ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
36 (1972), 328—370

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД, В. В. КИРИЧЕНКО

О КВАЗИБАССОВЫХ ПОРЯДКАХ

Изучаются квазибассовы порядки над полными локальными дедекиндовыми кольцами, т. е. такие, всякий неразложимый модуль представления которых есть прямое слагаемое надкольца. Дается способ, позволяющий свести изучение таких порядков к случаю «небольших» алгебр. Понятия бассовости и квазибассовости переносятся на случай конечномерных алгебр.

Хорошо известно, что ряд важных классов колец естественно характеризуется свойствами модулей над ними. Это часто дает удобный и сильный аппарат для исследования. В качестве примера можно привести полупростые кольца, наследственные порядки, регулярные локальные кольца.

Пусть Λ — коммутативное нётерово кольцо без нильпотентных элементов размерности Крулля 1, целое замыкание которого является конечнопорожденным Λ-модулем. В работах ([1]), ([2]) Басс доказал, что если каждый идеал Λ имеет две образующие, то всякий Λ-модуль без кручения (torsionless) разлагается в прямую сумму идеалов кольца Λ. Для областей целостности это условие является также и необходимым ([1]).

Результаты Басса и методы, развитые им в ([1]) и ([2]), оказались очень полезными для теории целочисленных представлений.

Класс колец, фактически совпадающий с классом колец, изучавшимся Бассом, рассматривался З. И. Боревичем и Д. К. Фаддеевым под названием порядков с циклическим индексом ([3]).

А. В. Ройтер ([4]) перенес результаты Басса на модули представлений некоммутативных порядков. Он показал, что наличие двух образующих у любого идеала остается достаточным для распадения в прямую сумму идеалов модулей представлений некоммутативных порядков.

Из работ ([2]), ([3]), ([4]) видно, что существенную роль играет не ограничение на число образующих у идеалов, а некоторое другое условие, вытекающее из этого ограничения, именно, горенштейновость всех надколец.

Исходя из условий горенштейновости надколец, А. В. Ройтер и авторы ввели в рассмотрение новый класс порядков, в частности, содержащий все наследственные порядки, а в коммутативном случае совпадающий с классом порядков с циклическим индексом. Эти порядки мы назвали бассовыми ([5]).

Для бассовых порядков всякий модуль представления распадается в прямую сумму идеалов ([5]). В ([5]) изучаются также свойства бассовых порядков. Доказывается, что для бассовых порядков, и только для них, двусторонние идеалы образуют группоид относительно правильного умножения. Кроме того, дается полное описание бассовых порядков в локальном случае.

Настоящая работа посвящена локальному изучению бассовых порядков, а также более широкого класса порядков, которые мы называем квазибассовыми.

Устанавливается, что бассовы порядки — это, в некотором смысле, наименьший класс порядков, содержащий наследственные порядки и порядки, удовлетворяющие условию Басса. Именно, доказывается, что в локальном случае всякий бассов порядок Морита-эквивалентен прямой сумме наследственного порядка и порядка, всякий идеал которого имеет две образующие.

Далее мы вводим квазибассовы порядки как такие, у которых всякий неразложимый модуль представления изоморфен прямому слагаемому некоторого надкольца. Оказывается, что порядок Λ квазибассов тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов всякого неразложимого Λ-модуля представления бассово. Поэтому в коммутативном случае всякий квазибассов порядок бассов.

Всякий неразложимый модуль представления квазибассового порядка является подмодулем неразложимого проективного модуля. Тем самым выделяется довольно широкий класс порядков, у которых в силу естественных причин есть только конечное число неразложимых модулей представлений.

Отметим, что распадение представлений в прямую сумму идеалов, по-видимому, не является достаточно естественным условием, так как оно не сохраняется при переходе к Морита-эквивалентным порядкам *. Условие того, что всякий неразложимый модуль представления изоморфен подмодулю неразложимого проективного модуля, выглядит более естественным, по крайней мере, в локальном случае.

Понятия бассовости и квазибассовости естественно переносятся на случай конечномерных алгебр. Возможность такого перенесения обуславливается тем, что для модулей над конечномерными алгебрами, как и для модулей представлений над полным локальным кольцом, имеется теория проективных накрытий. Поэтому кажется весьма правдоподобной возможность введения понятий бассовости и квазибассовости и в более общих ситуациях.

Изложим кратко содержание статьи. В §§ 1, 2 излагаются общие сведения о модулях представлений, а также некоторые технические средства, применяемые в дальнейшем. В частности, в § 1 дается способ,

* Действительно, если Λ — произвольный порядок с конечным числом неразложимых представлений, то легко видеть, что для достаточно большого n матричное кольцо $M_n(\Lambda)$ является порядком, все представления которого разлагаются в прямую сумму идеалов.

позволяющий иногда сводить изучение представлений к случаю порядков в «небольших» алгебрах. В § 2 изучаются проективные и инъективные модули представлений и доказывается один критерий наследственности. Основным результатом этого параграфа является «лемма о выбрасывании» (лемма 2.9) и уточняющие ее утверждения.

В § 3 лемма о выбрасывании применяется для получения некоторых признаков бассовости и нового доказательства теоремы редукции для бассовых порядков [([5]), теорема 11.3].

В § 4 дается определение квазибассовых порядков и устанавливаются их свойства. Здесь же изучается некоторый подкласс класса квазибассовых порядков — порядки веса 2.

§ 5 посвящен доказательству теоремы редукции, сводящей изучение квазибассовых порядков к случаю порядков в «небольших» алгебрах.

В § 6 обсуждаются вопросы, связанные с перенесением определения квазибассового порядка на глобальный случай.

В § 7 понятия бассовости и квазибассовости переносятся на случай конечномерных алгебр.

Наконец, в § 8 доказывается одно предложение Басса ([2]) о коммутативных кольцах размерности Крулля 1, а также дается геометрическая интерпретация коммутативных бассовых колец как локальных колец кривых с квадратичными особенностями.

Авторы выражают глубокую благодарность А. В. Ройтеру, критические замечания которого оказали существенную помощь при написании этой статьи.

§ 1. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем под кольцом мы будем подразумевать ассоциативное кольцо с единицей, под модулем — унитарный модуль, т. е. такой модуль, в котором единица кольца действует тождественным образом.

Если A — правый (левый) Λ-модуль, то обозначим через $E(A)$ его кольцо эндоморфизмов: $E(A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$. Тогда A естественно рассматривать как левый (правый) $E(A)$-модуль. Кольцо эндоморфизмов A как $E(A)$-модуля будем называть кольцом множителей модуля A и обозначать $\Lambda(A)$. Существует естественный гомоморфизм колец $\Lambda\to\Lambda(A)$ и, очевидно, $\mathrm{Hom}_{\Lambda(A)}(A, A)\simeq E(A)$.

Следуя ([6]), будем говорить, что модуль A делит модуль B, и писать $A\diagdown B$, если $\sum\limits_{\varphi:A\to B}\mathrm{Im}\,\varphi=B$. Если B — конечнопорожденный модуль, то это равносильно существованию эпиморфизма $A^n\to B$, где A^n — прямая сумма n экземпляров модуля A.

Модуль A назовем обратимым, если он, рассмотренный как $E(A)$-модуль, делит $E(A)$. Нам понадобятся следующие известные факты.

Предложение 1.1 [ср. ([7]), гл. XVII, упр. 12]. *Модуль A обратим тогда и только тогда, когда он является конечнопорожденным проективным $\Lambda(A)$-модулем.*

Доказательство. Обозначим $E=E(A)$, $\Gamma=\Lambda(A)$. Предположим, что A обратим, т. е. $A\diagdown E$. Поскольку E — конечнопорожденный E-модуль, существует эпиморфизм $A^n\to E$, откуда следует, что $A^n\simeq E\oplus X$ (как E-модуль). Но тогда $\Gamma^n=\mathrm{Hom}_E(A^n, A)\simeq\mathrm{Hom}_E(E\oplus X, A)\simeq A\oplus\mathrm{Hom}_E(X, A)$, т. е. A — конечнопорожденный проективный Γ-модуль.

Наоборот, пусть A — конечнопорожденный проективный Γ-модуль. Тогда A — прямое слагаемое конечнопорожденного свободного Γ-модуля: $\Gamma^m \simeq A\oplus Y$, откуда $A^m=\mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma^m, A)\simeq\mathrm{Hom}_\Gamma(A\oplus Y, A)\simeq E\oplus\mathrm{Hom}_\Gamma(Y, A)$, т. е. $A\diagdown E$.

Предложение 1.2. *Пусть Λ — нетерово кольцо, A — конечнопорожденный Λ-модуль. Тогда существует точная последовательность $E(A)$-модулей:*

$$0\to E(A)\to A^n\to A^m.$$

Доказательство. Существует точная последовательность

$$\Lambda^m\to\Lambda^n\to A\to 0,$$

применяя к которой точный слева функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, A)$, мы и получим искомую точную последовательность.

ТЕОРЕМА 1.3 (Морита). *Если P — проективный Λ-модуль и $P\diagdown\Lambda$, $\Gamma=E(P)$, то категории Λ-модулей и Γ-модулей естественно эквивалентны, причем эта эквивалентность осуществляется функторами $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \cdot)$ и $\cdot\otimes_\Gamma P$.*

Доказательство см. в [8].

Кольца Λ и Γ, удовлетворяющие условию теоремы 1.3, называются Морита-эквивалентными.

Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо, k — его поле частных. В соответствии с [9] назовем $\mathfrak{o}$-решетками конечнопорожденные $\mathfrak{o}$-модули без кручения. Если на $\mathfrak{o}$-решетке Λ введено умножение, превращающее ее в ассоциативную $\mathfrak{o}$-алгебру с единицей, то Λ называется $\mathfrak{o}$-кольцом, а Λ-модули, которые как $\mathfrak{o}$-модули являются $\mathfrak{o}$-решетками,— модулями представлений.

Всякое $\mathfrak{o}$-кольцо Λ естественно погружается в конечномерную k-алгебру $\tilde{\Lambda}=\Lambda\otimes_{\mathfrak{o}} k$. Поэтому $\mathfrak{o}$-кольца называются также $\mathfrak{o}$-порядками или просто порядками. В дальнейшем мы всегда будем считать алегбру $\tilde{\Lambda}$ полупростой и сепарабельной. Всякий Λ-модуль представления A естественно погружается в $\tilde{\Lambda}$-модуль $\tilde{A}=A\otimes_{\mathfrak{o}} k$. Модули представлений A и B назовем рационально эквивалентными, если $\tilde{A}\simeq\tilde{B}$. Модули представлений, рационально эквивалентные A, естественно вкладываются в $\tilde{A}$ и образуют структуру относительно сложения и пересечения. Те из них, которые содержат A, называются надмодулями A и образуют подструктуру с условием минимальности. Длину $\tilde{\Lambda}$-модуля $\tilde{A}$ будем называть рациональной длиной модуля представления A и обозначать $\tilde{l}(A)$. Если $\tilde{l}(A)=n$, то модуль A иногда называется n-членным. Одночленные модули называются неприводимыми, а модули, разлагающиеся в прямую сумму неприводимых,— вполне разложимыми.

Для всякого правого (левого) модуля представления A определен двойственный левый (правый) модуль представления $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(A, \mathfrak{o})$, причем существует естественный изоморфизм $A \simeq A^{**}$. Эта двойственность переводит рационально эквивалентные модули в рационально эквивалентные и индуцирует антиизоморфизм структур модулей, рационально эквивалентных A и A^*.

Очевидно, $E(A) \simeq E(A^*)$ и $\Lambda(A) \simeq \Lambda(A^*)$. Легко видеть, что $E(A)$ и $\Lambda(A)$ — также $\mathfrak{o}$-кольца, причем $\widetilde{\Lambda(A)} \simeq \widetilde{\Lambda}/\mathrm{Ann}\,\widetilde{A}$ и

$$\Lambda(A) = \{\lambda \mid \lambda \in \widetilde{\Lambda(A)},\ A\lambda \subset A\}.$$

Следовательно, $\mathfrak{o}$-кольцо $\Lambda(A)$ является надкольцом $\mathfrak{o}$-кольца Λ в том смысле, что существует гомоморфизм колец $\varphi : \Lambda \to \Lambda(A)$ такой, что $\widetilde{\varphi(\Lambda)} = \widetilde{\Lambda(A)}$. Наоборот, всякое надкольцо Γ $\mathfrak{o}$-кольца Λ является кольцом множителей некоторого Λ-модуля представления A (в качестве A можно, например, взять само Γ, рассмотренное как Λ-модуль). Среди надколец выделяются точные надкольца — те, которые содержат Λ *.

На множестве надколец введем операцию пересечения. Именно, если $\Gamma_1 = \Lambda(A_1)$ и $\Gamma_2 = \Lambda(A_2)$, то положим

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Lambda(A_1 \oplus A_2).$$

Нетрудно убедиться, что это определение не зависит от выбора A_1 и A_2. Если $\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_2$, то эта операция совпадает с теоретико-множественным пересечением. Относительно пересечения надкольца образуют полуструктуру с условиями минимальности и максимальности [см. напр., ([9])], а точные надкольца образуют в ней подполуструктуру. Порядок в этой полуструктуре будем обозначать символом $<$; очевидно, $\Gamma_1 < \Gamma_2$ означает, что Γ_2 есть надкольцо Γ_1.

Максимальные элементы полуструктуры точных надколец $\mathfrak{o}$-кольца Λ называются максимальными надкольцами Λ. Если Λ не имеет собственных точных надколец, то оно называется максимальным порядком (в алгебре $\widetilde{\Lambda}$).

Для модулей представлений введенные выше понятия кольца множителей, делимости, обратимости по существу совпадают с определениями, принятыми в ([9]). Из предложения 1.2 при этом следует, что для любого модуля представления A $A \diagdown \Lambda^*(A)$ (этот факт доказан в ([9])). Нам понадобится также следующий результат, доказанный в ([9]) (п. п. 22°, 31°).

Предложение 1.4. *Если A — модуль представления максимального порядка, то $E(A)$ — также максимальный порядок.*

В дальнейшем часто встречается следующая ситуация; Λ — некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо, P — проективный конечнопорожденный Λ-модуль, $\Gamma = E(P)$. В этом случае имеется точный функтор $F : C(\Lambda) \to C(\Gamma)$, где

---

* Обычно под надкольцами понимались именно точные надкольца [см., например, ([9])], однако для нас удобнее более общее определение.

$C(\Lambda)$ — категория конечнопорожденных правых Λ-модулей, $F=$ $=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \cdot)$, и сопряженный к F точный справа функтор $G: C(\Gamma)\to$ $\to C(\Lambda)$, $G=\cdot\otimes_\Gamma P$.

ТЕОРЕМА 1.5. *Функтор FG естественно эквивалентен тождественному функтору I категории $C(\Gamma)$.*

Доказательство. Для каждого Γ-модуля B определен гомоморфизм $f_B: B\to\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B\otimes_\Gamma P)$, где $f_B(b)(a)=b\otimes a$. Тем самым определяется естественный гомоморфизм функторов $f: I\to FG$. Если $B=\Gamma^n$, то f_B — изоморфизм. Пусть B — произвольный Γ-модуль. Тогда существует точная последовательность $\Gamma^n\to\Gamma^m\to B\to 0$. Учитывая, что F точен, а G точен справа, получаем коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma^n & \longrightarrow & \Gamma^m & \longrightarrow & B & \to & 0\\
{\scriptstyle f_{\Gamma^n}}\downarrow & & {\scriptstyle f_{\Gamma^m}}\downarrow & & {\scriptstyle f_B}\downarrow & & \\
FG(\Gamma^n) & \to & FG(\Gamma^m) & \to & FG(B) & \to & 0
\end{array}$$

Поскольку f_{Γ^n} и f_{Γ^m} — изоморфизмы, то и f_B — изоморфизм, что и требовалось доказать.

Следствие 1.6. *Всякий Γ-модуль представления B изоморфен $F(A)$, где A есть Λ-модуль представления, причем $E(A)\simeq E(B)$, и если рассматривать A и B как Ω-модули, где $\Omega=E(A)=E(B)$, то A и B делят друг друга.*

Доказательство. Пусть T — подмодуль $G(B)$, состоящий из всех $\mathfrak{o}$-периодических элементов, $A=G(B)/T$. Тогда точная последовательность

$$0\to T\to G(B)\to A\to 0$$

переводится функтором F в точную последовательность

$$0\to F(T)\to B\to F(A)\to 0.$$

Но $F(T)$ — периодический подмодуль модуля представления B, поэтому $F(T)=0$ и $B\simeq F(A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, A)$. Далее,

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(B,B)\simeq\mathrm{Hom}_\Gamma(B,\mathrm{Hom}_\Lambda(P,A))\simeq$$
$$\simeq\mathrm{Hom}_\Lambda(B\otimes_\Gamma P, A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(G(B),A)=\mathrm{Hom}_\Lambda(A,A),$$

так как A есть $\mathfrak{o}$-модуль без кручения, и потому при любом гомоморфизме $G(B)\to A$ подмодуль T переходит в ноль.

Пусть $\Omega=E(A)=E(B)$. Существует точная последовательность Γ-модулей $\Gamma^n\to P\to 0$, которая после тензорного умножения слева на B дает точную последовательность Ω-модулей $B^n\to G(B)\to 0$. Таким образом, $B\diagdown G(B)$ и, тем более, $B\diagdown A$ как Ω-модуль.

С другой стороны, для некоторого m $\Lambda^m\simeq P\oplus X$, откуда следует, что $A^m\simeq\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda^m,A)\simeq\mathrm{Hom}_\Lambda(P\oplus X,A)\simeq B\oplus\mathrm{Hom}_\Lambda(X,A)$, т. е. $A\diagdown B$ как Ω-модуль.

