ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

37(1973), 715—736

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД, В. В. КИРИЧЕНКО

ПРИМАРНЫЕ ПОРЯДКИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Пусть Λ — полупростое Z-кольцо, C — его центр. Предположим, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}\subset C$ кольцо $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ примарно. Пусть $\overline{\Lambda}$ — пересечение максимальных надколец Λ, $I=\overline{\Lambda}/\Lambda$, $I'=\operatorname{rad} I$. Доказывается, что Λ имеет конечное число неразложимых целочисленных представлений тогда и только тогда, когда $\overline{\Lambda}$ — наследственное кольцо, Λ-модуль I имеет два образующих, а Λ-модуль I' цикличен.

Пусть Λ — некоторое Z-кольцо, т. е. кольцо с единицей, аддитивная группа которого — свободная абелева конечного ранга. Говорят, что Λ — кольцо *конечного типа*, если оно имеет конечное число целочисленных неразложимых представлений. Одной из основных задач теории целочисленных представлений является нахождение критериев того, чтобы данное Z-кольцо было конечного типа. Эта задача была решена для групповых колец ([1])—([4]) и для коммутативных колец ([3]), ([5]). Обобщение критерия ([5]) на некоторый класс некоммутативных колец содержится в ([6]) (гл. X). Заметим, что без ограничения общности можно считать алгебру $\widetilde{\Lambda}=\Lambda\otimes Q$ (Q — поле рациональных чисел) полупростой, так как иначе Λ имеет бесконечно много неразложимых представлений, как следует, например, из ([7]) (п. 25°). Такие Z-кольца мы будем называть полупростыми.

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Пусть Λ — полупростое Z-кольцо, C — его центр. Предположим, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}\subset C$ кольцо $\Lambda_{\mathfrak{p}}=\Lambda\otimes C_{\mathfrak{p}}$ примарно*. Пусть $\overline{\Lambda}$ — пересечение максимальных надколец* ([7]) *кольца Λ, $I=\overline{\Lambda}/\Lambda$, I' — пересечение максимальных подмодулей Λ-модуля I. Для того чтобы кольцо Λ было конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *$\overline{\Lambda}$ — наследственное кольцо;*

(2) *Λ-модуль I имеет два образующих;*

(3) *Λ-модуль I' цикличен.*

Если Λ — коммутативное кольцо, то у него есть всего одно максимальное надкольцо и условие (1) автоматически выполняется. Условия

* Напомним, что кольцо называется примарным ([8]), если его фактор-кольцо по радикалу Джекобсона — простое артиново кольцо.

же (2) и (3) в точности совпадают с критерием [5]. То же самое имеет место и для колец, рассмотренных в [6].

Доказательство теоремы также ведется аналогично работе [5].

Изложим кратко план работы.

В § 1 доказательство теоремы обычным способом сводится к случаю p-адических представлений локальных колец.

В § 2 доказывается необходимость условий (1)—(3).

Основную роль в доказательстве достаточности играет лемма 3.1 (§ 3): кольцо множителей радикала негоренштейнова локального кольца, удовлетворяющего условиям (1)—(3), есть кольцо веса 2 в смысле [9].

В § 4 излагается способ вычисления представлений с помощью техники матричных задач [10], [11].

Наконец, в §§ 5—7 доказывается достаточность условий (1)—(3). Описание представлений, данное в этих параграфах, используется в § 8 для получения критерия того, что все p-адические представления локального порядка реализуются в идеалах.

Кроме того, § 8 содержит следствие из основной теоремы: если Λ — полупростое Z_p-кольцо конечного типа, то пересечение его максимальных надколец вполне разложимо, т. е. разлагается в прямую сумму неприводимых модулей представлений.

Поскольку сформулированные результаты без труда переносятся на случай порядков над произвольным дедекиндовым кольцом, доказательство проводится в этой общности. Говоря «модуль», мы будем подразумевать правый модуль, если не оговорено противное. Однако, в силу двойственности, имеющейся для целочисленных представлений [7], все утверждения имеют место и для левых модулей.

Отметим, что условие примарности колец $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ достаточно проверять лишь для тех $\mathfrak{p}$, для которых $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ не максимально, так как максимальные порядки всегда ему удовлетворяют [7]. Кроме того, поскольку конечность числа неразложимых представлений — локальное свойство [6], условия теорем нужно проверять только для тех простых $\mathfrak{p}$, для которых заранее неизвестно, что $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ имеет конечное число представлений. Например, можно сразу отбросить те $\mathfrak{p}$, для которых $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ наследственно, или бассово, или квазибассово [9]. Тем не менее для оставшихся идеалов $\mathfrak{p}$ (их всегда конечное число [7]) условие примарности $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ весьма существенно. Простейшим примером колец, не удовлетворяющих этому условию, могут служить вполне разложимые кольца. Пусть, например, Λ есть подкольцо кольца целочисленных матриц третьего порядка, состоящее из всех таких матриц, у которых недиагональные элементы делятся на фиксированное число n. Для него $\overline{\Lambda} = \Lambda$ и потому ненаследственно при $n > 1$ [14], а $I = I' = 0$, т. е. Λ удовлетворяет условиям (2) и (3), но не удовлетворяет (1). Нетрудно проверить, что Λ имеет конечное число представлений тогда и только тогда, когда n свободно от квадратов. Таким образом, условие примарности является важным ограничением.

