^c_{\tau\sigma} \simeq \Lambda_2$, а категорії $Z^h_{\tau\sigma}$ та $Z^\sigma_{\tau c}$ ізоморфні Λ_2-категорії з двома об'єктами α, β і чотирма твірними $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\alpha\to\beta$ та $d:\beta\to\alpha$, зв'язаними співвідношеннями $ab = cd = x1_\beta$, $ba = cd = x1_\alpha$, $ad = z1_\beta$, $da = z1_\alpha$, $bc = t1_\alpha$, $cb = t1_\beta$.

Легко бачити, що всі категорії $B_{\tau\sigma}$, $B^h_{\tau\sigma}$ та $B^c_{\tau\sigma}$ у цьому випадку дикі.

Наслідок 2. а) якщо $(\tau, \sigma) \in S_0$, то $Z^{ch}_{\tau\sigma} \simeq \Omega_0 = K[z, t]/(zt - 1)$ і категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

б) якщо $(\tau, \sigma) \in S_1$, то $Z^{ch}_{\tau\sigma} \simeq \Omega_1 = K[z, t]/(zt)$ і категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має один об'єкт;

в) якщо $(\tau, \sigma) \in S_2$, то $Z^{ch}_{\tau\sigma} \simeq \Omega_1$, а категорія $B^{ch}_{\tau\sigma}$ має два об'єкти α, β та чотири твірних $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\alpha\to\beta$ та $d:\beta\to\alpha$, зв'язаних співвідношеннями $ab = cd = 0$, $ba = dc = 0$, $ad = z1_\beta$, $da = z1_\alpha$, $bc = t1_\alpha$, $cb = t1_\beta$.

Із праці [8] випливає, що всі категорії $B^{ch}_{\tau\sigma}$ (або відповідні алгебри) ручні. Проте, для Ω_0 це випливає з нормальної форми лінійного оператора, а для Ω_1 — з результатів роботи [4]. У випадку в), якщо одночасно звести до діагонального вигляду оператори a і b, для операторів c і d залишиться задача, яка лише незначною мірою відрізняється від задачі, розв'язаної у праці [4].

4. Обмежені зображення. При $p > 2$ алгебра $\mathrm{sl}(2)$ має природну структуру обмеженої алгебри Лі [5] (або p-алгебри Лі), яка задається формулами: $e^{[p]} = f^{[p]} = 0$, $h^{[p]} = h$. $\mathfrak{g}$-модуль V називають обмеженим, якщо $g^{[p]}v = g^p v$ для всіх $g \in \mathfrak{g}$ та $v \in V$. Позначимо P повну підкатегорію в M, утворену обмеженими модулями; $P(\tau, \sigma) = P \cap M(\tau, \sigma)$. Оскільки в будь-якому обмеженому модулі $(h^p - h)v = 0$, категорія P містить усі скінченновимірні обмежені $\mathfrak{g}$-модулі, причому $P \subset H$. Нехай $A^p_{\tau\sigma} = A^h_{\tau\sigma}/(w_+, w_-)$ (у позначеннях п. 3). Тоді очевидним є наступний результат.

Лема 3. Категорії $P(\tau, \sigma)$ та $R(A^p_{\tau\sigma})$ ізоморфні, причому $P(\tau, \sigma) \neq 0$ лише при $(\tau, \sigma) \in S_2$ або $\tau = \mathbf{F}_p$, $\sigma = -1$.

Замість $A^p_{\tau\sigma}$ при $\tau = \mathbf{F}_p$ писатимемо просто A^p_σ. Зауважимо, що $A^p_\sigma \neq 0$, тільки якщо $\sigma + 1$ — квадрат у $\mathbf{F}_p$. Розглянемо остов B^p_σ категорії A^p_σ. Якщо $\sigma = -1$, категорія B^p_σ має один об'єкт з кільцем ендоморфізмів K, тому існує єдине нерозкладне зображення (воно є навіть незвідним). Відповідний $\mathfrak{g}$-модуль позначимо $V(1)$. Якщо $\sigma \neq -1$, категорія B^p_σ ізоморфна K-категорії з двома об'єктами α, β та чотирма твірними морфізмами $a:\alpha\to\beta$, $b:\beta\to\alpha$, $c:\alpha\to\beta$, $d:\beta\to\alpha$, зв'язаними співвідношеннями $ad = cb = 0$, $bc = da = 0$, $ab = cd$ та $ba = dc$.