Следствие 1.7. *Если $\mathfrak{o}$-кольцо Λ имеет конечное число неизоморфных неразложимых модулей представлений, причем их рациональные* *длины не превосходят l, P — проективный Λ-модуль, $\Gamma=E(P)$, то Γ также имеет конечное число неизоморфных неразложимых модулей представлений, причем их рациональные длины не превосходят l.*

Доказательство. По следствию 1.6, всякий неразложимый Γ-модуль представления B имеет вид $F(A)$, где A — неразложимый Λ-модуль представления. Остается заметить, что функтор F не увеличивает рациональной длины модулей.

Предложение 1.8. *Если P — проективный Λ-модуль, $\Gamma=E(P)$, A — такой Λ-модуль представления, что $P\diagdown A$, то $A\simeq G(B)/T$, где B есть Γ-модуль представления, а T — подмодуль $G(B)$, состоящий из $\mathfrak{o}$-периодических элементов. При этом $E(A)\simeq E(B)$.*

Доказательство. Пусть $B=F(A)$. B есть Γ-модуль представления и, поскольку $P\diagdown A$, естественный гомоморфизм $\varphi: G(B)=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, A)\otimes_\Gamma P\to A$ является эпиморфизмом. Но A — модуль представления, поэтому $T\subset\mathrm{Ker}\,\varphi$ и φ индуцирует эпиморфизм $\overline{\varphi}:\overline{A}=G(B)/T\to A$. Так как, очевидно, $\tilde{l}(\overline{A})\leqslant\tilde{l}(A)$, то $\overline{\varphi}$ — изоморфизм. Изоморфизм $E(A)\simeq E(B)$ доказывается совершенно аналогично следствию 1.6.

§ 2. Проективные и инъективные модули

Начиная с этого параграфа, мы будем всюду предполагать, что $\mathfrak{o}$ есть полное локальное дедекиндово кольцо. В этом случае для модулей представлений имеет место теорема об однозначном разложении в прямую сумму неразложимых ([10]).

Пусть Λ — некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо, A — конечнопорожденный Λ-модуль. Проективный модуль $P=P(A)$ называется проективным накрытием модуля A [см. ([11])], если существует эпиморфизм $\varphi: P\to A$ такой, что $\mathrm{Ker}\,\varphi\subset PR$, где R — радикал Джекобсона кольца Λ. Необходимые сведения о проективных накрытиях содержатся в ([5]).

Для каждого (правого) Λ-модуля представления A определим его Λ-вес $\rho_\Lambda(A)$ следующей формулой:

$$\rho_\Lambda(A)=\frac{\tilde{l}(P(A))}{\tilde{l}(A)}.$$

Число $\rho^*(\Lambda)=\max\rho_\Lambda(A)$, где A пробегает все Λ-модули представлений, назовем весом $\mathfrak{o}$-кольца Λ. Пользуясь двойственностью, нетрудно убедиться, что если определить вес Λ по левым Λ-модулям представлений, то получится то же число.

Предложение 2.1. (а) $\rho^*(\Lambda)=\max\rho_\Lambda(A)$, *где A пробегает все неприводимые Λ-модули представлений*; (б) *если $\rho_\Lambda(A)=\rho^*(\Lambda)$ и $A\diagdown B$, то и $\rho_\Lambda(B)=\rho^*(\Lambda)$.*

Доказательство следует из того, что если $0\to A'\to A\to A''\to 0$ есть точная последовательность Λ-модулей представлений, то $\tilde{l}(A)=\tilde{l}(A')+\tilde{l}(A'')$ и $\tilde{l}(P(A))\leqslant\tilde{l}(P(A'))+\tilde{l}(P(A''))$, откуда $\rho_\Lambda(A)\leqslant\max\{\rho_\Lambda(A'), \rho_\Lambda(A'')\}$ и, кроме того, $\rho_\Lambda(A^n)=\rho_\Lambda(A)$.

Следствие 2.2. *$\rho^*(\Lambda)$ есть натуральное число.*

Следствие 2.3. $\rho^*(\Lambda)=\max\rho_\Lambda(A)$, *где A пробегает те неприводимые Λ-модули представлений, кольца множителей которых максимальны.*

Доказательство. Пусть A_0 — какой-нибудь неприводимый Λ-модуль представления, для которого $\rho_\Lambda(A_0)=\rho^*(\Lambda)$, Γ — максимальное надкольцо кольца $E(A_0)$, $A=\Gamma A_0$. Тогда $A_0 \diagdown A$ и потому $\rho_\Lambda(A)=\rho^*(\Lambda)$. Но, по предложению 1.4, $\Lambda(A)$ максимально.

Очевидно, Λ-модуль представления A проективен тогда и только тогда, когда $\rho_\Lambda(A)=1$. В частности, Λ наследственно тогда и только тогда, когда $\rho^*(\Lambda)=1$.

ТЕОРЕМА 2.4. *Следующие условия равносильны:*

(а) *$\mathfrak{o}$-кольцо Λ наследственно;*

(б) *Λ вполне разложимо и для всякого неприводимого Λ-модуля представления A структура модулей, рационально эквивалентных A, линейно упорядочена;*

(в) *всякое максимальное надкольцо Λ проективно как правый (левый) Λ-модуль;*

(г) *$\Lambda(R)=\Lambda$, где R — радикал кольца Λ, рассмотренный как правый (левый) Λ-модуль.*

Доказательство. (а)$\Leftrightarrow$(б) см. ([5]), следствие 4.4.

(а)$\Leftrightarrow$(в) вытекает из следствия 2.3 [см. также ([5]), теорема 3.1].

(а)$\Rightarrow$(г). Пусть $\Lambda=P_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus P_s^{n_s}$, где $P_1,\ldots,P_s$ — попарно неизоморфные модули. Тогда $P_1,\ldots,P_s$ — все неприводимые Λ-модули представлений, $R=R_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus R_s^{n_s}$, где $R_i=P_iR$ — единственный максимальный подмодуль в P_i. Но из линейности структуры неприводимых модулей следует, что и $R_1,\ldots,R_s$ — также все неприводимые Λ-модули представлений, а потому $\Lambda(R)=\Lambda$.

(г) $\Rightarrow$ (а). Обозначим через Γ кольцо множителей R как левого Λ-модуля: $\Gamma=\{\gamma\mid\gamma\in\tilde{\Lambda},\ \gamma R\subset R\}$. Тогда, очевидно, Γ есть сумма минимальных надмодулей R как правого Γ-модуля. Разложим Λ в прямую сумму неразложимых правых модулей: $\Lambda=P_1\oplus\ldots\oplus P_k$ и положим $R_i=P_iR$. $\Gamma=\Gamma_1\oplus\ldots\oplus\Gamma_k$, где Γ_i есть сумма минимальных надмодулей R_i. Предположим, что $\Gamma=\Lambda$, т. е. $\Gamma_i=P_i$ для всех i. Это означает, что P_i — единственный минимальный надмодуль R_i. Выберем теперь P_i так, чтобы $\tilde{l}(P_i)$ было наибольшим, и рассмотрим произвольный минимальный надмодуль Q_i модуля P_i. Если $X\neq P_i$ — максимальный подмодуль в Q_i, то $X\cap P_i=R_i$, т. е. X — минимальный надмодуль R_i, что невозможно. Итак, P_i — единственный максимальный подмодуль в Q_i и, согласно предложению 4.3 ([5]), Q_i неразложим и проективен. Продолжая это рассуждение, мы получим, что любой надмодуль модуля P_i неразложим и проективен. Но это возможно только при $\tilde{l}(P_i)=1$, значит, Λ вполне разложимо и всякий неприводимый Λ-модуль представления проективен, т. е. Λ наследственно.

Рассмотрим, как меняется функция ρ^* при изменении кольца Λ.

Предложение 2.5. (а) *если Γ — надкольцо Λ и A — произвольный Γ-модуль представления, то $\rho_\Gamma(A)\leqslant\rho_\Lambda(A)$. В частности, $\rho^*(\Gamma)\leqslant\rho^*(\Lambda)$;*

(б) *если* Λ *разлагается в кольцевую прямую сумму*

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{k} \Lambda_i,$$

то $\rho^*(\Lambda) = \max\limits_i \rho^*(\Lambda_i)$.

Доказательство очевидно.

Пусть теперь P — проективный Λ-модуль, $\Gamma = E(P)$; $F = \mathrm{Hom}_\Lambda(P, \cdot)$, $G = \cdot \otimes_\Gamma P$ — функторы, рассмотренные в § 1.

Предложение 2.6. (а) $\rho^*(\Gamma) \leqslant \rho^*(\Lambda)$;

(б) *если* A — *такой* Λ-*модуль представления, что* $P \diagdown A$, *то* $P(F(A)) = F(P(A))$.

Доказательство. Пусть A — произвольный Λ-модуль представления, $P(A)$ — его проективное накрытие. Тогда эпиморфизм $P(A) \to A$ при действии функтора F переходит в эпиморфизм $F(P(A)) \to F(A)$. Если $P \diagdown A$, то $P \diagdown P(A)$ и для некоторого n $P^n \simeq P(A) \oplus X$. Тогда

$$\Gamma^n \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P, P^n) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P, P(A) \oplus X) = F(P(A)) \oplus F(X),$$

т. е. $F(P(A))$ — проективный Γ-модуль. Поскольку функтор F не увеличивает рациональной длины, то отсюда следует утверждение (а).

Предположим теперь, что $P \diagdown A$, но $F(P(A)) \neq P(F(A))$. Тогда $F(P(A)) \simeq P(F(A)) \oplus Y$, где Y — также некоторый проективный Γ-модуль, и, по предложению 1.8, $P(A) \simeq GF(P(A)) \simeq G(P(F(A))) \oplus G(Y)$, причем $G(Y) \neq 0$. Но эпиморфизм $P(F(A)) \to F(A)$ при действии функтора G переходит в эпиморфизм $G(P(F(A))) \to GF(A)$, а по предложению 1.8 $A \simeq GF(A)/T$, где T — подмодуль $GF(A)$, состоящий из ρ-периодических элементов. Следовательно, существует эпиморфизм $G(P(F(A))) \to A$, что противоречит единственности проективного накрытия.

Следствие 2.7. *Если* A — *такой* Λ-*модуль представления, что* $P \diagdown A$, *то* $\rho_\Lambda(A) \leqslant \rho_\Gamma(F(A))$.

Двойственным понятием к понятию проективного модуля является понятие инъективного модуля представления, введенное А. В. Ройтером ([12]). Модуль представления Q называется инъективным модулем представления, если всякая точная последовательность модулей представлений

$$0 \to Q \to A \to B \to 0$$

расщепляема. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда модуль Q^* проективен. Из однозначности разложения следует, что неразложимый проективный Λ-модуль изоморфен прямому слагаемому Λ, и потому неразложимый инъективный Λ-модуль представления изоморфен прямому слагаемому Λ^*.

Нам понадобится следующий факт, доказанный в ([5]) (предложения 4.2 и 4.3).

Предложение 2.8. *Неразложимый проективный* (*инъективный*) *модуль представления имеет ровно один максимальный подмодуль* (*минимальный надмодуль*). *Наоборот, если* A *есть* Λ-*модуль представления*, *рациональная длина которого не меньше максимума рациональных длин неразложимых проективных Λ-модулей, и A имеет ровно один максимальный подмодуль (минимальный надмодуль), то A неразложим и проективен (инъективен).*

Модули представлений, которые одновременно проективны и инъективны, будем называть биективными модулями. Важную роль в дальнейшем будет играть следующая «лемма о выбрасывании».

ЛЕММА 2.9. *Если A — неразложимый биективный Λ-модуль, то существует собственное надкольцо Γ кольца Λ такое, что всякий неразложимый Λ-модуль представления, кроме A, есть Γ-модуль.*

Доказательство. Положим $\Gamma = \bigcap \Lambda(C)$, где C пробегает все неразложимые Λ-модули представлений, кроме A. Нужно проверить, что $\Gamma \neq \Lambda$. Пусть $\Gamma = \Lambda$. Тогда найдется конечный набор неразложимых Λ-модулей представлений $C_1, \ldots, C_k$ такой, что $C_i \neq A$ и $\Lambda = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \Lambda(C_i) = \Lambda(C)$, где $C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$. По предложению 1.2, существует точная последовательность $0 \to \Lambda \to C^n \to C^m$, а потому и точная последовательность $0 \to A \to C^n \to X \to 0$, где X — модуль представления, откуда следует, что $C^n \simeq A \oplus X$, так как A инъективен, но это противоречит однозначности разложения.

Мы будем говорить, что Γ получается из Λ выбрасыванием неразложимого биективного модуля A, и писать $\Gamma = \Lambda^-(A)$.

Нетрудно заметить, что и наоборот, если у Λ есть надкольцо Γ, имеющее те же неразложимые модули представлений, кроме A, то Λ-модуль A биективен.

ЛЕММА 2.10. *Пусть A — неразложимый биективный Λ-модуль, A_1 — его единственный минимальный надмодуль, A_2 — его единственный максимальный подмодуль, $\Gamma = \Lambda^-(A)$. Тогда если $A_1 \not\simeq A$, то $A_2 \not\simeq A$ и Γ-модуль A_1 проективен, а Γ-модуль A_2 инъективен.*

Доказательство. Поскольку $A_1 \not\simeq A$, то A_1 есть Γ-модуль и потому $A_1 = A\Gamma$. Но так как A — проективный Λ-модуль, то $\Lambda \simeq A \oplus X$, $\Gamma \simeq A\Gamma \oplus X\Gamma$ и $A_1 = A\Gamma$ — проективный Γ-модуль.

Если $A_2 \simeq A$, то A_2 инъективен и A — его единственный минимальный надмодуль, поэтому A_1, как единственный минимальный надмодуль модуля $A \simeq A_2$, изоморфен A, что противоречит предположению. Следовательно, $A_2 \not\simeq A$. Тогда $A_2^* \not\simeq A^*$ и есть минимальный надмодуль биективного модуля A^*. Поэтому A_2^* — проективный, а A_2 — инъективный Γ-модуль представления.

Предложение 2.11. *Пусть A — неразложимый проективный Λ-модуль, A_1 — его минимальный надмодуль. Тогда A_1 разлагается не более чем на два прямых слагаемых, и если A_1 разложим, то у него нет Λ-проективных прямых слагаемых. Двойственным образом, если A — неразложимый инъективный Λ-модуль представления, A_2 — его максимальный подмодуль, то A_2 также разлагается не более чем на два прямых слагаемых, и если A_2 разложим, то у него нет Λ-инъективных прямых слагаемых. Если A биективен, то A_1 и A_2 разложимы одновременно.*

Доказательство. Предположим, что A проективен, а A_1 разложим, и рассмотрим модуль $\bar{A}_1 = A_1/A_1R$. Его длина $l(\bar{A}_1)$ не меньше числа прямых слагаемых модуля A_1. Но $A_1R \supset AR$, $l(A_1/A)=1$ и $l(A/AR)=1$, откуда следует, что $l(\bar{A}_1) \leqslant 2$ и потому $A_1 = B \oplus C$, где B и C неразложимы, $A_1R = AR$, а $BR \oplus C$ и $B \oplus CR$ — максимальные подмодули в A_1, причем $(BR \oplus C) \cap A = (B \oplus CR) \cap A = AR$. Тогда $A/AR \simeq A_1/BR \oplus C \simeq$ $\simeq B/BR \simeq A_1/B \oplus CR \simeq C/CR$, следовательно, $P(B) \simeq P(C) \simeq A$ [см. (5), § 2] и, таким образом, ни B, ни C не могут быть проективными.

Остается заметить, что если A — биективный модуль, то у него всего один максимальный подмодуль $A_2 = AR$, и потому если A_1 разложим, то и A_2 разложим.

Предложение 2.12. *Если у модуля представления A есть ровно один минимальный надмодуль B, причем $\tilde{l}(P(B/A)) = \tilde{l}(A)$, то A инъективен.*

Доказательство. Обозначим $U = B/A$, $U^* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(U, k/\mathfrak{o})$ [см. (9)]. Тогда у модуля A^* есть один максимальный подмодуль B^*, причем $A^*/B^* \simeq U^*$ (9). Следовательно, $P(A^*) \simeq P(U^*)$. Пусть $P = P(U) \simeq e\Lambda$, где e — минимальный идемпотент кольца Λ. Покажем, что $P(U^*) \simeq \Lambda e$.

Разложим факторкольцо $\bar{\Lambda} = \Lambda/R$ в прямую сумму простых колец: $\bar{\Lambda} = f_1\bar{\Lambda} \oplus \ldots \oplus f_k\bar{\Lambda}$, где $f_1, \ldots, f_k$ — минимальные центральные идемпотенты. Простой Λ-модуль $U \simeq \bar{e}\bar{\Lambda}$, где $\bar{e} = e \bmod R$, причем U однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется тем идемпотентом f_i, для которого $Uf_i \neq 0$, или $\bar{e}f_i \neq 0$. Но тогда U^* — также простой Λ-модуль и $f_iU^* \neq 0$, откуда следует, что $U^* = \bar{\Lambda}\bar{e}$, так как $f_i\bar{e} \neq 0$. Поэтому $P(U^*) \simeq$ $\simeq \Lambda e$ и $\tilde{l}(P(U^*)) = \tilde{l}(e\Lambda) = \tilde{l}(A) = \tilde{l}(A^*)$. Значит, $A^* \simeq P(U^*)$ — проективный, а A — инъективный модуль.

§ 3. Бассовы порядки

Напомним, что согласно (5) $\mathfrak{o}$-порядок Λ называется горенштейновым, если Λ является инъективным (и, следовательно, биективным) модулем над собой. Порядок называется бассовым, если все его надкольца горенштейновы. Из результатов (5) и предложения 1.1 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3.1. *Следующие условия равносильны*:

1) *$\mathfrak{o}$-порядок Λ бассов*;

2) *для всякого Λ-модуля представления A $A \searrow \Lambda(A)$*;

3) *всякий Λ-модуль представления A проективен как $E(A)$-модуль*;

4) *для любых Λ-модулей представлений A и B из того, что $A \searrow B$, следует $A^* \searrow B^*$.*

Заметим, что эта теорема остается справедливой и без предположения локальности кольца $\mathfrak{o}$.