Однако класс колец, удовлетворяющих этому условию, довольно широк и содержит многие важные классы колец. В частности, в него автоматически попадают все коммутативные кольца, а также групповые и скрещенные групповые кольца конечных p-групп над кольцами алгебраических чисел. Поскольку для представлений групп вопрос конечности сводится к случаю p-групп, наша теорема в принципе дает на него ответ, хотя его переформулировка в групповых терминах никоим образом не очевидна и требует самостоятельного исследования.

§ 1. Локализация

Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо с полем частных K, Λ — $\mathfrak{o}$-порядок в сепарабельной K-алгебре $\widetilde{\Lambda}$ ([7]), ([9]). Напомним, что Λ-модулем представления, или представлением порядка Λ, называется конечнопорожденный Λ-модуль без $\mathfrak{o}$-кручения. Говорят, что два представления A и B принадлежат одному роду, если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ $A_\mathfrak{p} \simeq B_\mathfrak{p}$, где $A_\mathfrak{p} = A \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, а $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ — $\mathfrak{p}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}$. Заметим, что два модуля одного рода разложимы или неразложимы одновременно ([6]), поэтому можно говорить о разложимости всего рода.

Будем говорить, что $\mathfrak{o}$-порядок Λ конечного типа, если у него есть конечное число неразложимых родов представлений *.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть* Λ — $\mathfrak{o}$-*порядок в сепарабельной K-алгебре* $\widetilde{\Lambda}$, C — *его центр. Предположим, что для любого простого идеала* $\mathfrak{P} \subset C$ *кольцо* $\Lambda_\mathfrak{P} = \Lambda \otimes_C C_\mathfrak{P}$ *примарно. Пусть* $\overline{\Lambda}$ — *пересечение максимальных надколец* Λ, $I = \overline{\Lambda}/\Lambda$, $I' = \operatorname{rad} I$ — *пересечение максимальных подмодулей* Λ-*модуля* I. *Для того чтобы* Λ *был порядком конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) $\overline{\Lambda}$ — *наследственный порядок*;

(2) Λ-*модуль* I *имеет два образующих*;

(3) Λ-*модуль* I' *цикличен.*

Отметим прежде всего, что $\mathfrak{o}$-порядок Λ является порядком конечного типа тогда и только тогда, когда для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-порядок $\Lambda_\mathfrak{p}$ является порядком конечного типа ([6]) (гл. X). Но из ([12]) следует, что $\Lambda_\mathfrak{p} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}} \Lambda_\mathfrak{P}$, поэтому $\Lambda_\mathfrak{p}$ конечного типа тогда и только тогда, когда все $\Lambda_\mathfrak{P}$ конечного типа.

С другой стороны, пересечение максимальных надколец $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$-порядка $\Lambda_\mathfrak{P}$ есть $\overline{\Lambda}_\mathfrak{P}$, и $\overline{\Lambda}$ наследственен тогда и только тогда, когда наследственны все $\overline{\Lambda}_\mathfrak{P}$ ([7]). Кроме того, из ([12]) (гл. IV) следует, что

$$I = \bigoplus_{\mathfrak{P}} I_\mathfrak{P}, \quad I' = \bigoplus_{\mathfrak{P}} I'_\mathfrak{P},$$

* Заметим, что число представлений в роде, вообще говоря, может быть и бесконечным, если для кольца $\mathfrak{o}$ не выполняется теорема Жордана — Цассенхауза.

