МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 18, № 5 (1975), 705—710

УДК 512

ОБ ОБОБЩЕННО ОДНОРЯДНЫХ КОЛЬЦАХ

Ю. А. Дрозд

Доказывается равносильность условий: (1) кольцо A обобщенно однорядно (не обязательно артиново); (2) всякий конечнопредставимый A-модуль — полуцепной; (3) A полусовершенно и проективное накрытие каждого неразложимого конечнопредставимого модуля неразложимо. Библ. 9 назв.

Обобщенно однорядные артиновы кольца ввел в рассмотрение Накаяма [1], который доказал, что всякий модуль над таким кольцом разлагается в прямую сумму цепных *). Л. А. Скорняков [2] установил, что и наоборот, выполнение последнего условия уже для одних правых модулей влечет артиновость и обобщенную однорядность. В. В. Кириченко [3], отказавшись от условия артиновости, показал, что в классе нетеровых справа колец обобщенно однорядные кольца характеризуются тем, что все конечнопорожденные правые модули над ними — полуцепные.

В настоящей работе мы рассмотрим кольца без всяких ограничений конечности и докажем следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. *Следующие условия равносильны*:

(1) *кольцо A обобщенно однорядно*;

(2) *всякий конечнопредставимый* [4] *правый A-модуль — полуцепной*;

(2′) *всякий конечнопредставимый левый A-модуль — полуцепной*;

*) Следуя [2], *цепным* назовем модуль, структура подмодулей которого линейна, а *полуцепным* — прямую сумму цепных модулей. Если правый (левый) регулярный A-модуль — полуцепной, назовем кольцо A *праворядным* (*леворядным*). Кольца, одновременно право- и леворядные, называются *обобщенно однорядными*.

(3) *A полусовершенно* [5] *и проективное накрытие каждого неразложимого A-модуля* (*как правого, так и левого*) *неразложимо.*

Существует много примеров ненетеровых обобщенно однорядных колец (например, все кольца нормирования [4], их факторкольца, кольца матриц над ними и т. п.). Следующий пример показывает, что для них в теореме, вообще говоря, нельзя заменить конечнопредставимость конечнопорожденностью.

Пусть B — кольцо p-целых чисел (т. е. рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на фиксированное простое число p), A — кольцо треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \qquad (b \in B;\ a, c \in \mathbf{Q}).$$

Легко проверить, что оно обобщенно однорядно [3]. Пусть P — двумерное векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$, рассматриваемое как правый A-модуль (очевидно, проективный и циклический). Построим, следуя [6, § 32в], неразложимую абелеву группу без кручения G ранга n, p-ранга $n-1$ и q-ранга n при $q \neq p$. Последнее обеспечивает возможность рассматривать G как B-подмодуль в $\mathbf{Q}^n$. Поэтому в правом A-модуле $P^n = \mathbf{Q}^n \oplus \oplus \mathbf{Q}^n$ есть подмодуль $N = G \oplus 0$. Обозначим $M = P^n/N$. Очевидно, $N \subset \operatorname{rad} P^n$, значит, P^n — проективное накрытие M. Если модуль M разложим: $M = M_1 \oplus M_2$, то из [5] следует, что $P^n = P_1 \oplus P_2$, а $N = N_1 \oplus N_2$, где P_i — проективное накрытие M_i, а $N_i = P_i \cap N$. Но из неразложимости G следует неразложимость N, а из $N \subset P_i$ следует $P_i = P^n$, поскольку G — ранга n. Значит, M — неразложимый, конечнопорожденный, но не цепной модуль.

Отметим еще, что кольцо A — нетерово слева. Поэтому наш пример показывает также, что в основной теореме работы [2] пункт (в) в общем случае неверен. Возможно, он имеет место для колец, полных в топологии, определенной степенями радикала.

Переходя к доказательству теоремы, заметим, прежде всего, что конечнопорожденный цепной модуль содержит ровно один максимальный подмодуль. Поэтому из результатов [7] следует, что если регулярный левый или правый A-модуль — полуцепной, то кольцо A — полусовершенно. Это позволяет в дальнейшем считать все кольца полусовершенными.