Предложение 3.2. *Если Λ — бассов порядок, P — проективный Λ-модуль, то $E(P)$ — бассов порядок.*

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 1.6.

В работе ([5]) (теорема 11.3) доказано, что всякий бассов порядок над полным локальным дедекиндовым кольцом разлагается в кольцевую прямую сумму наследственных порядков, порядков, изоморфных $M_n(L)$, где L — первичный бассов порядок, т. е. неразложимый как модуль бассов порядок, а также порядков, изоморфных $B_n(m, d)$, где $B_n(m, d)$ — порядок в матричной алгебре $M_n(D)$ над телом D, следующего вида: если $\mathfrak{D}$ — единственный максимальный порядок в D ([13]), π — его простой элемент, то B_n (m, d) имеет $\mathfrak{D}$-базис $d_{ij}e_{ij}$ (e_{ij} — матричные единицы), причем $d_{ij}=\pi^d$ при $i>m$, $j\leqslant m$, $d_{ij}=1$ при $i\leqslant m$ или $j>m$. Первичные бассовы порядки имеют рациональную длину 1 или 2, т. е. лежат либо в теле, либо в прямой сумме двух тел, либо в матричной алгебре второго порядка над телом.

В этом параграфе мы докажем теорему, из которой следует теорема редукции для бассовых порядков.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть Λ — горенштейнов порядок, неразложимый в в кольцевую прямую сумму, Γ — некоторое минимальное надкольцо кольца Λ. Если Γ горенштейново, то порядок Λ бассов и либо наследственен, либо изоморфен $M_n(L)$, где L — первичный бассов порядок, либо изоморфен $B_n(m, d)$.*

Доказательству теоремы мы предпошлем два вспомогательных факта.

ЛЕММА 3.4. *Всякое минимальное надкольцо Γ горенштейнова порядка Λ имеет вид $\Lambda^-(P)$, где P — неразложимый проективный (а потому и биективный) Λ-модуль.*

Доказательство. Если всякий проективный Λ-модуль является Γ-модулем, то $\Gamma=\Lambda$. Поэтому найдется неразложимый проективный Λ-модуль P, не являющийся Γ-модулем. Тогда $\Gamma\supset\Lambda^-(P)$, и потому $\Gamma=$ $=\Lambda^-(P)$.

Предложение 3.5. *Пусть Λ — горенштейнов порядок, P — неразложимый проективный Λ-модуль, P_1 — его единственный минимальный надмодуль. Если P_1 — проективный Λ-модуль, то Λ разлагается в кольцевую прямую сумму: $\Lambda=\Lambda_1\oplus\Lambda_2$, где Λ_1 — наследственный порядок в простой алгебре, и P — неприводимый Λ_1-модуль представления.*

Доказательство. Если P_1 — проективный Λ-модуль, то, по предложению 2.11, он неразложим. Кроме того, P_1 биективен, поэтому у него есть один минимальный надмодуль P_2. Если $X\neq P_1$ — максимальный подмодуль в P_2, то $X\cap P_1=P$, т. е. X — минимальный надмодуль P, отличный от P_1, что невозможно. Следовательно, у P_2 один максимальный подмодуль и потому P_2 — фактормодуль неразложимого проективного Λ-модуля P'. Но тогда $P_1=P_2R$ есть фактормодуль $P'R$, откуда либо $P_1\simeq P'R$ и $P_2\simeq P'$, либо $P'R\simeq P_1\oplus Y$, что невозможно, так как P' и P_1 — инъективные Λ-модули представлений. Таким образом, P_2 также есть неразложимый проективный Λ-модуль. Аналогично показывается, что и минимальный надмодуль P_3 модуля P_2 неразложим и проективен Продолжая этот процесс, мы построим цепочку неразложимых проективных Λ-модулей $P=P_0\subset P_1\subset P_2\subset$ ..., где P_i — максимальный подмодуль в P_{i+1}. Поскольку число неразложимых проективных Λ-модулей конечно, то найдутся два номера $i<j$ такие, что $P_i \simeq P_j$, откуда следует, что все Λ-модули, рационально изоморфные P, изоморфны одному из модулей $P_{i+1}, P_{i+2}, \ldots, P_j$, т. е. неразложимы и проективны. Поэтому P — неприводимый Λ-модуль, и если $\Lambda = \widetilde{\Lambda}_1 \oplus \widetilde{\Lambda}_2$, где $\widetilde{\Lambda}_1$ — простая компонента с неприводимым модулем $\widetilde{P}$, то $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_1 — наследственный порядок в $\widetilde{\Lambda}_1$.

Доказательство теоремы 3.3. Предположим, что Λ не наследственно и P — такой неразложимый проективный Λ-модуль, что $\Gamma = \Lambda^-(P)$. Пусть P_1 — минимальный надмодуль, Q_1 — максимальный подмодуль модуля P. Из предложений 2.11 и 3.5 следует, что P_1 не имеет Λ-проективных прямых слагаемых. По лемме 2.10, P_1 — проективный, а потому и биективный Γ-модуль. Если $\Lambda = P^s \oplus P'$, где P' не содержит прямых слагаемых, изоморфных P, то $\Gamma = P_1^s \oplus P'$ и всякий неразложимый проективный Γ-модуль есть либо проективный Λ-модуль, либо прямое слагаемое P_1. Аналогично, всякий неразложимый инъективный Γ-модуль есть либо инъективный (а потому и проективный) Λ-модуль, либо прямое слагаемое Q_1. Поэтому если P_1 неразложим, то $P_1 \simeq Q_1$.

Предположим, что P_1 разложим: $P_1 = A_1 \oplus A_2$; $Q_1 = B_1 \oplus B_2$, где B_i — единственный максимальный подмодуль A_i, а A_i — единственный минимальный надмодуль B_i. Тогда A_1 и A_2 — инъективные модули над Γ, но не над Λ, и потому они изоморфны B_1 или B_2. Если $A_1 \simeq B_1$, то $A_2 \simeq B_2$, и если $A_1 \simeq B_2$, то $A_2 \simeq B_1$. Следовательно, по предложению 3.5, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, где Γ_1 наследственно, причем $\Gamma_1 = P_1^s$, а $\Gamma_2 = P'$. Но тогда $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Gamma_2$, где $\Lambda_1 = P^s$, откуда, ввиду кольцевой неразложимости Λ, $\Gamma_2 = 0$, $\Lambda = P^s$, $\Gamma = \Gamma_1$ — единственное минимальное надкольцо Λ и Λ бассово. Кроме того, A_1 и A_2 — неприводимые модули, поэтому $\widetilde{l}(P) = 2$ и $\Lambda \simeq M_n(L)$, где $L = E(P)$ — первичный бассов порядок либо в прямой сумме двух тел, либо в матричной алгебре второго порядка над телом.

Пусть теперь P_1 неразложим, P_2 — его максимальный Γ-подмодуль, $P_2 \supset Q_1$. Если $P_2 \simeq P_1$, то $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, где Γ_1 наследственно, причем $\Gamma_1 = P_1^s$, $\Gamma_2 = P'$, откуда вновь следует, что $\Gamma_2 = 0$ и $\Lambda = P^s$, а P — неприводимый модуль; Λ бассово и $\Lambda \simeq M_n(L)$, $L = E(P)$ — первичный бассов порядок в теле.

Если $P_2 \not\simeq P_1$, то $P_2 \neq Q_1$ и есть минимальный надмодуль $Q_1 \simeq P_1$. Поэтому P_2 — биективный модуль над кольцом $\Gamma_2 = \Gamma^-(P_1)$. Кроме того, единственный максимальный подмодуль Q_2 Γ-модуля Q_1 изоморфен P_2. $\Gamma_2 \simeq P_2^s \oplus P'$, следовательно, Γ_2 также горенштейново и порядки $\Gamma_1 = \Gamma$ и Γ_2 удовлетворяют условию теоремы. Если P_2 — проективный Γ_1-модуль, то $\Gamma_1 = \Gamma_1' \oplus \Gamma_1''$, где Γ_1' — наследственный порядок, причем $\Gamma_1' = P_1^s \oplus P_2^m$, P_2 — проективный Λ-модуль и $\Lambda = \Lambda' \oplus \Gamma_1''$, где $\Lambda' = P^s \oplus P_2^m$. Ввиду неразложимости Λ, $\Gamma_1'' = 0$ и $\Lambda = \Lambda' = P^s \oplus P_2^m$. Поскольку P_2 — неприводимый модуль представления наследственного порядка Γ_1, то его кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{O}$ максимально [см. ([5]), предложение 3.2]. Но, очевидно, любой эндоморфизм

P_2 оставляет P_1 и P на месте, поэтому и $E(P)=\mathfrak{O}$. Тогда, выбирая согласованные $\mathfrak{O}$-базисы в P и P_2, легко заключить, что $\Lambda=\Lambda(P\oplus P_2)\simeq B_n(m,d)$.

Если же Γ_1-модуль P_2 не проективен, то к паре колец Γ_1 и Γ_2 применимы все те же рассуждения, что и к кольцам Λ и Γ, откуда следует, что либо $\Gamma_1=P_1^s$ и тогда $\Lambda=P^s$ и $\Lambda\simeq M_n(L)$, где L — первичный бассов порядок, либо P_2 неразложим и его единственный максимальный Γ_2-подмодуль $P_3\not\simeq P_2$ и есть биективный модуль над $\Gamma_3=\Gamma_2^-(P_2)$. Продолжая этот процесс, мы получим цепочку надколец $\Gamma_1\subset\Gamma_2\subset\Gamma_3\subset$ ..., которая должна оборваться, так как надкольца Λ удовлетворяют условию максимальности. Но она может оборваться только в одном из разобранных случаев, откуда и получаем доказательство теоремы.

Пусть Λ — бассов порядок, $\Lambda=P_1^{s_1}\oplus\ ...\ \oplus P_t^{s_t}$, где модули $P_1, ..., P_t$ попарно неизоморфны, $P=P_1\oplus\ ...\ \oplus P_t$, $\Gamma=E(P)$ есть порядок, Морита-эквивалентный Λ. Но из теоремы редукции следует, что Γ есть прямая сумма наследственных порядков, первичных бассовых порядков и порядков, изоморфных $B_2(1, d)$. Из результатов ([5]) следует, что у первичных бассовых порядков всякий идеал имеет не более двух образующих. Легко видеть, что то же верно и для $B_2(1, d)$. Таким образом, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.6. *Всякий бассов порядок Морита-эквивалентен кольцевой прямой сумме наследственного порядка и порядка, всякий идеал которого имеет не более двух образующих.*

Нам понадобится также следующий факт.

Предложение 3.7. *Пусть Λ — неразложимый (как модуль) горенштейнов порядок, Γ — его единственное минимальное надкольцо. Если порядок Γ разложим, то он наследственен, а Λ бассов.*

Доказательство. По предложению 2.11, $\Gamma=A_1\oplus A_2$, где A_1 и A_2— неразложимые проективные Λ-модули, а единственный максимальный подмодуль в Λ имеет вид $B_1\oplus B_2$, где B_i — единственный максимальный подмодуль A_i, а A_i — единственный минимальный надмодуль B_i. Пусть $\tilde{l}(A_1)\geqslant\tilde{l}(A_2)$, A_i' — минимальный надмодуль A_i. Тогда всякий максимальный подмодуль A_i' есть минимальный надмодуль B_i и потому совпадает с A_i. Следовательно, A_1' — проективный Γ-модуль и, по предложению 3.5, $\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2$, где Γ_1 — наследственный порядок и A_1 — неприводимый Γ_1-модуль (возможно, что $\Gamma_2=0$). Но тогда $\tilde{l}(A_2)=\tilde{l}(A_1)=1$ и потому A_2' — также проективный Γ-модуль, причем если $A_1'\simeq A_1$, то $A_2'\simeq A_2$, а если $A_1'\simeq A_2$, то $A_2'\simeq A_1$. В обоих случаях Γ — наследственный, а Λ — бассов порядок.

Следствие 3.8. *Пусть G — конечная p-группа порядка $n>p$, $\Lambda=Z_pG$ — ее групповое кольцо над кольцом целых p-адических чисел, Γ — минимальное надкольцо Λ (единственное, поскольку, как известно, Λ неразложимо и горенштейново). Тогда Γ неразложимо и негоренштейново.*

Доказательство следует из того, что при $n>p$ кольцо Λ, как известно, не является бассовым.

Замечание. Пользуясь случаем, отметим неточности, содержащиеся в п. п. 13° и 14° статьи ([5]). Именно, в п. 13°, на стр. 1433, говорится:

«$T_i = \Lambda_i/\Lambda_i R$ — двумерная алгебра над T». Однако, во-первых, тело T может не быть полем, а во-вторых, даже если T — поле, то оно не обязано содержаться в центре T_i. Поэтому следовало сказать: «T_i содержит подтело, изоморфное T, и как векторное пространство над ним имеет размерность 2». Все остальные рассуждения этого пункта проходят без изменений.

Необходимо также изменить формулировку предложения 14.1 на следующую: «Первичный бассов порядок в $M_2(D)$ сопряжен с порядком, содержащим все скалярные матрицы ωE $(\omega \in \mathfrak{O})$», поскольку сопряжение не оставляет, вообще говоря, на месте матрицы такого вида.

Авторы благодарны К. В. Роггенкампу, указавшему на эти неточности.

§ 4. Квазибассовы порядки

Определение. Порядок Λ над полным локальным дедекиндовым кольцом назовем квазибассовым, если всякий неразложимый Λ-модуль представления обратим.

Ввиду предложения 1.1 это эквивалентно тому, что всякий неразложимый модуль представления проективен над своим кольцом множителей, т. е. является прямым слагаемым некоторого надкольца порядка Λ.

Очевидно, всякий бассов порядок является квазибассовым. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим порядок Λ в $M_3(k)$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{m} & \mathfrak{m} & \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m} & \mathfrak{o} & \mathfrak{m} \end{pmatrix} + \mathfrak{o} \cdot 1,$$

где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$. $\Lambda = A \oplus B$, где $\tilde{l}(B) = 2$, причем легко проверить, что B — биективный Λ-модуль, а $\Lambda^-(B)$ — наследственный порядок. Поэтому порядок Λ квазибассов, но, ввиду теоремы 3.3, не бассов.

Однако имеет место следующий факт.

Предложение 4.1. *Неразложимый как модуль квазибассов порядок бассов.*

Доказательство. Поскольку порядок Λ квазибассов, а Λ^* — неразложимый модуль, то Λ^* проективен над $\Lambda = \Lambda(\Lambda^*)$ и потому Λ горенштейнов. Пусть Γ — минимальное надкольцо Λ. Если порядок Γ неразложим, то он также горенштейнов и, по теореме 3.3, Λ бассов. Если же Γ разложим, то Λ бассов по предложению 3.7.

Следствие 4.2. *Квазибассов порядок в прямой сумме тел бассов.*

Доказательство следует из того, что такой порядок разлагается в прямую сумму порядков, неразложимых как модули.

Предложение 4.3. *Если Λ — квазибассов порядок, P — проективный Λ-модуль, $\Gamma = E(P)$, то Γ — также квазибассов порядок.*

Доказательство. Пусть B — произвольный неразложимый Γ-модуль представления. По следствию 1.6, $B \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P, A)$, где A есть Λ-модуль представления, причем $E(B) \simeq E(A)$ и $B \diagdown A$ как $E(B)$-модуль. Но тогда A — неразложимый Λ-модуль представления, следовательно, он обратим, т. е. $A \diagdown E(A) = E(B)$, откуда $B \diagdown E(B)$, т. е. B обратим.

ТЕОРЕМА 4.4. *Следующие условия равносильны*:

(1) *порядок* Λ *квазибассов;*

(2) *всякий неразложимый* Λ-*модуль представления инъективен над своим кольцом множителей;*

(3) *кольцо эндоморфизмов любого неразложимого* Λ-*модуля представления бассово.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть A — неразложимый Λ-модуль представления. Тогда A проективен как $\Lambda(A)$-модуль, $\Lambda(A)$ квазибассово и, по предложению 4.3, $E(A)$ также квазибассово. Но $E(A)$ неразложимо, поэтому, по предложению 4.1, оно бассово.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть A — неразложимый Λ-модуль представления. Тогда $E(A)$ — бассов порядок и, по теореме 3.1, $A \diagdown E(A)$, т. е. A обратим.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Условие (2), ввиду двойственности, равносильно тому, что всякий неразложимый левый Λ-модуль представления обратим, т. е., как доказано выше, равносильно тому, что кольцо эндоморфизмов каждого неразложимого левого Λ-модуля представления бассово. Остается заметить, что $E(A) = E(A^*)$.

Следствие 4.5. *Рациональная длина неразложимого модуля представления квазибассового порядка не превосходит* 2.

Следствие 4.6. *Вес квазибассового порядка не превосходит* 3.

Доказательство. Предположим, что Λ — квазибассов порядок и $\rho^*(\Lambda) > 3$. Тогда, по предложению 2.1, найдется неприводимый Λ-модуль представления A такой, что $\rho_\Lambda(A) > 3$, т. е. если P — проективное накрытие A, то $\tilde{l}(P) \geqslant 4$. Применим к точной последовательности $P \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, \Lambda)$. Мы будем обозначать $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \Lambda) = \hat{X}$. Получим:

$$0 \to \hat{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{P} \to B \to 0,$$

где $B = \mathrm{Coker}\, \hat{\varphi}$. $\tilde{l}(B) \geqslant 3$, поэтому B разложим: $B = B_1 \oplus B_2$. Но тогда из ([5]) (предложение 4.1) следует, что $\hat{P} = P_1 \oplus P_2$, $\hat{A} = A_1 \oplus A_2$ и $B_i \simeq P_i / A_i$. Поскольку A неприводим, какое-то из его прямых слагаемых равно 0, например, $A_1 = 0$. Тогда $P_1 = B_1$ и $P = \hat{P}_1 \oplus \hat{P}_2$, причем $\hat{P}_1 \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$, что противоречит равенству $P = P(A)$.