причем $I_{\mathfrak{P}}=\overline{\Lambda}_{\mathfrak{P}}/\Lambda_{\mathfrak{P}}$, $I'_{\mathfrak{P}}=\operatorname{rad} I_{\mathfrak{P}}$. Поэтому, если обозначить минимальное число образующих Λ-модуля X через $\mu_\Lambda(X)$, имеем:

$$\mu_\Lambda(I)=\max_{\mathfrak{P}} \mu_{\Lambda_{\mathfrak{P}}}(I_{\mathfrak{P}}), \quad \mu_\Lambda(I')=\max_{\mathfrak{P}} \mu_{\Lambda_{\mathfrak{P}}}(I'_{\mathfrak{P}}).$$

Следовательно, при доказательстве теоремы 1.1 можно считать, что $\mathfrak{o}$ — полное локальное кольцо, а Λ — примарный $\mathfrak{o}$-порядок. Но тогда Λ является SBI-кольцом в терминологии ([8]) и из теоремы 3.9.1 ([8]) следует, что $\Lambda\simeq M_n(L)$, где L — локальный порядок (вполне примарный в терминологии ([8])). Если отождествить Λ с $M_n(L)$, то легко проверить, что $\overline{\Lambda}=M_n(\overline{L})$, где $\overline{L}$ — пересечение максимальных надколец L;

$$\mu_\Lambda(I)=\mu_L(J), \quad \mu_L(I')=\mu_L(J'),$$

где $J=\overline{L}/L$, $J'=\operatorname{rad} J$. Кроме того, кольца Λ и L Морита-эквивалентны и потому имеют одинаковое число неразложимых представлений. Значит, теорема 1.1 равносильна следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1.2 *. *Пусть $\mathfrak{o}$ — полное дедекиндово локальное кольцо, Λ — локальный $\mathfrak{o}$-порядок в сепарабельной K-алгебре $\widetilde{\Lambda}$, $\overline{\Lambda}$ — пересечение максимальных надколец Λ, $I=\overline{\Lambda}/\Lambda$, $I'=\operatorname{rad} I$. Для того чтобы Λ был порядком конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *$\overline{\Lambda}$ — наследственный порядок;*

(2) $\mu_\Lambda(I)\leqslant 2$;

(3) $\mu_\Lambda(I')\leqslant 1$.

В следующих параграфах мы всегда будем считать, что $\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо с полем частных K и полем вычетов k. Говоря «порядок», мы будем подразумевать $\mathfrak{o}$-порядок в сепарабельной K-алгебре.

§ 2. Доказательство необходимости

Доказательство необходимости условий (1)—(3) теоремы 1.2 основывается на следующем результате, доказанном в ([13]) (теорема 2).

Предложение 2.1. *Пусть Λ — локальный порядок, Γ — его надкольцо, N — двусторонний идеал в Γ такой, что $R=\operatorname{rad}\Lambda\subset N\subset\operatorname{rad}\Gamma$. Если порядок Λ конечного типа, то*:

(1) $\mu_\Lambda(\Gamma/N)\leqslant 3$;

(2) *если Γ — локальный порядок и* $(\operatorname{rad}\Gamma)^2\subset N$, *то* $\mu_\Lambda(\Gamma/N)\leqslant 2$.

Нам понадобятся также две простые леммы. Напомним, что Λ-модуль представления A называется неприводимым, если $\widetilde{A}=A\otimes_\Lambda\widetilde{\Lambda}$ есть простой $\widetilde{\Lambda}$-модуль ([9]). Если, кроме того, $E(A)=\operatorname{Hom}_\Lambda(A,A)$ — максимальный порядок, то модуль A будем называть правильным. Из ([7])

* Примечание при корректуре. Недавно К. В. Роггенкамп ([24]) анонсировал некоторый критерий конечности для вполне разветвленных локальных порядков, т. е. таких, что $\Lambda/R\simeq\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Можно проверить, что при этом сильном ограничении приведенные им условия равносильны теореме 1.2.

(п. 31°) следует, что правильные неприводимые представления порядка Λ — это неприводимые представления его максимальных надколец. Кроме того,

$$\overline{\Lambda} = \Lambda(\oplus A), \tag{1}$$

где A пробегает все правильные неприводимые Λ-модули представлений, а $\Lambda(X)$ обозначает кольцо множителей модуля X [см. ([9])].

ЛЕММА 2.2. *Если A — правильный неприводимый Λ-модуль представления, то AR — также правильный модуль, содержащийся во всех максимальных правильных подмодулях модуля A.*

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 2.3. *Порядок $\overline{\Lambda}$ наследственен тогда и только тогда, когда каждый правильный неприводимый Λ-модуль представления имеет ровно один максимальный правильный подмодуль, т. е. структура правильных Λ-модулей, принадлежащих каждой простой компоненте алгебры $\widetilde{\Lambda}$, линейна.*

Доказательство следует из формулы (1) и результатов ([14]), где проверяется, в частности, что пересечение колец множителей линейной структуры правильных модулей наследственно.

Пусть Λ — локальный порядок конечного типа. Предположим, что $\overline{\Lambda}$ — наследственный порядок и покажем, что тогда $\mu_\Lambda(I) \leqslant 2$ и $\mu_\Lambda(I') \leqslant 1$.