Для вычисления конечнопредставимых модулей мы воспользуемся способом, предложенным Ауслендером [8]. Именно, всякий конечнопредставимый A-модуль изоморфен коядру некоторого гомоморфизма $f\colon P \to Q$, где P и Q — конечнопорожденные проективные A-модули. Кроме того, из полусовершенности вытекает, что если $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{rad} P$, а $\operatorname{Jm} f \subset \operatorname{rad} Q$, то f определен однозначно, с точностью до автоморфизмов модулей P и Q [5]. Разлагая P и Q в прямую сумму неразложимых: $P = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} P_j$, $Q = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Q_i$, мы получаем возможность отождествлять гомоморфизмы f с матрицами вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(P_j, Q_i)$. Для краткости мы будем называть неразложимые проективные модули *главными*.

ЛЕММА 1. *Для полусовершенного кольца A следующие условия равносильны:*

(1) *A праворядно (леворядно);*

(2) *для любой пары гомоморфизмов правых (левых) главных A-модулей $f_i\colon P_i \to P$ $(i = 1, 2)$ разрешимо одно из уравнений $f_1 = f_2x$ или $f_2 = f_1y$ (здесь, конечно, $x \in \operatorname{Hom}_A(P_1, P_2)$, а $y \in \operatorname{Hom}_A(P_2, P_1)$);*

(3) *для любой пары гомоморфизмов левых (правых) главных A-модулей $f_i\colon P \to P_i (i = 1, 2)$ разрешимо одно из уравнений $f_1 = xf_2$ или $f_2 = yf_1$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если A праворядно, то либо $\operatorname{Im} f_1 \subset \operatorname{Im} f_2$, либо $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Im} f_1$, а тогда разрешимость уравнения $f_1 = f_2x$ или $f_2 = f_1y$ следует из проективности P_1 и P_2.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если A не праворядно, в некотором главном правом A-модуле P найдутся подмодули M_1 и M_2 и элементы $a_1 \in M_1 \setminus M_2$ и $a_2 \in M_2 \setminus M_1$. Тогда для некоторых примитивных идемпотентов e_1 и e_2 кольца A $a_1e_1 \in M_1 \setminus M_2$ и $a_2e_2 \in M_2 \setminus M_1$. Обозначим $P_i = e_iA$, а $f_i\colon P_i \to P$ — гомоморфизмы, переводящие e_i в a_ie_i.

Поскольку $\operatorname{Im} f_1 \not\subset \operatorname{Im} f_2$, а $\operatorname{Im} f_2 \not\subset \operatorname{Im} f_1$, оба уравнения $f_1 = f_2 x$ и $f_2 = f_1 y$ неразрешимы.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) следует из двойственности между категориями конечнопорожденных проективных правых и левых A-модулей, которая осуществляется функтором $\operatorname{Hom}_A(\cdot, A)$.

Следствие. *Праворядность, леворядность, обобщенная однорядность суть 3-минорные свойства в смысле* [9]. *Иными словами, кольцо A обладает этими свойствами тогда и только тогда, когда им обладают все кольца вида eAe, где e — сумма не более чем трех примитивных ортогональных идемпотентов из A.*

ЛЕММА 2. *Если полусовершенное кольцо A не леворядно*, то *существует конечнопредставимый неразложимый правый A-модуль M с разложимым проективным накрытием.*

Доказательство. По лемме 1, если A не леворядно, то найдется пара гомоморфизмов главных правых A-модулей f_i: $P \to P_i$ $(i = 1, 2)$ таких, что уравнения $f_1 = x f_2$ и $f_2 = y f_1$ неразрешимы. Пусть f: $P \to P_1 \oplus P_2 = Q$ — гомоморфизм, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Поскольку f_i — не изоморфизмы, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{rad} Q$, а так как $f_i \neq 0$, то $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{rad} P$. Положим $M = \operatorname{Coker} f$. Тогда $P(M) = Q$, а если M разложим, найдутся автоморфизмы α: $P \to P$ и β: $Q \to Q$ такие, что $\beta f \alpha = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\beta f \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}$ где $g_i \in \operatorname{Hom}_A(P, P_i)$. Предположим, что β задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \qquad \beta_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(P_j, P_i).$$

Тогда, например, $\beta_{21} f_1 + \beta_{22} f_2 = 0$. Но либо β_{21}, либо β_{22} — изоморфизм, а тогда одно из уравнений $f_1 = x f_2$ или $f_2 = y f_1$ разрешимо. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Из леммы 2 сразу следует импликация (3) $\Rightarrow$ (1) основной теоремы. Далее, если выполнено условие (2), то A автоматически праворядно, а по лемме 2 оно и леворядно (так как построенный модуль M — не цепной). Итак, (2) $\Rightarrow$ (1), и, аналогично, (2′) $\Rightarrow$ (1). Заметим также, что если выполнены одновременно условия (1) и (3), то, конечно, выполняются (2) и (2′), так как фактормодули цепного модуля сами цепные. Таким образом, остается доказать (1) $\Rightarrow$ (3). Ввиду сказанного выше, это вытекает из следующей «леммы об элементарных делителях».