Порядок Λ назовем однородным, если все неразложимые проективные Λ-модули имеют одинаковую рациональную длину. Для таких порядков следствие 4.6 допускает усиление.

Предложение 4.7. *Если* Λ — *однородный квазибассов порядок, то* $\rho^*(\Lambda) \leqslant 2$.

Доказательство. Пусть $p = l(P)$, где P — неразложимый проективный Λ-модуль. Предположим, что $\rho^*(\Lambda) > 2$, и пусть A — неприводимый Λ-модуль представления, для которого $\rho_\Lambda(A) > 2$. Если $p = 2$, то в $P(A)$ входит не менее двух прямых слагаемых и тогда $\rho_\Lambda(A) \geqslant 4$, что невозможно по следствию 4.6. Остается случай $p = 1$. Но тогда порядок

Λ вполне разложим, и все Λ-модули представлений вполне разложимы. В этом случае доказательство неравенства $\rho^*(\Lambda)\leqslant 2$ дословно повторяет доказательство следствия 4.6 [см. ([14])].

В ([14]) показано, что если Λ — вполне разложимый порядок и $\rho^*(\Lambda)\leqslant 2$, то у всякого его надкольца есть биективный модуль.

Предложение 4.8. *Если у всякого надкольца порядка Λ есть биективный модуль, то порядок Λ квазибассов.*

Доказательство. Пусть A — неразложимый Λ-модуль представления, $\Gamma=\Lambda(A)$, B — биективный неразложимый Γ-модуль. Тогда $\Gamma=B\oplus X$ и, по предложению 1.2, существует точная последовательность $0\to B\to A^n\to A^m$, расщепляемая из-за инъективности B. В силу однозначности разложения на неразложимые, отсюда следует, что $A\simeq B$, т. е. A есть проективный Γ-модуль.

Таким образом, во вполне разложимом случае все три условия: $\rho^*(\Lambda)\leqslant 2$, существование биективных модулей у всех надколец и квазибассовость — равносильны. Однако в общем случае неравенство в следствии 4.6 усилить нельзя. Именно, рассмотрим порядок Λ в $M_3(k)$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{m}^2 & \mathfrak{m} & \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m} & \mathfrak{o} & \mathfrak{m} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\cdot 1.$$

Нетрудно проверить, что порядок Λ имеет, кроме неприводимых, только два неразложимых модуля, причем оба они двучленные и их кольца эндоморфизмов изоморфны порядку в $M_2(k)$ вида

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{m} & \mathfrak{m} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{m} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\cdot 1,$$

который бассов ([15]). Кольца эндоморфизмов неприводимых Λ-модулей максимальны. Поэтому Λ — квазибассов порядок. Однако для неприводимого модуля A вида

$$(\mathfrak{o}, \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$$

проективное накрытие есть само Λ, откуда $\rho_\Lambda(A)=3$.

ТЕОРЕМА 4.9. *Следующие условия равносильны:*

(1) $\rho^*(\Lambda)\leqslant 2$;

(2) *у всякого надкольца порядка Λ есть биективный модуль.*

Если Λ однороден, то эти условия равносильны квазибассовости.

Установим сначала следующий результат.

Предложение 4.10. *Если у всякого надкольца порядка Λ есть биективный модуль и Λ не вполне разложим, то у Λ есть двучленный неразложимый биективный модуль.*

Доказательство. Поскольку Λ не вполне разложим, то у него есть неразложимый двучленный проективный модуль P. Предположим, что P не биективен, A_1 и A_2 — два его минимальных надмодуля. Покажем, что хотя бы один из них неразложим и проективен.

Пусть это не так. Тогда у A_i есть максимальный подмодуль $B_i \neq P$, причем $B_i \cap P = PR$ (R — радикал Λ). Обозначим $C = B_1 + B_2$, $D = A_1 + A_2$, B — неразложимый биективный Λ-модуль, $\Gamma = \Lambda^-(B)$. Докажем, что A_i и B_i остаются Γ-модулями (тогда C и D — также Γ-модули).

Поскольку A_i не проективны, то $A_i \not\simeq B$. По предложению 2.11 у A_i нет прямых слагаемых, изоморфных B. $B_i \not\simeq B$, так как у B_i по крайней мере два минимальных надмодуля: A_i и C. Предположим, что $B_1 \simeq B \oplus X$. Тогда у B_1 есть минимальный надмодуль $B' \oplus X$, где B' — минимальный надмодуль B. Если $B \simeq B'$, то любой модуль, рационально эквивалентный B, изоморфен B и $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, где Λ_1 — наследственный (даже максимальный) порядок с неприводимым модулем B, и P разложим, что противоречит предположению. Таким образом, если $X \not\simeq B$, то $B' \oplus X$ есть Γ-модуль, причем B' — проективный Γ-модуль и, по предложению 2.11, $B' \oplus X \neq A_1$. Но тогда $A_1 \cap (B' \oplus X) = B_1$ и B_1 — также Γ-модуль, что невозможно.

Итак, $B_1 \simeq B \oplus B$. Тогда сумма всех минимальных надмодулей B_1 есть $B' \oplus B'$, причем $l(B' \oplus B'/B_1) = 2$, откуда следует, что $B' \oplus B' = D$, так как D есть сумма минимальных надмодулей B_1: $D = C + A_1$, и $l(D/B_1) = 2$. Но $DR = PR$, так как $D \supset P$ и D/PR — прямая сумма простых модулей. Поэтому $l(D/DR) = 3$ и $l(B'/B'R) = 1{,}5$, что невозможно.

Следовательно, A_i, B_i, C и D остаются Γ-модулями. Но тогда, аналогичным образом, они остаются модулями и над порядком Γ_1, который получается выбрасыванием биективного неразложимого Γ-модуля. Продолжая этот процесс, мы построим строго возрастающую цепочку надколец порядка $\Lambda : \Gamma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots$, таких, что P, A_i и B_i остаются модулями над любым Γ_k, чего быть не может, так как строго возрастающая цепочка надколец должна дойти до максимального порядка, у которого нет двучленных неразложимых модулей.

Таким образом, один из модулей A_1 и A_2 должен быть неразложимым проективным Λ-модулем. Заменяя P на этот модуль P_1, мы вновь получим, что либо P_1 биективен, либо у него есть неразложимый проективный минимальный надмодуль.

Отсюда, аналогично доказательству предложения 3.5, следует, что существует биективный двучленный неразложимый модуль.

Доказательство теоремы 4.9. (1) $\Rightarrow$ (2). Ввиду предложения 2.5, достаточно показать, что у любого кольца веса 2 есть биективный модуль. Пусть A — такой неприводимый Λ-модуль представления, что $\rho_\Lambda(A) = 2$. Рассмотрим структуры рационально эквивалентных неприводимых Λ-модулей представлений. Если все они линейно упорядочены, то $P = P(A)$ есть двучленный неразложимый проективный модуль и для любого двучленного модуля B имеет место неравенство $l(B/BR) \leqslant 2$. Предположим, что P не инъективен. Тогда у него есть по крайней мере два минимальных надмодуля P_1 и B_1. Если $l(P_1/P_1R) \geqslant 2$ и $l(B_1B_1R) \geqslant 2$, то, полагая $B = P_1 + B_1$, получим $l(B/BR) \geqslant 3$, что невозможно. Поэтому, например, $l(P_1/P_1R) = 1$ и потому P_1 — неразложимый проективный модуль. Продолжая аналогичные рассмотрения, мы либо дойдем до биективного модуля, либо построим бесконечную цепочку неразложимых проективных модулей $P=P_0\subset P_1\subset P_2\subset \ldots$, в которой P_{i+1} — минимальный надмодуль P_i, и, следовательно, P_i — единственный максимальный подмодуль P_{i+1}. Отсюда вновь следует, что всякий модуль, рационально эквивалентный P, проективен и неразложим, что невозможно, так как $\tilde{l}(P)=2$.

Если не все структуры рационально эквивалентных неприводимых Λ-модулей линейно упорядочены, то за A можно принять такой неприводимый Λ-модуль представления, что $l(A/AR)=2$. Тогда $P(A)=P_1\oplus P_2$, причем $\widetilde{P}_1\simeq\widetilde{P}_2\simeq\widetilde{A}$. Предположим, что P_1 не инъективен. Тогда либо у него есть два минимальных надмодуля, либо у него один минимальный надмодуль B, причем $B\not\simeq P_1$ и потому $P(B)\neq P_1$. Покажем, что у B один максимальный подмодуль. Пусть это не так и B_1 — максимальный подмодуль B, отличный от P_1, $X=B_1\cap P_1$. Модуль P_1^* имеет один максимальный подмодуль и не проективен. Поэтому $P(P_1^*)$ — двучленный неразложимый модуль, откуда следует, что $\rho_\Lambda(X^*)\geqslant 3$, что невозможно. Следовательно, $P(B)$ — неразложимый модуль. Но существует эпиморфизм $B\oplus P_2\to A$, а значит, и эпиморфизм $P(B)\oplus P_2\to P(A)$, что противоречит однозначности разложения.

Итак, у P_1 есть два минимальных надмодуля, откуда, как и выше, можно заключить, что один из них проективен, и снова либо дойти до биективного модуля, либо доказать, что любой модуль, рационально эквивалентный P_1, проективен. Но $\breve{A}\simeq\breve{P}_1$ и A не проективен. Полученное противоречие завершает доказательство.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $\rho^*(\Lambda)>2$. Тогда, по предложению 4.8 и следствию 4.6, $\rho^*(\Lambda)=3$, т. е. существует неприводимый Λ-модуль представления A такой, что $\rho_\Lambda(A)=3$. Пусть $P=P(A)$. Если P вполне разложим, то $\Gamma=E(P)$ — вполне разложимый квазибассов порядок. Но, по предложению 2.6 (б), проективное накрытие Γ-модуля $\bar{A}=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, A)$ есть Γ, откуда $\rho^*(\Gamma)\geqslant 3$, что противоречит предложению 4.7.

Остается рассмотреть случай, когда $P=P_1\oplus P_2$, P_2 — двучленный неразложимый модуль. Тогда у Λ есть двучленный биективный модуль P_0. Пусть $\Gamma=\Lambda^-(P_0)$. Если $P_0\neq P_2$, то проективное накрытие A как Γ-модуля есть, по-прежнему, $P_1\oplus P_2$, и $\rho_\Gamma(A)=3$. Предположим, что $P_0=P_2$ и других биективных двучленных Λ-модулей нет. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi: P_1\oplus \oplus P_2\to A$; пусть $A_1=\varphi(P_1)$, $A_2=\varphi(P_2)$, $A=A_1+A_2$. Если $\Gamma=\Lambda^-(P_2)$, то A_1 и A_2 есть Γ-модули, причем A_2 — фактормодуль единственного минимального надмодуля P_2' модуля P_2. Если P_2' неразложим, то проективное накрытие A как Γ-модуля есть $P_1\oplus P_2'$ и $\rho_\Gamma(A)=3$. Пусть P_2' разложим. Тогда максимальный подмодуль P_2'' модуля P_2 также разложим, по предложению 2.11, и единственными новыми инъективными Γ-модулями являются прямые слагаемые P_2''. Поэтому у Γ нет биективных неразложимых двучленных модулей и, по предложению 4.10, Γ вполне разложим, а следовательно, у Λ есть всего один неразложимый двучленный модуль P_2. Применим к точной оследовательности $P\xrightarrow{\varphi} A\to 0$ функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, \Lambda)$:

$$0 \to \hat{A} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \hat{P} \to X \to 0,$$

где $X = \operatorname{Coker} \hat{\varphi}$. Если X разложим, то, как и при доказательстве следствия 4.6, мы придем к противоречию с тем, что $P = P(A)$. Поэтому X неразложим. Но $\tilde{l}(X) = 2$, а у Λ есть всего один двучленный неразложимый модуль, который биективен. Следовательно, наша точная последовательность расщепляема. Тогда расщепляема и последовательность

$$0 \to \hat{X} \to P \xrightarrow{\hat{\hat{\varphi}}} \hat{\hat{A}} \to 0,$$

т. е. существует гомоморфизм $\alpha : \hat{\hat{A}} \to P$ такой, что $\hat{\hat{\varphi}}\alpha = 1_{\hat{\hat{A}}}$. Но естественный гомоморфизм $A \to \hat{\hat{A}}$ есть вложение, и, ограничивая α на A, мы получим гомоморфизм, расщепляющий точную последовательность $P \xrightarrow{\varphi} A \to 0$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает импликацию $(2) \Rightarrow (1)$.

Если Λ однородно, то эквивалентность условий (1), (2) и квазибассовости следует из предложений 4.7 и 4.8.

Рассмотрим произвольный порядок Λ. Разложим 1 в сумму минимальных ортогональных идемпотентов: $1 = e_1 + \ldots + e_s$. $e_i\Lambda$ — неразложимый проективный Λ-модуль. Идемпотент e_i назовем n-членным, если модуль $e_i\Lambda$ является n-членным. Это соответствует тому, что в алгебре $\tilde{\Lambda}$ e_i распадается на n минимальных идемпотентов.

Пусть Λ — квазибассов порядок. Тогда всякий минимальный идемпотент либо двучленный, либо одночленный. Обозначим через e сумму всех одночленных и через f — сумму всех двучленных идемпотентов из некоторого разложения единицы. Тогда $e\Lambda e$ и $f\Lambda f$ — однородные квазибассовы порядки, т. е. порядки веса 2. Если обозначить $e\Lambda e = \Lambda_1$, $f\Lambda f = \Lambda_2$, $e\Lambda f = X$, $f\Lambda e = Y$, то Λ можно представить в виде:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & X \\ Y & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

где Λ_1 и Λ_2 — порядки веса 2, X — левый Λ_1- и правый Λ_2-модуль, Y — левый Λ_2- и правый Λ_2-модуль.

Мы докажем теорему, которая в некотором смысле сводит изучение порядков веса 2 к случаю порядков в сравнительно «небольших» алгебрах.

ТЕОРЕМА 4.11. *Пусть $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — разложение единицы порядка Λ в сумму минимальных ортогональных идемпотентов. Порядок Λ имеет вес 2 тогда и только тогда, когда для любого идемпотента e, являющегося суммой не более двух идемпотентов из этого разложения, либо суммой трех одночленных идемпотентов из этого разложения, порядок $e\Lambda e$ имеет вес 2.*

Доказательство. Если $\rho^*(\Lambda) \leqslant 2$, то $\rho^*(e\Lambda e) \leqslant 2$ по предложению 2.6. Наоборот, пусть $\rho^*(e\Lambda e) \leqslant 2$ для любого идемпотента, удовлетворяющего условию теоремы. Тогда все идемпотенты e_i не более, чем двучленные. Предположим, что $\rho^*(\Lambda)>2$, и пусть A — неприводимый Λ-модуль, для которого $\rho_\Lambda(A)>2$, $P=P(A)$. Тогда $\tilde{l}(P)>2$, а P есть прямая сумма модулей рациональной длины, не большей 2. Поэтому в P есть прямое слагаемое P' либо вида $P_1\oplus P_2$, $\tilde{l}(P_2)=2$, либо вида $P_1\oplus P_2\oplus P_3$, $\tilde{l}(P_i)=1$. Если $\varphi: P\to A$ — эпиморфизм и $\varphi(P')=B$, то $P'=P(B)$. Выберем для каждого прямого слагаемого модуля P' такой идемпотент f из нашего разложения, что это слагаемое изоморфно $f\Lambda$, и пусть e — сумма этих идемпотентов. Очевидно, e удовлетворяет условию теоремы. Тогда $e\Lambda\diagdown B$, $e\Lambda e=E(e\Lambda)$ и, по следствию 2.7, $\rho_{e\Lambda e}(Be)\geqslant\rho_\Lambda(B)\geqslant 3$ (так как $Be\simeq\mathrm{Hom}_\Lambda(e\Lambda, B)$). Теорема доказана.

Заметим, что аналогичный результат имеет место и для бассовых порядков. Это, очевидно, следует из теоремы 3.3.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение теоремы 4.11.

Пусть Γ — первичный бассов порядок, N — его радикал. Докажем, что порядок Λ_n следующего вида имеет вес 2:

$$\Lambda_n=\begin{pmatrix}\Gamma & N\dots N & N\\ \Gamma & \Gamma\dots N & N\\ \dots & \dots\dots & \dots\\ \Gamma & \Gamma\dots\Gamma & N\\ \Gamma & \Gamma\dots\Gamma & \Gamma\end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 4.11, достаточно проверить, что вес 2 имеет порядок Λ_3:

$$\Lambda_3=\begin{pmatrix}\Gamma & N & N\\ \Gamma & \Gamma & N\\ \Gamma & \Gamma & \Gamma\end{pmatrix}.$$

Очевидно, модуль (Γ, Γ, Γ) биективен. Выбрасывая его, получим надкольцо вида:

$$\begin{pmatrix}\Gamma & N & N\\ \Gamma & \Gamma & N\\ \Gamma_1 & \Gamma & \Gamma\end{pmatrix},$$

где Γ_1 — минимальное надкольцо Γ. Учитывая, что $N\simeq\Gamma_1$ [см. ([5])], легко видеть, что у этого кольца биективен модуль (Γ, Γ, N), выбрасывая который, получим надкольцо

$$\begin{pmatrix}\Gamma & N & N\\ \Gamma_1 & \Gamma & N\\ \Gamma_1 & \Gamma & \Gamma\end{pmatrix}.$$

У этого кольца биективен модуль (Γ, N, N). Продолжая выбрасывать биективные модули, мы получим надкольцо Λ_3' вида:

$$\Lambda_3'=\begin{pmatrix}\Gamma_1 & N_1 & N_1\\ \Gamma_1 & \Gamma_1 & N_1\\ \Gamma_1 & \Gamma_1 & \Gamma_1\end{pmatrix}.$$

В конце концов мы дойдем до порядка Ω вида

$$\Omega=\begin{pmatrix}\Delta & \Pi & \Pi\\ \Delta & \Delta & \Pi\\ \Delta & \Delta & \Delta\end{pmatrix},$$

где Π — радикал Δ, а Δ — либо максимальный порядок, либо разложимый наследственный порядок. В обоих случаях порядок Ω наследственен, а потому Λ_3 — веса 2. Интересно отметить, что если Γ — максимальный порядок в теле D, то Λ_n есть минимальный наследственный порядок в $M_n(D)$ ([5]).