Действительно, легко видеть, что $\mu_\Lambda(I) = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) - 1 = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}/\overline{\Lambda}R) - 1$. Поскольку $\overline{\Lambda}$ — наследственный порядок, $\overline{\Lambda} = \oplus_i A_i$, где A_i — правильные неприводимые модули представлений. Тогда $\overline{\Lambda}R = \oplus_i A_i R$ в силу леммы 2.2 также является правым $\overline{\Lambda}$-модулем. Поэтому $\overline{\Lambda}R$ — двусторонний $\overline{\Lambda}$-идеал, содержащийся в $\operatorname{rad}\overline{\Lambda}$, и, в силу предложения 2.1, $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}/\overline{\Lambda}R) \leqslant 3$, т. е. $\mu_\Lambda(I) \leqslant 2$.

Положим теперь $\Gamma = \overline{\Lambda}R + \Lambda$. Γ — надкольцо Λ и $\Gamma/\overline{\Lambda}R \simeq \Lambda/\Lambda \cap \overline{\Lambda}R = \Lambda/R$. Так как, очевидно, $\overline{\Lambda}R \subset \operatorname{rad}\Gamma$, то $\overline{\Lambda}R = \operatorname{rad}\Gamma$ и Γ — локальный порядок. $R\Gamma = R\overline{\Lambda}R + R \subset \overline{\Lambda}R^2 + R = \Gamma R$, т. е. ΓR — двусторонний Γ-идеал, содержащийся в $\overline{\Lambda}R = \operatorname{rad}\Gamma$. По предложению 2.1, $\mu_\Lambda(\Gamma) = \mu_\Lambda(\Gamma/\Gamma R) \leqslant 2$. Но $I' = IR = \Gamma/\Lambda$, откуда $\mu_\Lambda(I') = \mu_\Lambda(\Gamma) - 1 \leqslant 1$.

Таким образом, остается проверить, что $\overline{\Lambda}$ — наследственный порядок. Очевидно, если $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}_1 \oplus \widetilde{\Lambda}_2$ и Λ_i — проекция Λ на алгебру $\widetilde{\Lambda}_i$, то $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 \oplus \overline{\Lambda}_2$. Поскольку Λ_i — также порядки конечного типа, то при доказательстве наследственности $\overline{\Lambda}$ алгебру $\widetilde{\Lambda}$ можно считать простой: $\widetilde{\Lambda} = M_n(D)$, где D — конечномерное сепарабельное тело над K. Кроме того, из ([13]) (теорема 1) следует, что $n \leqslant 3$.

Если $n=1$, то в $\widetilde{\Lambda}$ есть всего один максимальный порядок ([15]), поэтому $\overline{\Lambda}$ — максимальный, а значит, и наследственный порядок.

Если $n=2$, то, как показано в ([16]), Λ — бассов порядок, структура его неприводимых модулей линейна и $\overline{\Lambda}$ — наследственный порядок по лемме 2.3.

Пусть $n=3$, A — правильный неприводимый Λ-модуль представления, $\mathfrak{O}=E(A)$. Выберем в A и AR согласованные $\mathfrak{O}$-базисы:

$$A=[e, f, g], \quad AR=[\pi^i e,\ \pi^{i+k} f,\ \pi^{i+k+l} g],$$

где π — простой элемент кольца $\mathfrak{O}$, а i, k, l — натуральные числа, зависящие от A.

Предположим, что $k+l=0$. Тогда $AR=\pi^i A\simeq A$. Обозначим $\Gamma=\Lambda(A)$, $N=\Gamma R$. Тогда $\Gamma\simeq A^3$ как модуль и потому N — двусторонний Γ-идеал, содержащийся в $\operatorname{rad}\Gamma$. По предложению 2.1 $\mu_\Lambda(\Gamma/N)=3\mu_\Lambda(A/AR)\leqslant 3$, т. е. $\mu_\Lambda(A/AR)=1$; значит, $i=1$ и $AR=\pi A$ — единственный максимальный подмодуль в A. Но тогда всякий неприводимый $\overline{\Lambda}$-модуль представления изоморфен A и $\overline{\Lambda}=\Lambda(A)$ — максимальный порядок.

Пусть $k+l>0$. Тогда $A\supset B\supset AR$, где $B=[e, \pi^k f, \pi^{k+l} g]$. Кроме того, между A и πA лежит по крайней мере один модуль $C=\pi A+B$. Если $i>0$, то $AR\subset\pi A$ и потому $\mu_\Lambda(A/\pi A)>1$. Положим $\Gamma=\Lambda(A)$, $N=\operatorname{rad}\Gamma$. При изоморфизме $\Gamma\simeq A^3$ N переходит в πA^3. Значит, при $i>0$ $N\supset\Gamma R$ и $\mu_\Lambda(\Gamma/N)>3$, что противоречит предложению 2.1.