Нехай U — зображення цієї категорії. Тоді $U(a)$ та $U(c)$ утворюють так званий пучок операторів і їх можна звести до відомої нормальної форми Кронекера—Вейєрштрасса [2], тобто розкласти у пряму суму пучків, типи яких природно закодувати парами (π, m), де π — або незвідний многочлен над K, або один з символів ∞, $-$, $+$, а m — натуральне число (див. таблицю). У таблиці E — одинична матриця; $\Phi(\pi^m)$ — клітина Фробеніуса з характеристичним многочленом $\pi(x)^m$; $J_m = \Phi(x^m)$ — клітина Жордана з нульовим власним значенням

$$F_m=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix};\quad G_m=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(розміру $(m-1)\times m$); F'_m та G'_m — відповідно транспоновані матриці F_m та G_m (якщо $m=1$, то F_m і G_m — це відображення $K\to 0$, а F'_m і G'_m — відображення $0\to K$). Після цього, враховуючи співвідношення між твірними, можна безпосередньо переконатись, що у нерозкладному зображенні U буде $U(a)=U(c)=0$, або $U(b)=U(d)=0$, або $U=U_0$ чи U'_0, де

$$U_0(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad U_0(b)=U_0(c)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad U_0(d)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

а U'_0 одержується з U_0 транспонуванням.

Оператор	Тип зображення			
	$(\pi(x), m)$	(∞, m)	$(-, m)$	$(+, m)$
$V(a)$	E	J_m	F_m	F'_m
$V(c)$	$\Phi(\pi^m)$	E	G_m	G'_m

Фіксуємо $\lambda\in\tau$, для якого $\lambda^2-2\lambda=\sigma$ і позначимо $V(\lambda)$ зображення $\mathfrak{g}$, яке відповідає зображенню U_0; $V'(\lambda)$ — зображення $\mathfrak{g}$, яке відповідає U'_0; $V(\lambda, \pi, m)$ — зображення, у якому $U(b)=U(d)=0$, а $U(a)$ та $U(c)$ утворюють пучок типу (π, m) і, нарешті, $V'(\lambda, \pi, m)$ — зображення, у якому $U(a)=U(c)=0$, а $U(d)$ та $U(b)$ утворюють пучок типу (π, m). Легко перевірити, що при заміні λ на друге значення $\mu\in\mathbf{F}_p$, для якого $\mu^2-2\mu=\sigma$, $V(\lambda)$ переходить у $V'(\mu)$, $V'(\lambda)$ — у $V(\mu)$, $V(\lambda, \pi, m)$ — у $V'(\mu, \pi, m)$ і $V'(\lambda, \pi, m)$ — у $V(\mu, \pi, m)$. Враховуючи зв'язок морфізмів категорії B^p_σ з операторами e, f, h, одержуємо такий результат.

Теорема 3. Кожне нерозкладне обмежене зображення алгебри Лі sl (2) ізоморфне або $V(\lambda)$, де $\lambda\in\mathbf{F}_p$, або $V(\lambda, \pi, m)$, де $\lambda\in\mathbf{F}_p\setminus\{1\}$, m — натуральне число, а π — або незвідний многочлен над K, або один з символів ∞, $-$, $+$, причому дія операторів e_θ та f_θ у цих зображеннях задається правилами:

а) якщо $V=V(1)$, то всі простори V_θ $(\theta\in\mathbf{F}_p)$ мають розмірність 1, $e_\theta=1$ при $\theta\neq\lambda$, $e_\lambda=0$, $f_{\lambda+2k}=k(1-k-\lambda)$ при $0<k<p$, $f_\lambda=0$;