Порядок Λ_n содержится в бассовом порядке $M_n(\Gamma)$ ([5]), причем $M_n(\Gamma)R\subset\Lambda_n$ (R — радикал Λ_n). Весьма правдоподобным кажется следующее предположение: у любого квазибассового порядка Λ есть бассово надкольцо Λ' такое, что $\Lambda' R^k\subset\Lambda$, где k — некоторая постоянная, не зависящая от Λ. Известные авторам примеры подтверждают это предположение. Более того, по-видимому, этот факт имеет место и если заменить условие квазибассовости на условие конечности числа неразложимых модулей представлений.

Замечание. Аналогично предложению 4.6, можно показать, что если Λ — однородный порядок с рациональной длиной неразложимых проективных модулей не больше 2, то для того, чтобы всякий неразложимый Λ-модуль был изоморфен подмодулю неразложимого проективного модуля, необходимо и достаточно, чтобы Λ был квазибассов. В общем случае это условие, очевидно, является достаточным, однако не необходимым, как показывает следующий пример: Λ — порядок в $M_3(k)$ вида

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{m}^2 & \mathfrak{m} & \mathfrak{m}\\ \mathfrak{m}^2 & \mathfrak{o} & \mathfrak{m}\end{pmatrix}+\mathfrak{v}\cdot 1.$$

Порядок Λ, как нетрудно проверить, не является квазибассовым, однако для любого его неразложимого модуля представления A $\tilde{l}(A)\leqslant 2$ и потому A вкладывается в неразложимый проективный Λ-модуль [см. ([16])].

Существенным является и ограничение на длину проективных модулей: если Λ — триада локальных колец [см. ([2])], то всякий неразложимый Λ-модуль есть идеал, однако Λ не бассов, а потому и не квазибассов порядок.

§ 5. Теорема редукции для квазибассовых порядков

В настоящем параграфе мы докажем теорему, являющуюся обращением предложения 4.3 и сводящую изучение квазибассовых порядков к случаю порядков в «небольших» алгебрах.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть Λ — порядок над полным локальным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$, $1=e_1+\ldots+e_s$ — разложение единицы Λ в прямую сумму минимальных ортогональных идемпотентов. Если для любого* *идемпотента e, являющегося суммой не более трех идемпотентов из этого разложения, порядок $e\Lambda e$ квазибассов, то и Λ квазибассов.*

Доказательство этой теоремы распадается на ряд вспомогательных утверждений, некоторые из которых представляют и самостоятельный интерес. Для краткости речи порядки, удовлетворяющие условию теоремы 5.1, мы будем называть кусочно-квазибассовыми (конечно, только до окончания доказательства). Поскольку все порядки $e_i\Lambda e_i$ бассовы, то все неразложимые проективные Λ-модули — либо неприводимые, либо двучленные. Если порядок Λ однороден, то из кусочной квазибассовости следует квазибассовость по теореме 4.11. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что у Λ есть как одночленные, так и двучленные неразложимые проективные модули.

Предложение 5.2. *Если Λ — кусочно-квазибассов порядок, то $\rho^*(\Lambda)\leqslant 3$ и для любого неприводимого Λ-модуля представления A имеет место неравенство $l(A/AR)\leqslant 2$, где R — радикал кольца Λ.*

Доказательство. Пусть A — неприводимый Λ-модуль представления. Покажем, что в $P(A)$ входит не более двух прямых слагаемых. Если это не так, то в $P(A)$ есть прямое слагаемое $P\simeq P_1\oplus P_2\oplus P_3$, где P_i — неразложимые модули. Рассмотрим эпиморфизм $\varphi: P(A)\to A$ и положим $B=\varphi(P)$. Тогда $P(B)=P$, и если $\Gamma=E(P)$, $\overline{B}=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, B)$, то Γ — квазибассов порядок, $\overline{B}$ есть Γ-модуль представления и, по предложению 2.6, $P(\overline{B})=\Gamma$, что невозможно ввиду следствия 4.6 и предложения 4.7.

Таким образом, либо $P(A)$ неразложим, и тогда $\rho_\Lambda(A)\leqslant 2$, либо $P(A)=P_1\oplus P_2$, где P_i — неразложимые модули, причем, как и выше, можно показать, что $\tilde{l}(P_1)=\tilde{l}(P_2)=2$ невозможно, откуда следует, что $\rho_\Lambda(A)\leqslant 3$. Предложение доказано.

Предложение 5.3. *Если у кусочно-квазибассового порядка Λ есть проективный неприводимый модуль P, кольцо эндоморфизмов которого немаксимально, то у Λ есть биективный неприводимый модуль.*

Доказательство. Пусть X — минимальный надмодуль модуля P, $U=X/P$, $P_1=P(U)$. Если X — единственный минимальный надмодуль P, а P_1 — неприводимый модуль, то P биективен по предложению 2.12. Предположим, что X — единственный минимальный надмодуль P, а P_1 — двучленный модуль. Если $XR=P$, то есть эпиморфизм $P_1R\to P$, откуда $P_1R\simeq P\oplus A$. Но $E(P_1R)\supset E(P_1)$ и, поскольку $E(P_1)$ — первичный бассов порядок, а $E(P_1R)$ — разложимый порядок, то $E(P_1R)$ наследственен; значит, $E(P)$ максимален, что противоречит предположению. Если же $XR\neq P$, то $\rho_\Lambda(X)=3=\rho^*(\Lambda)$. Пусть Γ — максимальное надкольцо порядка $E(P)$. Тогда $\Gamma P\supset X$, откуда $\Gamma P=\Gamma X$. Следовательно, $X\diagdown\Gamma P$ и, по предложению 2.1, $\rho_\Lambda(\Gamma P)=3$. Но $P\diagdown\Gamma P$, поэтому $P(\Gamma P)=P^3$, что невозможно по предложению 5.2.

Предположим теперь, что у P есть два минимальных надмодуля: X и Y. Если и у X, и у Y есть максимальные подмодули, отличные от P, то $l(B/BR)=3$, где $B=X+Y$. Поэтому можно считать, что P — единственный максимальный подмодуль в X. Тогда, как и выше, если P_1 — одночленный, то X проективен, а если P_1 двучленный, то $P_1R \simeq P \oplus A$ и $E(P)$ максимально.

Таким образом, мы показали, что либо модуль P биективен, либо у него есть проективный минимальный надмодуль X, причем $P=XR$ и потому $E(X) \subset E(P)$, т. е. и $E(X)$ немаксимально. Тогда стандартные рассуждения, которые уже неоднократно проводились, показывают, что у Λ есть биективный неприводимый модуль.

Очевидно, всякое надкольцо Γ кусочно-квазибассового порядка Λ также кусочно-квазибассово, а если Γ получается из Λ выбрасыванием биективных модулей и Γ квазибассово, то и Λ квазибассово. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться только рассмотрением порядков, не имеющих биективных модулей. У таких порядков кольца эндоморфизмов проективных неприводимых модулей максимальны.

Для дальнейшего нам понадобится явное описание всех квазибассовых порядков Γ таких, что $\Gamma_1 = P_1 \oplus P_2$, P_1 — неприводимый модуль, P_2 — неразложимый двучленный модуль, $E(P_1)$ максимально. Алгебра $\tilde{\Gamma}$ есть тогда либо $M_3(D)$, либо $M_2(D) \oplus D'$, где D и D' — конечномерные сепарабельные тела над k. Порядок Γ можно тогда представить в виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & X \\ Y & \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

где $\Gamma_1 = \mathfrak{D}$ — максимальный порядок в теле D (единственный; см. ([13])), Γ_2 — первичный бассов порядок либо в $M_2(D)$, либо в $D \oplus D'$; X есть левый Γ_1- и правый Γ_2-модуль, Y есть правый Γ_1- и левый Γ_2-модуль. Очевидно, X и Y — неприводимые Γ_2-модули представлений. Если $\tilde{\Gamma}_2 = M_2(D)$, то, как следует из ([5]) и ([15]), Γ_2 имеет либо один, либо два неприводимых модуля представлений.

Случай 1. $\tilde{\Gamma}_2 = M_2(D)$ и Γ_2 имеет один неприводимый модуль представления. Тогда Γ_2 изоморфно порядку с $\mathfrak{D}$-базисом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pi^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^r & \varepsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где π — простой элемент $\mathfrak{D}$, $k \geqslant 1$, $r \geqslant 0$, ε — не квадрат в $\mathfrak{D}/\pi\mathfrak{D}$. Неприводимый правый Γ_2-модуль имеет вид

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}),$$

а неприводимый левый Γ_2-модуль имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} \end{pmatrix}.$$

Поэтому можно считать, что Γ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ \hline \pi^n\mathfrak{D} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2}} \\ \pi^n\mathfrak{D} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2 — порядок с базисом (1), $n \geqslant k$.

Если $n>1$, то у Γ есть надкольцо Γ' вида

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi^2\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2'}} \\ \pi^2\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2' — порядок с базисом вида (1) при $k=1$. У порядка Γ' есть модуль A вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} \pi\mathfrak{O} & \\ \pi^2\mathfrak{O} & \Gamma_2' \end{array}\right),$$

кольцо множителей которого есть Γ'. Поскольку A не проективен над Γ', кольцо Γ не квазибассово.

Предложение 5.4. *Если $\widetilde{\Gamma}_2 = M_2(D)$ и Γ_2 имеет один неприводимый модуль представления, то Γ изоморфно порядку вида*

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2}} \\ \pi\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2 — порядок с базисом (1) *при $k=1$. В этом случае Γ — порядок веса* 2, *имеющий всего один двучленный неразложимый модуль.*

Доказательство. То, что Γ может иметь только указанный вид, мы уже проверили. Но у порядка указанного вида, как легко проверить, структура неприводимых модулей линейно упорядочена. Поэтому это есть порядок веса 2, и у него есть двучленный биективный модуль B. Но $\Gamma^-(B)$ разложимо, поэтому других двучленных модулей нет.

Случай 2. $\widetilde{\Gamma}_2 = M_2(D)$ и Γ_2 имеет два неприводимых модуля представления. Тогда Γ_2 изоморфно порядку с $\mathfrak{O}$-базисом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pi^{k+\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^r & \varepsilon\pi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $k \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $\delta = 0$ или 1. Неприводимые правые Γ_2-модули имеют вид

$$(\mathfrak{O}, \mathfrak{O}) \text{ и } (\mathfrak{O}, \pi\mathfrak{O}),$$

а неприводимые левые Γ_2-модули имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \pi\mathfrak{O} \\ \mathfrak{O} \end{pmatrix}.$$

Поэтому Γ можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi^{n+\gamma}\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2}} \\ \pi^n\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2 — порядок с базисом (2), $n \geqslant k$, $\gamma = 0$ или 1.

При $n>1$ мы снова можем найти надкольцо Γ' вида

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi^2\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2'}} \\ \pi^2\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2' — порядок с базисом вида (2) при $k=1$, $\delta=0$. У порядка Γ' снова есть модуль A вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \pi\mathfrak{O} & \multirow{2}{*}{Γ_2'} \\ \pi^2\mathfrak{O} & \end{array}\right)$$

и $\Lambda(A)=\Gamma'$, т. е. A не проективен над своим кольцом множителей и Γ не квазибассов.

Остается рассмотреть случай $n=k=1$. В этом случае нетрудно убедиться, что при $\delta=1$ (тогда и $\gamma=1$) модуль B вида

$$\left(\begin{array}{c|c} \pi^2\mathfrak{O} & \multirow{2}{*}{Γ_2} \\ \pi\mathfrak{O} & \end{array}\right)$$

биективен, а $\Gamma^-(B)=\Delta$, причем Δ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi^2\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2'}} \\ \pi\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2', как и выше,— порядок с базисом (2) с $k=1$, $\delta=0$. Порядок Δ мы уже рассматривали в качестве примера в § 4. Этот порядок квазибассов и имеет два неразложимых двучленных модуля. В случае же $\delta=\gamma=0$ мы вновь получаем порядок веса 2, также рассмотренный в предыдущем параграфе.

Предложение 5.5. *Если $\tilde{\Gamma}_2=M_2(D)$ и Γ_2 имеет два неприводимых модуля представления, то Γ изоморфно порядку вида*

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\ \hline \pi^{1+\gamma}\mathfrak{O} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Γ_2}} \\ \pi\mathfrak{O} & & \end{array}\right),$$

где Γ_2 — порядок с базисом вида (2) при $k=1$, $0\leqslant\gamma\leqslant\delta\leqslant 1$. В этом случае либо у Γ есть биективный двучленный модуль, либо у Γ ровно два неразложимых двучленных модуля.

Случай 3. $\tilde{\Gamma}_2=D\oplus D'$. Обозначим через $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{O}'$ максимальные порядки в D и D'; π и π_1 — простые элементы $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{O}'$. Из того, что Γ_2 — первичный бассов порядок в $\tilde{\Gamma}_2$, следует, что для некоторого k кольца вычетов $\mathfrak{O}/\pi^k\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{O}'/\pi_1^k\,\mathfrak{O}'$ изоморфны, и если обозначить через φ и φ' естественные эпиморфизмы $\mathfrak{O}$ и $\mathfrak{O}'$ на это общее кольцо вычетов, то Γ_2 есть подкольцо в $\mathfrak{O}\oplus\mathfrak{O}'$, состоящее из таких пар (ω, ω'), что $\varphi(\omega)=\varphi'(\omega')$. Кроме того, можно считать, что $X=\mathfrak{O}$, $Y=\pi^n\mathfrak{O}$, причем $n\geqslant k$.

Покажем, что при $k=2$, $n=3$ порядок Γ не квазибассов. Пусть P_2 — двучленный неразложимый проективный Γ-модуль, $A=P_2R$. Тогда у A есть, кроме P_2, еще два минимальных надмодуля A_1 и A_2, причем $A_2/A\simeq$

$\simeq P_2/A$, $A_1/A \not\simeq P_2/A$ и A_1R — максимальный подмодуль в A. Обозначим через $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{x}$, соответственно, образующие фактор модулей P_2/A, A_2/A и A_1/A, а через x, y и z — их прообразы в P_2, A_2 и A_1. Рассмотрим надмодуль B модуля $A\oplus A$, порожденный $A\oplus A$ и парами $(x, 0)$, $(0, y)$ и (z, z). В B есть максимальный подмодуль, изоморфный $P_2\oplus A_1$, причем B порождается этим подмодулем и элементом $(0, y)$. Отсюда следует, что $BR=A\oplus A$ и, следовательно, $E(B)\subset E(A\oplus A)=M_2(\Delta)$, где $\Delta=E(A)$. Покажем, что в $E(B)$ нет нетривиальных идемпотентов, откуда будет следовать, что модуль B неразложим и потому порядок Γ не квазибассов.

Пусть $\psi\in E(B)$, $\psi^2=\psi$. Представим ψ в виде:

$$\psi=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

где α, β, γ, $\delta\in\Delta$. Из того, что $\psi(0, y)=(\beta y, \delta y)\in B$, следует, что $\beta y\equiv\equiv x\lambda_1+z\lambda_3(\operatorname{mod} A)$ и $\delta y\equiv y\lambda_2+z\lambda_3(\operatorname{mod} A)$, $\lambda_i\in\Gamma$. Но легко проверить, что $\Delta A_2=A_2$, поэтому $\beta y\in(P_2+A_1)\cap A_2=A$, откуда $\beta\in N$, где N — радикал кольца Δ. Аналогичным образом, из того, что $\psi(x, 0)\in B$, следует, что $\gamma\in N$.

Наконец, $\psi(z, z)=((\alpha+\beta)z, (\gamma+\delta)z)\in B$, откуда вытекает, что

$$(\alpha+\beta)z\equiv x\lambda_1+z\lambda_3(\operatorname{mod} A),$$
$$(\gamma+\delta)z\equiv y\lambda_2+z\lambda_3(\operatorname{mod} A).$$

Но $\Delta A_1\subset A_1$, поэтому $x\lambda_1$ и $y\lambda_2$ принадлежат, соответственно, $P_2\cap A_1=A$ и $A_2\cap A_1=A$. Кроме того, βz и γz лежат в A, так как β, $\gamma\in N$. Следовательно, $\alpha z\equiv\delta z(\operatorname{mod} A)$ и, значит, α и δ либо оба лежат в N, либо не лежат. В первом случае $\psi\in M_2(N)$ и, если $\psi\neq 0$, не может быть идемпотентом. Во втором случае ψ обратим и, если он идемпотент, то $\psi=1$. Итак, в $E(B)$ нет нетривиальных идемпотентов и потому Γ не квазибассов.

П р е д л о ж е н и е 5.6. *Если $\tilde{\Gamma}_2=D\oplus D'$, то Γ изоморфно порядку вида*

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{D} & \mathfrak{D}\\ \pi^n\mathfrak{D} & \Gamma_2\end{pmatrix},$$

где Γ_2—подкольцо в $\mathfrak{D}\oplus\mathfrak{D}'$, состоящее из пар (ω, ω') таких, что $\varphi(\omega)=\varphi'(\omega')$, где φ и φ' — проекции Γ и Γ' на изоморфное кольцо вычетов $\mathfrak{D}/\pi^k\mathfrak{D}\simeq\mathfrak{D}'/\pi_1^k\,\mathfrak{D}'$. При этом возможны следующие случаи:

1) $n=k=2$;

2) $k=1$, $n\geqslant 1$.