Итак, $i=0$. Предположим, что $k>0$. Тогда $C=[e, \pi f, \pi g]$ и длина фактормодуля A/C $l_\Lambda(A/C)=2l_\Lambda(C/\pi A)$, откуда $\mu_\Lambda(A/C)\geqslant 2$. Положим $\Gamma=\Lambda(A\oplus C)$. Легко проверить, что $\Gamma\simeq A^2\oplus C$ как модуль, и при этом изоморфизме $\operatorname{rad}\Gamma$ переходит в $C^2\oplus\pi A$. В силу леммы 2.2, $\pi A\supset CR$, поэтому $N=\operatorname{rad}\Gamma\supset\Gamma R$ и $\mu_\Lambda(\Gamma/N)=2\mu_\Lambda(A/C)+\mu_\Lambda(C/\pi A)\geqslant 5$, что противоречит предложению 2.1.

Таким образом, можно считать, что для любого правильного неприводимого Λ-модуля представления A $i=k=0$, т. е. $AR=[e, f, \pi^l g]$ и A/AR — циклический $\mathfrak{O}$-модуль. В силу леммы 2.2, в A тогда есть ровно один максимальный правильный подмодуль и, по лемме 2.3, $\overline{\Lambda}$ наследственно.

§ 3. Кольцо множителей радикала

Перейдем к доказательству достаточности. Прежде всего отметим, что если локальный порядок Λ горенштейнов ([17]) (§ 3), то, как следует из ([9]) (§ 2), у него есть единственное минимальное надкольцо Γ — правое и левое кольцо множителей радикала — и всякий Λ-модуль представления имеет вид $\Lambda^n\oplus X$, где X есть Γ-модуль. Очевидно, если Λ удовлетворяет условиям (1)—(3) теоремы 1.2, то и Γ удовлетворяет этим условиям. Поэтому можно ограничиться рассмотрением негоренштейновых порядков. Негоренштейновы порядки, удовлетворяющие условиям (1)—(3) теоремы 1.2, мы будем для краткости называть хорошими.

Напомним, что весом Λ-модуля представления A ([9]) (§ 2) называется число

$$\rho_\Lambda(A)=\frac{\tilde{l}(P(A))}{\tilde{l}(A)},$$

где $\tilde{l}(A)$ — длина $\tilde{\Lambda}$-модуля $\tilde{A}$ (рациональная длина модуля A), $P(A)$ —

проективное накрытие Λ-модуля A. Весом порядка Λ называется число

$$\rho^*(\Lambda) = \max \rho_\Lambda(A),$$

где A пробегает все Λ-модули представлений. Как показано в ([9]) (следствие 2.3),

$$\rho^*(\Lambda) = \max \widetilde{l}(P(A)),$$

где A пробегает правильные неприводимые Λ-модули представлений.

Будем говорить, что Λ — порядок веса 2, если $\rho^*(\Lambda) \leqslant 2$. Таким образом, наследственные порядки, для которых $\rho^*(\Lambda) = 1$, мы также будем считать порядками веса 2.

ЛЕММА 3.1. *Пусть Λ — хороший порядок, $R = \operatorname{rad}\Lambda$, $\Gamma(\Gamma')$ — кольцо множителей R как правого (левого) Λ-модуля. Тогда Γ и Γ' — порядки веса 2, причем R как правый модуль изоморфен Γ, а как левый — Γ'.*

Доказательство. Наследственный порядок $\overline{\Lambda}$ распадается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$\overline{\Lambda} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_s.$$

Поскольку Λ — локальный порядок, $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) = \mu_\Lambda(A_1) + \ldots + \mu_\Lambda(A_s)$, и из неравенства $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) \leqslant 3$ следует, что $s \leqslant 3$. Поэтому алгебра $\widetilde{\Lambda}$ может быть только следующих типов:

а) тело D;

б) прямая сумма двух тел $D_1 \oplus D_2$;

в) прямая сумма трех тел $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$;

г) $M_2(D)$;

д) $M_3(D)$;

е) $M_2(D_1) \oplus D_2$.

Разберем, как могут быть устроены правильные Λ-модули во всех этих случаях.

а) $\widetilde{\Lambda} = D$. Единственный правильный модуль — это $\overline{\Lambda}$. Если $\mu_1(\overline{\Lambda}) \leqslant 2$, то Λ бассов ([17]) (предложение 12.3), поэтому $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) = 3$. Но если $\widetilde{\Lambda} = D$, то для неприводимых Λ-модулей $\mu_\Lambda(X) = \rho_\Lambda(X)$, значит, для любого Λ-идеала I $\mu_\Lambda(I) = \rho_\Lambda(I) \leqslant 3$.