ЛЕММА 3. *Пусть A — обобщенно однорядное кольцо, P_j ($j = 1, \ldots, n$) и Q_i ($i = 1, \ldots, m$) — главные A-модули, $P = \bigoplus_{j=1}^{n} P_j$, $Q = \bigoplus_{i=1}^{m} Q_i$, $f\colon P \to Q$ — гомоморфизм, задаваемый матрицей (f_{ij}) ($f_{ij} : P_j \to Q_i$). Тогда существуют такие автоморфизмы $\alpha\colon P \to P$ и $\beta\colon Q \to Q$, что $\beta f \alpha = (g_{ij})$ — «диагональная матрица», т. е. при подходящей нумерации модулей Q_i и P_j, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$.*

Доказательство проведем индукцией по $m + n$. База индукции, $m + n = 2$, тривиальна. Предположим, что для меньших значений $m + n$ лемма уже доказана. Тогда, отбрасывая последнюю строку матрицы f, мы можем привести оставшуюся часть к диагональному виду, т. е. считать, что

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если для какого-то j разрешимо уравнение $f_{mj} = xf_{jj}$, то, применяя автоморфизм Q, задаваемый матрицей $E - xe_{mj}$ (здесь E — единичная матрица, e_{ij} — матричные единицы), мы сделаем $f_{mj} = 0$ и сможем воспользоваться индукционным предположением. В противном случае, по лемме 1, найдутся x_j: $Q_m \to Q_j$ такие, что $f_{jj} = x_j f_{mj}$ для всех j. Кроме того, из леммы 1 следует, что найдется номер k такой, что $f_{mj} = f_{mk} y_j$ для всех $j \neq k$. Но тогда, применяя автоморфизмы модулей P и Q, мы приведем f к виду

$$\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & * & \vdots & * & \\ & & 0 & & \\ 0 & \ldots\ 0 & f_{mk} & 0\ \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

и вновь сможем воспользоваться предположением индукции. Это завершает доказательство леммы 3, а вместе с ней и основной теоремы.

Замечание. Поскольку условие (3) основной теоремы следует из заключения леммы 3, это заключение дает еще одну характеристику обобщенно однорядных колец (в классе полусовершенных).

Приведем в заключение пример, показывающий, что в основной теореме действительно нужно требовать выполнения условия (3) как для правых, так и для левых модулей. Пусть A — подалгебра в алгебре 3×3-матриц над полем K с базисом $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{33}\}$. Она не праворядна, так как в главном правом модуле $e_{11}A$ есть два минимальных подмодуля: Ke_{12} и Ke_{13}. Однако элементарное вычисление показывает, что все неразложимые A-модули — это $e_{11}A$, $e_{22}A$, $e_{33}A$, $e_{11}A/e_{12}K$, $e_{11}A/e_{13}K$ и $e_{11}A/(e_{12}K + e_{13}K)$, т. е. условие (3) для правых модулей выполнено.

Киевский государственный университет

Поступило 15.IV.1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Nakayama T., Oh Frobenius algebras, II, Ann Math., 42 (1941), 1—21.
[2] Скорняков Л. А., Когда все модули — полуцепные, Матем. заметки, 5, № 2 (1969), 173—182.
[3] Кириченко В. В., Обобщенно однорядные кольца, Препринт ИМ-75-1, Киев, 1975.
[4] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, М., «Мир», 1971.
[5] Bass N., Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 466—488.
[6] Курош А. Г., Теория групп, М., «Наука», 1967.
[7] Muller B. J., On semi-perfect rings, Illinois J. Math., 14 (1970), 464—467.
[8] Auslander M., Representation dimension of Artin algebras, Queen Mary College Math. Notes, 1971.
[9] Drozd Yu. A., Minors and tneorems of reduction, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Rings, Mod. and Rad., 6 (1971), 173—176.