В первом случае у Γ есть биективный двучленный модуль. Во втором случае, при $n=1$, Γ есть кольцо веса 2, а при $n>1$ у неразложимого двучленного проективного модуля есть всего один минимальный неразложимый надмодуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что других случаев быть не может, мы уже проверили. Остальное проверяется простым вычислением.

Вернемся снова к изучению кусочно-квазибассовых порядков.

Предложение 5.7. *Пусть Λ — кусочно-квазибассов порядок. Если радикал R порядка Λ не вполне разложим, то у Λ есть биективный двучленный неразложимый модуль.*

Доказательство. Пусть P — проективный двучленный неразложимый Λ-модуль такой, что PR неразложим. Если P не биективен, то у него есть по крайней мере два минимальных надмодуля, A_1 и A_2. Покажем, что один из них неразложим и проективен, откуда с помощью стандартного рассуждения будет следовать существование биективного двучленного модуля.

Если ни A_1, ни A_2 не является неразложимым проективным модулем, то у них есть максимальные подмодули B_1 и B_2, отличные от P. Тогда $A_1R=A_2R=PR$ и потому A_1 и A_2 — неразложимые модули. Если B_1/PR, P/PR и B_2/PR попарно неизоморфны, то, обозначая их образующие через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, а прообразы в B_1, P и B_2 — через a, b, c, мы можем построить четырехчленный модуль B:

$$B=PR\oplus PR+(a, 0)\Lambda+(b, 0)\Lambda+(c, c)\Lambda.$$

Как и выше, легко проверить, что модуль B неразложим, $BR=PR\oplus PR$, откуда $l(B/BR)=3$. Поэтому у кольца $E(P(B))$ есть четырехчленный неразложимый модуль (предложение 1.8). Но $E(P(B))$, очевидно, имеет вид $e\Lambda e$, где e удовлетворяет условию теоремы 5.1, а значит, $e\Lambda e$ квазибассово, что невозможно.

Итак, среди фактормодулей B_1/PR, P/PR и B_2/PR есть два изоморфных. Пусть $P/PR\simeq B_2/PR$. Обозначим $P_1=P(B_1/PR)$ и покажем, что P_1 — неприводимый модуль. Действительно, если $A=A_1+A_2$, то $P(A)=$ $=P^2\oplus P_1$. Но A есть расширение неприводимого модуля с неприводимым ядром, а в проективное накрытие неприводимого модуля входит не более одного двучленного неразложимого слагаемого. Поэтому в $P(A)$ может входить не более двух двучленных слагаемых и, значит, P_1 — неприводимый модуль.

Поскольку $P(A_1)=P\oplus P_1$, $P(A_2)=P^2$, то, применяя функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(P\oplus P_1, \cdot)$, мы получим у двучленного неразложимого проективного модуля $\mathrm{Hom}_\Lambda(P\oplus P_1, P)$ над кольцом $\Gamma=E(P\oplus P_1)$ два неразложимых минимальных надмодуля. Но Γ — квазибассов порядок и потому из предложений 5.3—5.6 следует, что такого быть не может. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Заметим, что из предложения 5.4 аналогичным образом следует

Предложение 5.8. *Если Λ — кусочно-квазибассов порядок, P — неразложимый двучленный проективный Λ-модуль и порядок $E(P)$ имеет один неприводимый модуль представления, то у Λ есть биективный двучленный неразложимый модуль.*

Для дальнейшего доказательства теоремы 5.1 нами понадобится техника «матричных задач», применявшаяся в работах ([17]), ([13]) и часто удобная для описания модулей. Эта техника состоит в следующем. Пусть I — двусторонний идеал кольца Λ. Тогда для любого Λ-модуля A можно рассмотреть точную последовательность

$$0 \to AI \to A \to A/AI \to 0.$$

В ней A/AI есть Λ/I-модуль, а AI — модуль над кольцом множителей $\Lambda(I)$ идеала I, рассмотренного как правый Λ-модуль. Этой точной последовательности соответствует некоторый элемент группы $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/AI, AI)$. Предположим, что мы знаем все модули над кольцами Λ/I и $\Lambda(I)$. Тогда можно разложить A/AI и AI в прямую сумму неразложимых модулей:

$$A/AI = B_1^{s_1} \oplus \ldots \oplus B_n^{s_n},$$

$$AI = C_1^{t_1} \oplus \ldots \oplus C_m^{t_m},$$

$$\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(A/AI, AI) = \bigoplus_{i,j} \bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(B_j^{s_j}, C_i^{t_i}).$$

Элементы $\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(B_j^{s_j}, C_i^{t_i})$ естественно рассматривать как матрицы размера $t_i \times s_j$ с коэффициентами из $E_{ij} = \bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(B_j, C_i)$. Тогда элементы $\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(A/AI, AI)$ можно рассматривать как блочную матрицу X вида:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} \ldots X_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_{m1} \ldots X_{mn} \end{pmatrix},$$

где X_{ij} — матрица с коэффициентами из E_{ij}.

Обозначим $H_{ik} = \mathrm{Hom}_\Lambda(C_i, C_k)$, $H^{jl} = \mathrm{Hom}_\Lambda(B_l, B_j)$. Гомоморфизмы из $H_{ik}(H^{jl})$ индуцируют отображения $E_{ij} \to E_{kj}$ (соответственно, $E_{ij} \to E_{il}$).

Матрицу $(X_{i1} \ldots X_{in})$ назовем i-й горизонтальной полосой, а матрицу

$$\begin{pmatrix} X_{1j} \\ \vdots \\ X_{mj} \end{pmatrix}$$

— j-й вертикальной полосой матрицы X. Матрицы X_{ij} назовем клетками матрицы X. Следующие преобразования матрицы X назовем элементарными:

1) умножение некоторой строки i-полосы (столбца j-й полосы) на обратимый элемент из $H_{ii}(H^{jj})$;

2) прибавление к строке k-й полосы (столбцу l-полосы) строки i-й полосы (столбца j-полосы), умноженной на элемент из H_{ik} (H^{jl}).

Во втором случае допускается $i=k$ $(j=l)$, но взятые строки (столбцы) должны быть различными.

Нетрудно видеть, что Λ-модули A и A' изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им матрицы можно перевести друг в друга элементарными преобразованиями. В частности, модуль A разложим тогда и только тогда, когда матрица X разложима с помощью элементарных преобразований (в очевидном смысле).

Доказательство теоремы 5.1. Пусть Λ — кусочно-квазибассово кольцо, у которого нет биективных модулей. Тогда из предложений 5.3, 5.7 и 5.8 следует:

1) кольцо эндоморфизмов каждого неприводимого проективного Λ-модуля максимально;

2) радикал Λ вполне разложим;

3) кольцо эндоморфизмов каждого двучленного неразложимого проективного Λ-модуля имеет два неприводимых модуля представления.

Кроме того, ввиду теоремы 1.3, можно считать, что Λ разлагается в прямую сумму попарно неизоморфных модулей. Тогда Λ/R, где R — радикал Λ, есть прямая сумма тел и из условий 1)—3) следует, что все эти тела изоморфны между собой. Обозначим это общее тело через K.

Применим к Λ изложенный выше способ постановки матричной задачи, причем в качестве I выберем радикал Λ. Тогда $\Lambda(R)$ — вполне разложимый порядок, причем кольца эндоморфизмов его неприводимых проективных модулей максимальны. Кроме того, $\Lambda(R)$ — кусочно-квазибассов порядок, и, по теореме 4.11, он квазибассов. Поэтому кольца эндоморфизмов всех неприводимых Λ-модулей максимальны. В этом случае модули C_i — неприводимые $\Lambda(R)$-модули, B_j — простые Λ/R-модули, а E_{ij} либо равно нулю, если у C_i нет минимального надмодуля C_i' такого, что $C_i'/C_i \simeq B_j$, либо изоморфно K, если такой надмодуль есть (в этом случае он единственный).

Будем считать, что $P(B_1)$, ..., $P(B_r)$ — двучленные модули, $P(B_{r+1})$, ..., $P(B_n)$ — неприводимые. Тогда матрица X разбивается на две части:

$$X = (X'X''),$$

где в X' входит r вертикальных полос, в X'' — $n—r$.

Из предложения 5.2 следует, что в каждой горизонтальной полосе матрицы X стоит не более двух ненулевых клеток, причем если есть две ненулевые клетки, то одна из них расположена в матрице X''.

Пусть в некоторой вертикальной полосе матрицы X' есть три ненулевые клетки, для определенности, X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}. Покажем, что тогда найдется пара индексов $i \neq l$ $(i, l=1, 2, 3)$, для которых $H_{il}E_{ij}=E_{lj}$. Если это не так, то для любой пары индексов $i \neq l$ $(i, l=1, 2, 3)$ $H_{il}E_{ij}=0$. Но тогда у Λ есть неразложимый трехчленный модуль A, соответствующий матрице

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

где a_i — ненулевой элемент из E_{ij}, причем $A/AR \simeq B_j$, а значит, A — проективный модуль, что невозможно.

Возьмем теперь в качестве I двусторонний идеал $T = \operatorname{Ann}(B_1 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus B_r)$. Тогда $\Lambda/T \simeq B_1 \oplus \ldots \oplus B_r$, а $\Lambda(T)$ вновь есть вполне разложимый квазибассов порядок, у которого кольца эндоморфизмов неприводимых модулей максимальны. Матрицу, соответствующую такой постановке матричной задачи, мы будем обозначать через Y.

Из предложения 5.2 теперь следует, что в каждой горизонтальной полосе матрицы Y есть не более одной ненулевой клетки. Покажем, что вертикальные полосы матрицы Y обладают тем же свойством, что и вертикальные полосы матрицы X'.

Пусть Y_{1j}, Y_{2j}, Y_{3j} — ненулевые клетки, C_1, C_2, C_3 — соответствующие $\Lambda(T)$-модули. Тогда у C_i есть надмодуль C_i' такой, что $C_i'/C_i \simeq B_j$. Положим $A_i = C_i'R$. Тогда у A_i есть минимальный надмодуль A_i' такой, что $A_i'/A_i \simeq B_j$. Поэтому, как показано выше, найдется пара индексов $i \neq l (i, l = 1, 2, 3)$ таких, что существует гомоморфизм $\varphi: A_i \to A_l$, причем $\varphi(E_{ij}) \neq 0$, т. е. $\tilde{\varphi}(A_i') + A_l = A_l'$, где $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ на рациональные оболочки. Но тогда, очевидно, $\tilde{\varphi}(C_i) \subset C_l$ и $\tilde{\varphi}(C_i') + C_l = C_l'$, т. е. $\tilde{\varphi}$ индуцирует гомоморфизм $C_i \to C_l$, ненулевым образом действующий на E_{ij}.

Итак, в каждой вертикальной полосе матрицы Y есть не более двух ненулевых клеток, «несвязанных» между собой гомоморфизмами из H_{ij}, а в каждой горизонтальной полосе вообще есть не более одной ненулевой клетки. Тогда, очевидно, неразложимая матрица Y может иметь всего одну вертикальную полосу, и, приводя Y элементарными преобразованиями, легко убедиться, что все неразложимые матрицы имеют размерность 1×1 или 2×1. Поэтому все неразложимые Λ-модули представлений A, для которых $AT \neq A$,— либо неприводимые, либо двучленные. Если же $AT = A$, то A есть $\Lambda(T)$-модуль, т. е. A вполне разложим.

Таким образом, мы доказали, что все неразложимые модули представлений порядка Λ — либо неприводимые, либо двучленные. В проективное накрытие неприводимого модуля входит не более двух прямых слагаемых. Покажем, что в проективное накрытие двучленного неразложимого модуля входит не более трех прямых слагаемых. Пусть A — неразложимый двучленный модуль. Тогда модуль AR разложим. Обозначим через A' сумму минимальных надмодулей модуля AR. Тогда A' разложим, $AR = A'R$, откуда $l(A'/AR) \leqslant 4$. Но $A' \supset A$ и $A' \neq A$, значит, $l(A/AR) \leqslant 3$.

Пусть теперь A — произвольный неразложимый Λ-модуль, $P = P(A)$. Поскольку в P входит не более трех прямых слагаемых, то из кусочной квазибассовости Λ следует, что $E(P)$ квазибассово. Модуль $B = \mathrm{Hom}_\Lambda(P, A)$ есть неразложимый $E(P)$-модуль и $E(B) \simeq E(A)$, по предложению 1.8. Поэтому $E(A)$ — бассов порядок и, по теореме 4.4, Λ — квазибассов порядок. Теорема 5.1 доказана.

§ 6. Глобальный случай

В этом параграфе мы будем рассматривать порядки над произвольным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$. Для произвольного простого идеала $\mathfrak{p}$ обозначим через $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}$, через $k_\mathfrak{p}$ — поле частных $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. Если A есть $\mathfrak{o}$-решетка, то A вкладывается в $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-решетку $A_\mathfrak{p} = A \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$. При этом если Λ есть $\mathfrak{o}$-кольцо, то $\Lambda_\mathfrak{p}$ есть $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-кольцо, а если A — модуль представления $\mathfrak{o}$-кольца Λ, то $A_\mathfrak{p}$ — модуль представления $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-кольца $\Lambda_\mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ —

полное локальное дедекиндово кольцо, то для $\mathfrak{o}_{\mathfrak{x}}$-колец имеют место все результаты, доказанные в §§ 2—5.

Следующие результаты, доказанные в (9) и (19), показывают, как из «локальных» порядков и представлений конструируются «глобальные».

Предложение 6.1. *Пусть A есть $\mathfrak{o}$-решетка и для каждого $\mathfrak{p}$ в $\widetilde{A}_{\mathfrak{p}}$ задана подрешетка $B(\mathfrak{p})$ такая, что $\widetilde{B(\mathfrak{p})}=\widetilde{A}_{\mathfrak{p}}$, причем $B(\mathfrak{p})=A_{\mathfrak{p}}$ для почти всех $\mathfrak{p}$, т. е. для всех $\mathfrak{p}$, кроме конечного числа. Тогда в $\widetilde{A}$ есть $\mathfrak{o}$-подрешетка B такая, что $B_{\mathfrak{p}}=B(\mathfrak{p})$ для всех $\mathfrak{p}$. Кроме того, если A есть $\mathfrak{o}$-кольцо или модуль представления некоторого $\mathfrak{o}$-кольца Λ, а $B(\mathfrak{p})$, соответственно, — подкольцо или $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-подмодуль в $\widetilde{A}_{\mathfrak{x}}$, то и B является, соответственно, $\mathfrak{o}$-кольцом или Λ-модулем представления.*

Предложение 6.2. *Λ-модуль представления A разложим тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}=\widetilde{B}\oplus\widetilde{C}$ и для каждого $\mathfrak{p}$ $A_{\mathfrak{p}}=B(\mathfrak{p})\oplus C(\mathfrak{p})$, причем $\widetilde{B(\mathfrak{p})}=\widetilde{B}_{\mathfrak{p}}$ и $\widetilde{C(\mathfrak{p})}=\widetilde{C}_{\mathfrak{x}}$.*

Некоторое свойство кольца Λ (модуля A) назовем локальным, если оно имеет место тогда и только тогда, когда им обладают все локализации кольца Λ (модуля A). Примерами локальных свойств являются максимальность порядка, проективность и обратимость модуля [см. (9)]. Горенштейновость и бассовость порядка — также локальные свойства (F). Из (9) следует также, что $E(A_{\mathfrak{p}})=E(A)_{\mathfrak{p}}$ и $\Lambda(A_{\mathfrak{p}})=\Lambda(A)_{\mathfrak{p}}$.

Однако неразложимость модуля, очевидно, не является локальным свойством. В связи с этим локального характера не имеют и почти все свойства и утверждения, связанные с неразложимостью. В частности, свойство обратимости всякого неразложимого модуля представления — не локальное, как показывает следующий пример.

Пусть D — девятимерное тело над полем рациональных чисел, p — простое число, которое не делит дискриминанта D. Тогда $D_p\simeq M_3(Q_p)$ (20) и в D_p есть порядок Λ вида

$$\Lambda=\begin{pmatrix} Z_p & Z_p & Z_p \\ pZ_p & pZ_p & pZ_p \\ pZ_p & Z_p & pZ_p \end{pmatrix}+Z_p\cdot 1.$$

$\Lambda=P_1\oplus P_2$, где $\widetilde{l}(P_2)=2$ и $\Lambda(P_2)=\Lambda$. Пусть A — неприводимый фактормодуль модуля P_2. Тогда $\Lambda(A\oplus P_2)=\Lambda$ и A — непроективный Λ-модуль. По предложению 6.1, в теле D есть Z-порядок Γ такой, что $\Gamma_p=\Lambda$ и Γ_q — максимальный порядок в D_q при $q\neq p$. Все локализации порядка Γ квазибассовы. Однако у Γ есть модуль представления B такой, что $B_p=A\oplus P_2$ и $B_q=\Gamma_q$ при $q\neq p$. Модуль B неразложим (даже неприводим) и $\Lambda(B)=\Gamma$, но B_p — непроективный Γ_p-модуль и, следовательно, B — непроективный Γ-модуль, т. е. B не обратим.

Этот пример интересен также тем, что у порядка Γ, все локализации которого квазибассовы, есть неразложимый модуль, не изоморфный идеалу: модуль C такой, что $C_p=P_2^3$ и $C_q=\Gamma_q^2$ при $q\neq p$. Заметим, что модуль C даже проективен.

Приведем еще один пример, показывающий, что даже над бассовым кольцом могут быть неразложимые необратимые модули. Пусть $K = Q(i)$ — поле гауссовых чисел. Рассмотрим в K_3 немаксимальный бассов порядок $\Delta = 3Z_3[i] + Z_3$, а в $M_2(K_7)$ порядок Γ вида

$$\begin{pmatrix} 7\mathfrak{o} & 7\mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & 7\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o} \cdot 1,$$

где $\mathfrak{o}$ — максимальный порядок в $K_7 : \mathfrak{o} = Z_7[i]$. В алгебре $M_2(K)$ есть порядок Λ такой, что $\Lambda_3 = M_2(\Delta)$, $\Lambda_7 = \Gamma$ и Λ_p — максимальный порядок при $p \neq 3,7$. Порядок Λ бассов, однако у него есть модуль A такой, что A_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Delta & \Delta' \\ \Delta & \Delta' \end{pmatrix},$$

где $\Delta' = Z_3[i]$, и $A_p = \Lambda_p$ при $p \neq 3$. $\Lambda(A) = \Lambda$, но A_3 — непроективный Λ_3-модуль, а значит, A необратим.