б) $\widetilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$. В этом случае есть два правильных модуля, A_1 и A_2, причем $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2$, $\widetilde{A}_1 = D_1$, $\widetilde{A}_2 = D_2$. Снова если $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) \leqslant 2$, то Λ бассов ([17]) (предложение 12.3), поэтому $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) = 3$ и можно считать $\mu_\Lambda(A_1) = 1$, $\mu_\Lambda(A_2) = 2$. Тогда из ([9]) (§ 2) следует, что если B — неприводимый Λ-модуль и $\widetilde{B} = D_1$, то $\mu_\Lambda(B) = 1$, а если $\widetilde{B} = D_2$, то $\mu_\Lambda(B) \leqslant 2$. Поэтому и здесь для любого Λ-идеала I $\mu_\Lambda(I) \leqslant 3$.

в) $\widetilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$, $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ и $\mu_\Lambda(A_i) = 1$. Но тогда A_i есть проекция Λ на D_i и A_i — вообще все неприводимые Λ-модули представлений. Поэтому снова $\mu_\Lambda(I) \leqslant 3$ для любого идеала I.

г) $\widetilde{\Lambda} = M_2(D)$, $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2$. Если $A_1 \simeq A_2$, то это единственный правильный Λ-модуль, причем $\mu_\Lambda(A_1) = 1$, т. е. $A_1 R$ — единственный максимальный подмодуль в A_1. Из леммы 2.2 следует, что тогда $A_1R \simeq A_1$ и A_1 — вообще единственный неприводимый Λ-модуль представления.

Если $A_1 \not\simeq A_2$, то у Λ два правильных модуля: A_1 и A_2, поэтому $A_1R \simeq A_2$, $A_2R \simeq A_1$, откуда следует, что $l_\Lambda(A_1/A_1R) = l_\Lambda(A_2/A_2R)$, а значит, $\mu_\Lambda(A_1) = \mu_\Lambda(A_2) = 1$ и других неприводимых модулей нет. В обоих случаях порядок Λ бассов ([17]) (предложение 12.4). Таким образом, в $M_2(D)$ хороших порядков вообще нет.

д) $\tilde{\Lambda} = M_3(D)$, $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, $\mu_\Lambda(A_i) = 1$, значит, структура неприводимых Λ-модулей линейна и $\dim_k(A_1/A_1R) = \dim_k(A_2/A_2R) = \dim_k(A_3/A_3R)$. Но тогда, как легко заметить, либо все A_i изоморфны, либо они попарно неизоморфны. Кроме того, все неприводимые модули — это A_i; они цикличны и потому $\mu_\Lambda(I) \leqslant 3$ для любого идеала I.

е) $\tilde{\Lambda} = M_2(D_1) \oplus D_2$, $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, $\mu_\Lambda(A_i) = 1$. Здесь снова A_i — все неприводимые модули и потому $\mu_\Lambda(I) \leqslant 3$ для любого идеала I. Кроме того, проекция Λ на $M_2(D_1)$ бассова, а на D_2 — максимальна.

Вывод: во всех случаях $\mu_\Lambda(I) \leqslant 3$ для любого идеала I. Кроме того, нетрудно видеть, что во всех случаях $\overline{\Lambda}R \simeq \overline{\Lambda}$ как правый Λ-модуль.

Пусть теперь Ω — надкольцо Λ, содержащееся в $\overline{\Lambda}$. Вычислим $\mu_\Lambda(\Omega R + \Lambda/\Lambda) = \mu_\Lambda(\Omega R/\Lambda \cap \Omega R)$. Так как $\Lambda \cap \Omega R \neq \Lambda$, то $\Lambda \cap \Omega R = R$ и $\mu_\Lambda(\Omega R + \Lambda/\Lambda) = \mu_\Lambda(\Omega R/R)$. Воспользуемся теперь леммой Накаяма, точнее, равенством $\mu_\Lambda(X) = \mu_\Lambda(X/XR)$:

$$\mu_\Lambda(\Omega R/R) = \mu_\Lambda(\Omega R/\Omega R^2 + R) = \mu_\Lambda(\Omega R/\Omega R^2) -$$
$$- \mu_\Lambda(\Omega R^2 + R/\Omega R^2) = \mu_\Lambda(\Omega R/\Omega R^2) - \mu_\Lambda(R/R \cap \Omega R^2).$$

Подставим сюда $\Omega = \overline{\Lambda}$ и учтем, что $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}R/\overline{\Lambda}R^2) = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}R) = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) = 3$. Тогда получим:

$$\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}R + \Lambda/\Lambda) = 3 - \mu_\Lambda(R/R \cap \overline{\Lambda}R^2).$$

Но $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}R + \Lambda/\Lambda) = \mu_\Lambda(I') \leqslant 1$, откуда $\mu_\Lambda(R/R \cap \overline{\Lambda}R^2) \geqslant 2$. Так как $\Omega R^2 \subset \overline{\Lambda}R^2$, то и $\mu_\Lambda(R/R \cap \Omega R^2) \geqslant 2$ для любого $\Omega \subset \overline{\Lambda}$. С другой стороны, $\mu_\Lambda(\Lambda R/\Omega R^2) = \mu_\Lambda(\Omega R) \leqslant 3$, откуда $\mu_\Lambda(\Omega R + \Lambda/\Lambda) \leqslant 1$.