б) якщо $V=V(\lambda)$, де $\lambda\neq 1$, то всі простори V_θ мають розмірність 2, $e_\theta=E$ при $\theta\neq\lambda,\mu$ (тут $\mu=2-\lambda=\lambda+2n$, де $0<n<p$), $f_{\lambda+2k}=k(1-k-\lambda)E$ при $n<k<p$, $e_\lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $e_\mu=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $f_\lambda=f_\mu=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $f_{\lambda+2k}=k(1-k-\lambda)E+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ при $0<k<n$;

в) якщо $V=V(\lambda, \pi, m)$ то $e_\theta=E$ при $\theta\neq\lambda,\mu$, $f_{\lambda+2k}=k(1-k-\lambda)E$ при $0<k<p$ і $k\neq n$, $e_\mu=0$, $f_\lambda=0$, а оператори e_λ і f_μ утворюють пучок типу (π, m).

Усі ці зображення неізоморфні між собою, за винятком того, що $V(\lambda, -, 1)\sim V(\mu, +, 1)$ і $V(\lambda, +, 1)\sim V(\mu, -, 1)$.

1. *Басс Х.* Алгебраическая *К*-теория. М.: Мир, 1973. 591 с. 2. *Гантмахер Ф. Р.*
Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с. 3. *Гельфанд И. М.* Когомологии бесконечно-
мерных алгебр Ли, некоторые вопросы интегральной геометрии.— В кн.: Proc. ICM,
Nice, 1970, p. 54—61. 4. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представ-
ления группы Лоренца.— УМН, 1968, т. 23, № 2, с. 19—33. 5. *Джекобсон Н.* Алгеб-
ры Ли. М.: Мир, 1964. 355 с. 6. *Диксимье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.
М.: Мир, 1978. 407 с. 7. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи.— В кн.:
Представления и квадратичные формы. К., 1979, с. 39—74. 8. *Дрозд Ю. А.* О класси-
фикации конечно-порожденных модулей над нетеровыми алгебрами.— В кн.: IV Все-
союзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Кишинев, 1980, с. 36. 9. *На-
зарова Л. А., Ройтер А. В.* Об одной задаче И. М. Гельфанда.— Функцион. анализ и
его приложения, 1973, т. 7, № 4, с. 54—69. 10. *Bernstein I., Gelfand I., Gelfand S.*
Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra.— C. R. Acad. Sc. Pa-
ris, 1978, t. 286, p. 435—437. 11. *Gabriel P.* Des catégories abéliennes.— Bull. Soc.
Math. France, 1962, t. 90, p. 323—448.

Надійшла до редколегії 26.04.82

УДК 517.946

С. Д. ІВАСИШЕН, д-р фіз.-мат. наук

ПРО НОРМАЛЬНУ ПАРАБОЛІЧНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ

Фундаментальною проблемою в теорії крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними є проблема повного і точного опису оператора G, оберненого до оператора крайової задачі. У роботах автора [3, 4] такий опис зроблено у випадку загальної крайової задачі для довільної параболічної за І. Г. Петровським системи. При цьому виявлена природа оператора G, вивчена структура його ядра — матриці Гріна, одержані точні оцінки елементів матриці Гріна та їх похідних як по основних, так і по параметричних аргументах. Властивості матриці Гріна по параметричних аргументах вивчені без використання спряженої задачі, яка в загальному випадку є не диференціальною і поки що зовсім не досліджена. Вивчення таких властивостей значно спрощується у випадках, коли спряжена задача є задачею такого ж типу, що й дана. Ці випадки важливі і в багатьох інших застосуваннях.

У даній статті за аналогією з еліптичним випадком [7] запроваджується поняття нормальної матриці крайових умов і відповідно нормальної параболічної крайової задачі для систем довільного порядку; доводиться, що задача, спряжена до такої задачі, є також параболічною і нормальною; наводяться властивості матриці Гріна нормальної задачі.

Зауважимо, що спряжена задача в одному частинному випадку для параболічних систем вивчалась у роботі [6], у загальному випадку для систем першого порядку по t відповідні результати наведені у замітці [2].

Використаємо позначення і результати із робіт [3—5].