Эти примеры показывают, что перенесение определения квазибассовых порядков, данного в § 4, на глобальный случай, по-видимому, не является естественным, так как класс порядков, над которыми все неразложимые модули представлений обратимы, слишком узок и не включает даже бассовых порядков.

Более естественным выглядит класс порядков, все локализации которых квазибассовы. Этим свойством обладают все бассовы порядки, а также, как показывает следующий результат, и порядки, над которыми всякий неразложимый модуль представления обратим.

Предложение 6.3. *Если всякий неразложимый Λ-модуль представления обратим, то для любого $\mathfrak{p}$ порядок $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ квазибассов.*

Доказательство. Пусть A — неразложимый $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-модуль представления. Из предложения 6.1 следует, что A входит прямым слагаемым в локализацию $B_{\mathfrak{p}}$ некоторого Λ-модуля представления B, причем B, очевидно, можно считать неразложимым. Тогда B — проективный $\Lambda(B)$-модуль, а значит, $B_{\mathfrak{p}}$, и потому A — проективные $\Lambda(B_{\mathfrak{p}})$-модуля. Но $\Lambda(A) \supset \Lambda(B_{\mathfrak{p}})$, следовательно, A — проективный $\Lambda(A)$-модуль и $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ квазибассово.

Порядки, все локализации которых квазибассовы (локально-квазибассовы порядки), образуют широкий класс порядков, все неразложимые представления которых ограничены по рациональной длине. Поэтому в арифметическом случае, когда все поля вычетов $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ конечны, есть только конечное число неразложимых представлений *.

Кажется весьма вероятным, что всякий неразложимый модуль представления локально-квазибассового порядка изоморфен подмодулю неразложимого проективного модуля.

К сожалению, у нас нет глобальной характеристики локально-квазибассовых порядков. Было бы интересно найти такую характеристику.

---

* В общем случае у локально-квазибассового порядка всегда есть только конечное число родов неразложимых представлений, где род представлений — это совокупность модулей представлений, имеющих изоморфные локализации по всем $\mathfrak{p}$.

В заключение мы докажем следующий результат, являющийся обобщением теоремы 4.4 на глобальный случай.

ТЕОРЕМА 6.4. *Следующие условия равносильны*:

(1) *всякий неразложимый Λ-модуль представления обратим*;

(2) *кольцо эндоморфизмов всякого неразложимого Λ-модуля бассово.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1) доказывается в точности так же, как и в локальном случае (см. теорему 4.4).

(1) $\Rightarrow$ (2). Как и в локальном случае, из следствия 1.6 вытекает, что если порядок Λ удовлетворяет условию (1), то кольцо эндоморфизмов всякого неразложимого Λ-модуля также удовлетворяет условию (1). Поэтому достаточно показать, что неразложимый (как модуль) порядок, удовлетворяющий условию (1), бассов.

Итак, пусть Λ — неразложимый как модуль порядок, удовлетворяющий условию (1). Тогда $\Lambda^*\diagdown E(\Lambda^*)$, но $E(\Lambda^*)=\Lambda$, значит, Λ—горенштейнов порядок. Если $\tilde{l}(\Lambda)=1$, то любое надкольцо Λ также неразложимо, а потому горенштейново, и Λ бассово. Будем считать поэтому, что для порядков Γ таких, что $\tilde{l}(\Gamma)<\tilde{l}(\Lambda)$, утверждение доказано.

Пусть $\mathfrak{p}$ — такой простой идеал, что $\Lambda_\mathfrak{p}$ — немаксимальный порядок. Разложим $\Lambda_\mathfrak{p}$ в кольцевую прямую сумму: $\Lambda_\mathfrak{p}=\Lambda_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_m$ и покажем, что все Λ_i бассовы. Ввиду того, что все Λ_i горенштейновы, и в силу теоремы 3.3, достаточно знать, что у Λ_i есть минимальное горенштейново надкольцо. Для упрощения обозначений будем считать, что $i=1$.

Разложим Λ_1 в прямую сумму неразложимых модулей: $\Lambda_1=P_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus P_s^{n_s}$. Все модули P_i биективны, и минимальные надкольца Λ_1 получаются выбрасыванием одного из P_i с заменой его на единственный минимальный надмодуль P_i'. Предположим, что P_i' неразложим, и пусть $\Lambda_1'=\Lambda_1^{\leftarrow}(P_i)$. У Λ есть надкольцо Λ' такое, что $\Lambda_\mathfrak{p}'=\Lambda_1'\oplus\Lambda_2\oplus\ldots\oplus\Lambda_m$ и $\Lambda_\mathfrak{q}'=\Lambda_\mathfrak{q}$ при $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$. Из предложения 6.2 следует, что Λ' снова неразложимо, а потому горенштейново, значит, Λ_1' горенштейново, т. е. Λ_1 бассово.

Таким образом, можно считать, что все модули P_i' разложимы. Заметим, что, по предложению 6.3, $\Lambda_\mathfrak{p}$ — квазибассов порядок, значит, и Λ_1 квазибассов. Поэтому $\tilde{l}(P_i)=2$. Ввиду теоремы 4.6, $\rho^*(\Lambda_1)=2$, т. е. структуры неприводимых Λ_1-модулей представлений линейны. Кроме того, радикал кольца Λ_1 вполне разложим (по предложению 2.11). Поэтому $P_1, \ldots, P_s$ — все двучленные неразложимые Λ_1-модули.

Пусть $P_1=A_1\oplus B_1$. Рассмотрим Λ_1-модуль $A=A_1\oplus B_1\oplus P_1^{n_1-1}\oplus P_2^{n_2}\oplus\ldots$ $\ldots\oplus P_s^{n_s}$. Существует Λ-модуль B такой, что $B_\mathfrak{p}=A\oplus\Lambda_2\oplus\ldots\oplus\Lambda_m$ и $B_\mathfrak{q}=\Lambda_\mathfrak{q}$ при $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$. Модуль B может распасться не более чем на два прямых слагаемых B' и B', причем таких, что $B_\mathfrak{p}'\simeq A_1\oplus X$ и $B_\mathfrak{p}''\simeq B_1\oplus Y$, так как иначе Λ разложимо по предложению 6.2. Но при $n_1>1$ либо в $B_\mathfrak{p}'$, либо в $B_\mathfrak{p}''$ входит P_1, а потому, поскольку A_1 и B_1 — фактормодули P_1, либо $B_\mathfrak{p}'$, либо $B_\mathfrak{p}''$ необратим. Таким образом, $n_1=1$, и B — надкольцо Λ, получающееся выбрасыванием P_1. Если B неразложимо, то Λ_1 снова будет бассовым, поэтому действительно $B=B'\oplus B''$. Тогда, по индукционному предположению, $E(B')$ и $E(B'')$ — бассовы порядки, значит, и $E(A_1\oplus X)$ и $E(B_1\oplus Y)$ — также бассовы порядки. Но из теоремы редукции для бассовых порядков (теорема 3.3) и предложения 1.8 следует тогда, что те модули P_i, которые входят в X, не имеют общих рациональных компонент между собой и с A_1, а те модули P_i, которые входят в Y, не имеют общих рациональных компонент между собой и с B_1. Отсюда следует, что $\widetilde{A}_1\not\simeq\widetilde{B}_1$ (иначе Λ_1 разложимо как кольцо) и не более одного модуля P_i имеет рациональную компоненту, изоморфную $\widetilde{A}_1$ или $\widetilde{B}_1$.

Заменяя P_1 на произвольный модуль P_i, мы получим, что Λ_1 обладает следующими свойствами:

(а) $\widetilde{P}_i\not\simeq\widetilde{P}_j$ при $i\neq j$;

(б) $n_i=1$ $(i=1, \ldots, s)$;

(в) $\widetilde{P}_i=\widetilde{A}_i\oplus\widetilde{B}_i$, причем $\widetilde{A}_i\not\simeq\widetilde{B}_i$;

(г) найдется самое большее один индекс $j\neq i$ такой, что в $\widetilde{P}_j$ входит прямым слагаемым $\widetilde{A}_i$; то же — для $\widetilde{B}_i$.

Кроме того, то же рассуждение, с помощью которого мы показали, что $n_i=1$, можно применить для доказательства следующего свойства порядка Λ:

(д) если B — произвольный неразложимый Λ-модуль, то в $B_{\mathfrak{p}}$ каждый модуль P_i может входить не более одного раза.

Занумеруем модули $P_1, \ldots, P_s$ так, чтобы общие рациональные компоненты имели модули P_i и P_{i+1} $(i=1, \ldots, s-1)$ и, возможно, P_s и P_1 (это можно сделать ввиду (а)—(г)).

Рассмотрим кольцо $\Delta_i=E(P_i)$. Δ_i есть первичный бассов порядок с разложимым радикалом, причем $\widetilde{\Delta}_i=D_i\oplus D_{i+1}$ (возможно $D_{n+1}\simeq D_1$). Следовательно, Δ_i есть диада максимальных порядков $\mathfrak{O}_i$ и $\mathfrak{O}_{i+1}$, лежащих в D_i и D_{i+1}. Это означает, что $\mathfrak{O}_i/\pi_i\mathfrak{O}_i\simeq\mathfrak{O}_{i+1}/\pi_{i+1}\mathfrak{O}_{i+1}$, где π_i — простой элемент $\mathfrak{O}_i$, а Δ_i изоморфно подкольцу в $\mathfrak{O}_i\oplus\mathfrak{O}_{i+1}$, состоящему из пар (ω, ω') таких, что ω и ω' имеют одинаковые образы в $\mathfrak{O}_i/\pi_i\mathfrak{O}_i\simeq$ $\simeq\mathfrak{O}_{i+1}/\pi_{i+1}\mathfrak{O}_{i+1}$. Порядок Λ_1 имеет тогда вид:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix} \Delta_1 & Y_2 & 0 \ldots & 0 & Y \\ X_2 & \Delta_2 & Y_3 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & X_3 & \Delta_3 \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \Delta_{n-1} & Y_n \\ X & 0 & 0 \ldots & X_n & \Delta_n \end{pmatrix},$$

причем из полной разложимости радикала следует, что можно считать: $X_i=\pi_i\mathfrak{O}_i$, $Y_i=\mathfrak{O}_i$ (если $D_{n+1}\simeq D_1$, то $X=\pi_1\mathfrak{O}_1$, $Y=\mathfrak{O}$, иначе $X=0$, $Y=0$).

В Λ_1 есть подкольцо Γ_1, которое получается заменой X_2 на $\overline{X}_2=\pi_2\mathfrak{O}_2$. Порядок Γ_1, как легко убедиться, квазибассов и $\Gamma_1=P_1\oplus P_2\oplus \ldots \oplus P_s$, причем у Γ_1 есть, по сравнению с Λ_1, два новых неразложимых модуля: $\overline{P}_1$ и Q_1 (Q_1 — инъективный Γ_1-модуль).

Рассмотрим в Λ подкольцо Γ такое, что $\Gamma_{\mathfrak{p}} = \Gamma_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \ldots \oplus \Lambda_m$, $\Gamma_{\mathfrak{q}} = \Lambda_{\mathfrak{q}}$ при $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Тогда из свойств (а) — (д) следует, что если C — неразложимый Γ-модуль, не являющийся Λ-модулем, то $C_{\mathfrak{p}} = \overline{P}_1 \oplus X$ или $C_{\mathfrak{p}} = Q_1 \oplus X$, где X есть Λ-модуль, в который не входит прямым слагаемым P_1, причем существует неразложимый Λ-модуль B такой, что $B_{\mathfrak{p}} = P_1 \oplus X$. Но нетрудно убедиться, что в этом случае $C_{\mathfrak{p}}$ — проективный $\Lambda(C_{\mathfrak{p}})$-модуль и C — проективный $\Lambda(C)$-модуль. Следовательно, Γ также удовлетворяет условию (1) теоремы. Но у Γ_1 радикал не вполне разложим, поэтому Γ_1 бассово и Λ_1 также бассово. Теорема доказана.

§ 7. Бассовы и квазибассовы алгебры

В этом параграфе мы перенесем определения и результаты §§ 3, 4 на случай конечномерных алгебр над некоторым полем k.

Пусть Λ — конечномерная k-алгебра, A — конечнопорожденный Λ-модуль. Тогда кольцо эндоморфизмов и кольцо множителей модуля A также являются конечномерными k-алгебрами. Наряду с кольцом множителей $\Lambda(A)$ часто полезно рассматривать кольцо гомотетий Λ_A:

$$\Lambda_A = \Lambda/\operatorname{Ann} A,$$

являющееся подалгеброй в $\Lambda(A)$. Из предложения 1.2 следует

Предложение 7.1. *Для всякого Λ-модуля A существует мономорфизм $\Lambda_A \to A^n$.*

Для конечнопорожденных Λ-модулей существует естественная двойственность: $A \rightsquigarrow A^* = \operatorname{Hom}_k(A, k)$. При этом $A \simeq A^{**}$ и эта двойственность осуществляет антиизоморфизм структур подмодулей в A и A^*.

Из результатов ([11]) следует, что для конечнопорожденных Λ-модулей всегда существуют проективные накрытия. Заметим, что двойственность переводит проективные модули в инъективные и наоборот. Поэтому имеет место утверждение, аналогичное предложению 2.8.

Предложение 7.2. *Неразложимый проективный (инъективный) Λ-модуль имеет ровно один максимальный (минимальный) подмодуль. Наоборот, если A есть конечнопорожденный Λ-модуль, длина которого не меньше максимума длин неразложимых проективных Λ-модулей (правых и левых), и A имеет ровно один максимальный (минимальный) подмодуль, то A проективен (инъективен) и неразложим.*

Модули, являющиеся одновременно проективными и инъективными, будем по-прежнему называть биективными. Для них также имеет место «лемма о выбрасывании», аналогичная лемме 2.9.

ЛЕММА 7.3. *Если A — неразложимый биективный Λ-модуль, то существует собственная факторалгебра Γ алгебры Λ такая, что всякий неразложимый Λ-модуль, кроме A, есть Γ-модуль.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные Λ-модули C вида: $C = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$, где C_i — неразложимые Λ-модули, неизоморфные A. Пусть $X(C)$ — ядро гомоморфизма $\Lambda \to \Lambda(C)$ и $X = \bigcap_C X(C)$. Поскольку $X(C \oplus C') = X(C) \cap X(C')$, то $X = X(C)$ для некоторого C. Пусть $\Gamma = \Lambda/X$.

Очевидно, всякий неразложимый Λ-модуль, кроме A, есть Γ-модуль. Если A также есть Γ-модуль, то $\Gamma=\Lambda$ и существует мономорфизм $\Lambda\to C^n$. Следовательно, существует и мономорфизм $A\to C^n$, откуда, ввиду инъективности A, $C^n\simeq A\oplus Y$, что противоречит однозначности разложения. Лемма доказана.

Факторалгебру Γ мы будем обозначать $\Lambda^-(A)$.

ЛЕММА 7.4. *Пусть A — биективный неразложимый Λ-модуль, A_1 — его единственный максимальный, а A_2 — единственный минимальный подмодуль, $\Gamma=\Lambda^-(A)$. Тогда A/A_2 — проективный, а A_1 — инъективный Γ-модули.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.10.

Естественным аналогом горенштейновых порядков в теории алгебр являются квазифробениусовы алгебры, т. е. такие алгебры Λ, что Λ является инъективным модулем над собой [см., например, ([21])].

Алгебру Λ назовем бассовой, если все ее факторалгебры (в том числе и она сама) квазифробениусовы. Из предложений 1.1 и 1.2 следует характеристика бассовых алгебр, аналогичная теореме 3.1.

ТЕОРЕМА 7.5. *Следующие условия равносильны:*

(1) *алгебра Λ бассова;*

(2) *для всякого Λ-модуля A $A\diagdown\Lambda(A)$;*

(3) *всякий Λ-модуль A проективен как $E(A)$-модуль;*

(4) *для любых Λ-модулей A и B из $A\diagdown B$ следует $A^*\diagdown B^*$.*

Из теоремы 1.5 непосредственно следует

Предложение 7.6. *Если Λ — бассова алгебра, P — проективный Λ-модуль, то $E(P)$ — также бассова алгебра.*

Докажем следующую теорему, аналогичную теореме 3.3 и дающую, в частности, описание бассовых алгебр.

ТЕОРЕМА 7.7. *Пусть Λ — квазифробениусова алгебра, неразложимая в кольцевую прямую сумму, Γ — факторалгебра Λ по некоторому минимальному двустороннему идеалу. Если Γ также квазифробениусова, то $\Lambda\simeq M_n(L)$, где L — неразложимая как модуль алгебра с циклическим радикалом. Алгебра L, а следовательно, и Λ — бассова.*

Заметим сначала, что из леммы 7.3 следует

ЛЕММА 7.8. *Всякая факторалгебра квазифробениусовой алгебры Λ по минимальному двустороннему идеалу имеет вид $\Lambda^-(P)$, где P — неразложимый проективный (а потому и биективный) Λ-модуль.*

Доказательство теоремы 7.7. В силу леммы 7.8, $\Gamma=\Lambda^-(P)$, где P — неразложимый биективный Λ-модуль. Пусть $\Lambda=P^s\oplus P'$, где в P' нет прямых слагаемых, изоморфных P. Обозначим через A_1 максимальный подмодуль, через B_1 — минимальный подмодуль в P. В силу леммы 7.4, A_1 — инъективный, а $P_1=P/B_1$ — проективный Γ-модуль. Поскольку Γ квазифробениусова, Γ-модуль A_1 проективен. Но A_1 не может быть изоморфен прямому слагаемому P', так как P неразложим, а P' — инъективный Λ-модуль. Следовательно, $A_1\simeq P_1$. Поэтому если обозначить максимальный подмодуль в A_1 через A_2, а минимальный подмодуль модуля P_1 через B_2, то $A_1/A_2\simeq P/A_1$, а $B_2\simeq B_1$. Но тогда у A_2 есть ровно один максимальный подмодуль A_3, причем $A_2/A_3 \simeq A_1/A_2$. Продолжая это рассмотрение, мы получим цепочку подмодулей модуля P: $P = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset$ ..., причем A_{i+1} — единственный максимальный подмодуль в A_i и все фактормодули A_i/A_{i+1} изоморфны. Эта цепочка обрывается, но оборваться она может только на модуле B_1, откуда следует, что $A_i/A_{i+1} \simeq B_2 \simeq B_1$.