Итак, $\Omega R + \Lambda/\Lambda$ — циклический Λ-модуль, значит, у него есть единственный максимальный подмодуль $\Omega R^2 + \Lambda/\Lambda$. Предположим, что ΩR — двусторонний Ω-идеал, т. е. $R\Omega \subset \Omega R$. Тогда $\Omega_1 = \Omega R + \Lambda$ — также надкольцо Λ, причем $\Omega R^2 + \Lambda = \Omega_1 R + \Lambda$. Поэтому $\Omega R^2 + \Lambda/\Lambda = \Omega_1 R + \Lambda/\Lambda$ — также циклический Λ-модуль. Кроме того, легко проверить, что при этих предположениях $R\Omega_1 \subset \Omega_1 R$, значит, наше рассуждение можно продолжить, и потому всякий подмодуль в $\Omega R + \Lambda/\Lambda$ цикличен.

В частности, полагая $\Omega = \overline{\Lambda}$, получаем, что всякий подмодуль в $\overline{\Lambda}R + \Lambda/\Lambda$ цикличен.

Рассмотрим теперь левое кольцо множителей радикала Γ'. Оно является, очевидно, суммой минимальных правых надмодулей Λ. Если $\Gamma' \subset \overline{\Lambda}R + \Lambda$, то Γ'/Λ — циклический Λ-модуль, значит, у Λ один минимальный надмодуль и из ([9]) (предложение 2.8) следует, что Λ — инъективный Λ-модуль представления, т. е. Λ — горенштейнов порядок и не является хорошим.

Итак, $\Gamma' \not\subset \overline{\Lambda}R + \Lambda$. Но тогда, так как $\mu_\Lambda(\overline{\Lambda}/\overline{\Lambda}R + \Lambda) = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}/\Lambda) = 2$, $\overline{\Lambda}R + \Gamma'$ — максимальный подмодуль в $\overline{\Lambda}$ и потому $\mu_{\Gamma'}(\overline{\Lambda}) \leqslant 2$. В случаях а), б), в) из ([17]) (§ 6) следует, что Γ' — бассов порядок. Тогда $R \simeq \Gamma'$ как левый модуль, т. е. $R = \Gamma' r$, и его правое кольцо множителей Γ есть $r^{-1}\Gamma' r \simeq \Gamma'$. Следовательно, Γ бассово и $R = r\Gamma \simeq \Gamma$. В случаях д), е), так как $\overline{\Lambda} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, Γ' не может быть локальным. Поэтому Γ' разлагается в прямую сумму модулей рациональной длины 1 и 2 (одночленных и двучленных). Так как структура неприводимых Γ'-модулей линейна, отсюда следует, что $\rho^*(\Gamma') \leqslant 2$. Тогда R разложим как левый модуль (у Γ' нет неразложимых модулей рациональной длины 3 — см. ([9]), § 4), поэтому его правое кольцо множителей Γ также разложимо и потому $\rho^*(\Gamma) \leqslant 2$. Если R как правый модуль вполне разложим, то Γ' наследственно, значит, $\Gamma' = \overline{\Lambda} = \Gamma$ и $R \simeq \overline{\Lambda}$, так как $\overline{\Lambda}R \simeq \overline{\Lambda}$.

Предположим, что $R = R_1 \oplus R_2$, где R_2 — неразложимый двучленный модуль. В этом случае $\Gamma = P_1 \oplus P_2$, где P_2 — неразложимый двучленный, а P_1 — правильный неприводимый модуль. Такие порядки веса 2 описаны в ([9]) (§ 5). У каждого из них есть ровно один двучленный неразложимый модуль, поэтому $R_2 \simeq P_2$. Остается доказать, что $R_1 \simeq P_1$. Но из-за линейности структуры неприводимых модулей $P_1 = AR$, где A — минимальный надмодуль P_1; значит, существует точная последовательность

$$R^n \to P_1 \to 0$$

и $R^n \simeq P_1 \oplus Y$. Ввиду однозначности разложения ([18]), $R_1 \simeq P_1$ и лемма полностью доказана.