Итак, мы построили в P композиционный ряд, все факторы которого изоморфны P/A_1. Отсюда следует, что разложение $\Lambda = P^s \oplus P'$ двустороннее и, в силу кольцевой неразложимости Λ, $P' = 0$, т. е. $\Lambda = P^s$. Но тогда $\Lambda \simeq M_s(L)$, где $L = E(P)$, и L — неразложимая как модуль алгебра с циклическим радикалом. Покажем, что такая алгебра всегда бассова, что завершит доказательство теоремы.

Из цикличности радикала R неразложимой алгебры L очевидно следует, что все правые идеалы в L имеют вид R^n. Поэтому у L один минимальный правый идеал, и из предложения 7.2 следует, что L — квазифробениусова алгебра. Но всякая факторалгебра L также неразложима и имеет циклический радикал. Следовательно, L — бассова.

Замечание. Как легко видеть, из теоремы 7.7 следует, что бассовы алгебры являются даже фробениусовыми (т. е. такими, что $\Lambda \simeq \Lambda^*$ ([21])).

ТЕОРЕМА 7.9. *Алгебра Λ бассова тогда и только тогда, когда всякий двусторонний Λ-идеал является циклическим правым Λ-модулем.*

Доказательство. Очевидно, Λ можно считать неразложимой в кольцевую прямую сумму. Пусть $\Lambda = P^s \oplus P'$, где P — неразложимый проективный Λ-модуль, не входящий прямым слагаемым в P'. Если A_1 — максимальный подмодуль в P, то $I = A_1^s \oplus P'$ — двусторонний идеал ($I = \operatorname{Ann} P/A_1$). Из цикличности I следут, что A_1 — фактормодуль модуля P и потому в A_1 есть один максимальный подмодуль A_2, причем $A_1/A_2 \simeq P/A_1$. Но тогда $I^2 = A_2^s \oplus P'$, значит, A_2 — также фактормодуль P. Продолжая этот процесс, мы убедимся, что всякий подмодуль модуля P имеет единственный максимальный подмодуль, фактормодуль по которому изоморфен P/A_1. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 7.6, следует, что $\Lambda \simeq M_s(L)$, где L — неразложимая как модуль алгебра с циклическим радикалом, т. е. Λ бассова. Обратное утверждение непосредственно следует из теоремы 7.6.

Отметим, что алгебры, в которых все двусторонние идеалы цикличны, изучались Асано ([22]) (см. также ([23]), гл. IV, §§ 15—16).

Дадим теперь определение квазибассовых алгебр.

Алгебру Λ назовем квазибассовой, если всякий неразложимый Λ-модуль обратим (т. е. проективен над своим кольцом множителей). Очевидно, всякая бассова алгебра является квазибассовой.

Из теоремы 1.5 следует

Предложение 7.10. *Если Λ — квазибассова алгебра, P — проективный Λ-модуль, то $E(P)$ — также квазибассова алгебра.*

Предложение 7.11. *Неразложимая как модуль квазибассова алгебра бассова.*

Доказательство следует из теоремы 7.7.

ТЕОРЕМА 7.12. *Следующие условия равносильны*:

(1) *алгебра Λ квазибассова*;

(2) *для всякого неразложимого Λ-модуля A алгебра $E(A)$ бассова*;

(3) *всякий неразложимый Λ-модуль A инъективен как $\Lambda(A)$-модуль.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из предложений 7.10, 7.11 и теоремы 7.5.

Двойственным образом доказывается (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Так же, как и в случае порядков, среди квазибассовых алгебр содержатся такие алгебры Λ, что для всякой факторалгебры Γ алгебры Λ есть биективный Γ-модуль. Этот класс допускает следующую характеристику.

ТЕОРЕМА 7.13. *Следующие условия равносильны*:

(1) *у всякой факторалгебры Γ алгебры Λ есть биективный Γ-модуль*;

(2) *структура подмодулей всякого неразложимого Λ-модуля линейна*;

(3) *структура подмодулей всякого неразложимого проективного Λ-модуля (как правого, так и левого) линейна.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если A — неразложимый Λ-модуль, то существует мономорфизм $\Lambda_A \to A^n$ (предложение 7.1), а потому и мономорфизм $B \to A^n$, где B — биективный неразложимый Λ_A-модуль. Отсюда следует, что $A^n \simeq B \oplus X$, и, ввиду однозначности разложения, $A \simeq B$. Поэтому у A есть единственный максимальный подмодуль A_1, причем, поскольку A инъективен, A_1 неразложим. Следовательно, к A_1 применимы те же рассуждения, что и доказывает наше утверждение.

(2) $\Rightarrow$ (3) как частный случай и ввиду двойственности.

(3) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что свойство (3) сохраняется при переходе к факторалгебрам, поэтому достаточно доказать, что у Λ есть биективный модуль. Но если P — проективный неразложимый модуль наибольшей длины (правый или левый), то в силу (3) у него есть ровно один минимальный подмодуль, а тогда P инъективен по предложению 7.2.

Отметим, что эквивалентность условий (2) и (3) в более общей ситуации установил Л. А. Скорняков ([24]). Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) является обобщением теоремы 43 из ([23]), гл. IV.

Следующий пример показывает, что в условии (3) теоремы 7.13 существенно требовать линейность структуры подмодулей как для правых, так и для левых модулей. Пусть Λ_n — алгебра над полем k, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \dots 0 \\ a_3 & 0 & b_3 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 \dots b_n \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 3),$$

где a_i, b_i — произвольные элементы из k. Неразложимые правые проективные Λ_n-модули $P_i=e_{ii}\Lambda$ имеют при $i>1$ максимальный подмодуль, изоморфный P_1, а P_1 — неприводимый Λ_n-модуль. Но у левого проективного Λ_n-модуля Λe_{11} есть $n-1$ минимальных подмодулей.

Отметим также, что, ставя для алгебры Λ_n матричную задачу способом, изложенным в § 5 (за I следует взять радикал Λ_n), нетрудно проверить, что описание Λ_n-модулей сводится к приведению матрицы X вида

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{pmatrix},$$

причем над столбцами матрицы X можно совершать любые элементарные преобразования, а над строками — только внутри каждой клетки X_i. Приведя матрицу X, легко убедиться, что алгебра Λ_3 квазибассова, а при $n>3$ алгебра Λ_n не квазибассова. При $n>4$ алгебра Λ_n имеет бесконечно много неразложимых модулей. Заметим, что при любых n алгебра Λ_n, очевидно, наследственна. Тем самым мы получаем пример наследственных алгебр, не являющихся квазибассовыми, а также наследственных алгебр, имеющих бесконечно много неразложимых модулей.

§ 8. Коммутативные бассовы кольца

В настоящем параграфе Λ будет обозначать коммутативное кольцо без нильпотентных элементов, размерности Крулля 1 и такое, что его целое замыкание $\overline{\Lambda}$ в полном кольце частных есть конечнопорожденный Λ-модуль.

Напомним, что, согласно ([2]), кольцо Λ называется горенштейновым, если $\operatorname{inj}\cdot\dim_\Lambda \Lambda=1$. Следуя ([17]), кольцо Λ будем называть бассовым, если все его надкольца (т. е. такие кольца Γ, что $\Lambda\subset\Gamma\subset\overline{\Lambda}$) горенштейновы.

ТЕОРЕМА 8.1. *Следующие условия равносильны*:

(1) *кольцо* Λ *бассово*;

(2) *всякий* Λ-*идеал проективен над своим кольцом эндоморфизмов*;

(3) *всякий* Λ-*идеал обратим над своим кольцом эндоморфизмов*;

(4) *любой* Λ-*идеал имеет две образующие*;

(5) $\overline{\Lambda}/\Lambda$ — *циклический* Λ-*модуль*.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) доказано в ([2]). (2) $\Leftrightarrow$ (3) следует из предложения 1.1, поскольку здесь $\Lambda(A)=E(A)$. Эквивалентность условий (4) и (5) для локальных колец доказана в ([17]). Но в ([2]) показано, что условие (4) достаточно проверить для локализаций кольца Λ. С другой стороны, $\overline{\Lambda}/\Lambda$ есть Λ-модуль конечной длины, откуда следует, что и условие (5) также достаточно проверить локально. Тем самым эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) доказана. (2) $\Rightarrow$ (1). Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 8.2. *Пусть* L — *такой* Λ-*модуль, что* $\Lambda\subset L\subset\overline{\Lambda}$, *причем* L *проективен над своим кольцом эндоморфизмов* Γ. *Тогда* $L=\Gamma$.

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}\subset\Gamma$ $L_{\mathfrak{p}}=\Gamma_{\mathfrak{p}}$. Поэтому кольцо Γ можно считать локальным. Тогда модуль L свободен ([25]) (VIII.6.1′), т. е. $L=a\Gamma$. Поскольку $1\in L$, то $L\subset L^2\subset\ldots\subset\bar{\Lambda}$, откуда следует, что при некотором i $L^i=L^{i+1}=\ldots=L^{2i}$, т. е. L^i есть кольцо. Но $L^i=a^i\Gamma$, поэтому $L^i=\Gamma$ и $a^i\in\Gamma$. Так как $a^{-1}\in\Gamma$, то $a\in\Gamma$ и $L=\Gamma$.

Перейдем к доказательству импликации (2) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что и свойство (1), и свойство (2) достаточно проверить для локализаций кольца Λ и даже для их пополнений. Поэтому при доказательстве можно считать, что Λ — полное локальное кольцо. Кроме того, можно предположить, что все собственные надкольца Λ уже бассовы.

Пусть P — максимальный идеал Λ, Γ — его кольцо эндоморфизмов. $A=\Gamma/P$ есть конечномерная алгебра над полем $k=\Lambda/P$. Если $[A:k]\leqslant 2$, то $\Gamma/\Lambda\simeq\Lambda/P$ и Λ горенштейново, а потому бассово. Предположим, что $[A:k]\geqslant 3$.

Рассмотрим в A произвольное k-подпространство V, содержащее единицу. Пусть L — его полный прообраз в Γ. Тогда $\Lambda\subset L\subset\Gamma$, L проективен над $E(L)$ и по лемме 8.2 $L=E(L)$, т. е. L есть кольцо, а V — подалгебра в A. Но существует всего два типа алгебр A таких, что $[A:k]\geqslant 3$ и всякое подпространство в A, содержащее единицу, есть подалгебра. Это алгебра $A_1=k[r_1, \ldots, r_n]$ $(n\geqslant 2)$ такая, что $r_ir_j=0$ для любых i, j, а также алгебра $A_2=k\oplus\ldots\oplus k$ (число слагаемых больше двух), если k — поле из двух элементов.

Если $A=A_1$, то Γ — локальное кольцо, максимальный идеал Q которого порождается прообразами $r_1, \ldots, r_n$. Тогда, в силу ([2]), существует единственный Γ-модуль $B\supset\Gamma$ такой, что $B/\Gamma\simeq\Gamma/Q$. Но P — проективный Γ-модуль, поэтому $P=a\Gamma$ и aB — единственный Γ-модуль, содержащий P и такой, что $aB/P\simeq\Gamma/Q$. Значит, в алгебре A_1 должен быть один минимальный идеал, что неверно. Таким образом, случай $A=A_1$ невозможен.

Пусть теперь $A=A_2$, $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ $(n\geqslant 3)$ — ортогональные идемпотенты в A, $e_1, \ldots, e_n$ — их ортогональные идемпотентные прообразы в Γ, которые существуют ввиду полноты Λ. Рассмотрим Λ-модуль $L=P+(e_1+e_2)\Lambda+(e_1+e_3)\Lambda+\ldots+(e_1+e_n)\Lambda$. $L\Gamma=\Gamma$, значит, $E(L)\subset L$. Всякое надкольцо Γ, отличное от Λ, разложимо, так как в A_2 всякая неодномерная подалгебра разложима. Следовательно, $E(L)=\Lambda$, так как модуль L неразложим. Но легко проверить, что $L\not\simeq\Lambda$ и потому L — непроективный Λ-модуль, что противоречит условию (2). Теорема доказана.

Из теоремы 8.1 непосредственно следует ее геометрический аналог. Именно, пусть C — алгебраическая кривая над полем k, O — пучок локальных колец на C, C' — нормализация кривой C, O' — пучок локальных колец на C', φ — естественный морфизм $C'\to C$. Назовем кривую C бассовой, если для всякой точки $p\in C$ локальное кольцо O_p бассово. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 8.3. *Следующие условия равносильны:*

(1) *кривая C бассова;*

(2) *для всякого когерентного пучка O-идеалов J существуют кривая C_1, сюръективные морфизмы $f: C_1 \to C$ и $g: C' \to C_1$ и обратимый пучок L на C_1 такие, что $fg = \varphi$, а $J = f_*(L)$, где f_*, как обычно,— прямой образ пучка при морфизме f;*

(3) *пучок $f_*(O')/O$ порождается над O одним глобальным сечением.*

Используя результаты работы ([5]) (теорема 13.1), легко показать, что если поле k алгебраически замкнуто, то для любой особой точки бассовой кривой пополнение ее локального кольца изоморфно одному из колец A_n или B_n ($n \geqslant 1$), где A_n — подкольцо прямой суммы $k[[T]] \oplus \oplus k[[T]]$, состоящее из таких пар (f, g), что $f \equiv g (\operatorname{mod} T^n)$; B_n — подкольцо кольца $k[[T]]$, состоящее из таких рядов f, что нечетные степени T, входящие в f, не меньше $2n+1$.

Наоборот, если кривая имеет особенности только указанного вида, то она бассова, так как кольца A_n и B_n бассовы. Таким образом, бассовы кривые — это кривые с квадратичными особенностями.

Приведем в заключение пример, показывающий, что даже для областей целостности условие разложимости всех модулей без кручения в прямую сумму идеалов не есть локальное условие.

Пусть $\overline{\Lambda} = Z[\sqrt[3]{6}]$, $\Lambda = 7\overline{\Lambda} + Z$. Тогда $\mathfrak{q} = 7\overline{\Lambda}$ — простой идеал в Λ, причем $\Lambda_{\mathfrak{q}}$ — триада локальных колец ([2]), а при $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \overline{\Lambda}_{\mathfrak{p}}$. Поэтому для любого $\mathfrak{p} \subset \Lambda$ все $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-модули без кручения разлагаются в прямую сумму идеалов ([2]). Однако идеал $\mathfrak{p}$ кольца Λ имеет три образующих, поэтому из ([1]) следует, что у Λ есть неразложимый модуль без кручения, не являющийся идеалом.

Поступило
14.VII.1970

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bass H., Torsion free and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 102, № 2 (1962), 319—327.

[2] Bass H., On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., 82(1963), 8—27.

[3] Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Представления порядков с циклическим индексом, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 51—65.

[4] Ройтер А. В., Аналог одной теоремы Басса для модулей представлений некоммутативных порядков, Докл. АН СССР, 1968, № 6 (1966), 1261—1264.

[5] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В., О наследственных и бассовых порядках, Изв. АН ССС. Сер. матем., 31 (1967), 1415—1436.

[6] Ройтер А. В., Категории с делимостью и целочисленные представления, Докл. АН СССР, 153, № 1 (1963), 46—48.

[7] Ленг С., Алгебра, М., «Мир», 1968.

[8] Gabriel P., Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math., France, 90(1962), 323—448.

[9] Фадеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.

[10] Боревич З. И., Фаддеев Д. К., К теории гомологий конечных групп. II, Вестн. ЛГУ, 7 (1959), 72—87.

[11] Bass H., Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., 95(1960), 466—488.

[12] Ройтер А. В., Категории представлений, Укр. матем. ж., 15, № 4 (1963), 448—452.
[13] Hasse H., Ueber p-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetic hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., 104 (1931), 495—534.
[14] Кириченко В. В., О порядках, все представления которых вполне разложимы, Матем. заметки, 2(1967), 139—144.
[15] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., О представлениях колец, лежащих в матричной алгебре второго порядка, Укр. матем. ж., 19, № 3 (1967), 107—112.
[16] Кириченко В. В., Представления матричных колец третьего порядка, Матем. заметки, т. 8, № 2 (1970), 235—244.
[17] Дрозд Ю. А., Ройтер А. В., Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 31(1967), 783—798.
[18] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Конечнопорожденные модули над диадой двух локальных дедекиндовых колец и конечные группы, обладающие абелевым нормальным делителем индекса p, Изв. АН СССР, Сер. матем., 33 (1969), 65—89.
[19] Фаддеев Д. К., О полугруппе родов в теории целочисленных представлений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 28 (1964), 475—478.
[20] Deuring M., Algebren, Berlin, Springer, 1935.
[21] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр., М., «Наука», 1969.
[22] Asano K., Nichtkommutative Hauptidealringe, Act. Sci. Ind., № 696 (1938).
[23] Джекобсон Н., Теория колец, М., ИЛ, 1947.
[24] Скорняков Л. А., Когда все модули полуцепные, Матем. заметки, 5 (1969), 173—183.
[25] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., ИЛ, 1960.