С л е д с т в и е 3.2. *Левое и правое кольца множителей радикала хорошего порядка сопряжены и потому изоморфны.*

В дальнейшем мы всюду будем обозначать правое кольцо множителей радикала через Γ, а левое — через Γ'. Очевидно, Γ и Γ' содержатся в $\overline{\Lambda}$.

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если порядок* Γ *бассов, то* $\Gamma = \Gamma'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что у $\overline{\Lambda}$ нет сопряженных порядков, содержащих Λ, кроме него самого. Поэтому если $\Gamma = \overline{\Lambda}$, то $\Gamma = \Gamma'$ по следствию 3.2. Будем считать, что $\Gamma \neq \overline{\Lambda}$. Тогда из описания бассовых порядков ([17]) следует, что $\widetilde{\Lambda} \neq M_3(D)$ и если L — такой Γ-модуль, что $\Gamma \subset L \subset \overline{\Lambda}$, то L — надкольцо Γ. В частности, $\Gamma\Gamma'$ — надкольцо Γ, причем $\Gamma\Gamma' R = \Gamma R$, откуда $\mu_\Lambda(\Gamma\Gamma'/\Gamma R) = \mu_\Lambda(\Gamma\Gamma') \leqslant 3$. Предположим, что $\Gamma\Gamma' \neq \Gamma$. Тогда $\mu_\Lambda(\Gamma\Gamma'/\Gamma R) = \mu_\Lambda(\Gamma\Gamma'/\Gamma) + \mu_\Lambda(\Gamma/\Gamma R)$. Но $\mu_\Lambda(\Gamma/\Gamma R) = \mu_\Lambda(\Gamma) \geqslant 2$, так как $\Gamma \neq \Lambda$. Следовательно, $\mu_\Lambda(\Gamma/\Gamma R) = 2$ и $\mu_\Lambda(\Gamma\Gamma'/\Gamma) = 1$. Поэтому $\Gamma\Gamma' = \Gamma + \Gamma' = \Gamma'\Gamma$, откуда $\Gamma'\Gamma R = \Gamma R$. Аналогично, $R\Gamma'\Gamma = R\Gamma'$. Итак, ΓR и $R\Gamma'$ — два минимальных Γ-надмодуля модуля $R \simeq \Gamma$, что невозможно, так как Γ горенштейново. Значит, $\Gamma R = R\Gamma'$. Но тогда $R\Gamma' = R\Gamma\Gamma' = r\Gamma\Gamma'$, так как $R = r\Gamma$. Поэтому $\Gamma R = R\Gamma' \simeq \Gamma\Gamma'$ как модуль. Но $\Gamma R \subset \operatorname{rad}\Gamma$ и

$\Gamma R \subset \operatorname{rad}\Gamma'$, а $\operatorname{rad}\Gamma$ и $\operatorname{rad}\Gamma'$ есть $\Gamma\Gamma'$-модули ([17]). Отсюда следует, что $\operatorname{rad}\Gamma = \operatorname{rad}\Gamma' = \Gamma' \cap \Gamma$, что невозможно. Предложение доказано.

Приведем пример, показывающий, что если порядок Γ не бассов, то возможно $\Gamma' \neq \Gamma$. Обозначим через π простой элемент кольца $\mathfrak{o}$ и рассмотрим порядок Λ в $M_3(K)$ вида:

$$\begin{pmatrix} \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{o}E.$$

Легко проверить, что Λ — хороший порядок, но

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}E,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}E.$$

Замечание. Кажется весьма вероятным, что если Λ — порядок конечного типа (не обязательно примарный), у которого нет биективных модулей, то кольцо множителей его радикала всегда есть порядок веса 2.

С другой стороны, как показывает следующий пример, радикал не всегда является проективным модулем над своим кольцом множителей: Λ — порядок в $M_3(K)$ вида

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \pi^2\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi^2\mathfrak{o} \\ \pi^2\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\cdot E.$$

Его радикал R имеет вид

$$\begin{pmatrix} \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \pi^2\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi^2\mathfrak{o} \\ \pi^2\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Правое и левое кольца множителей R совпадают и равны:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \pi^{-1}\mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \pi^2\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \\ \pi\mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \pi\mathfrak{o} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}E.$$

Γ есть порядок веса 2. Исходя из этого, нетрудно проверить, что Λ — конечного типа. Но, как видно, R не является проективным Γ-модулем.

§ 4. Матричные задачи

Для вычисления представлений хороших порядков нам понадобятся некоторые сведения о матричных задачах (см. ([10]), ([11])). Напомним определение матричной задачи, данное в ([11]).

Пусть A — некоторое кольцо, V—A-бимодуль. Для всякого конечно-порожденного левого проективного A-модуля P обозначим $A_P=\mathrm{Hom}_A(P,P)$, $V_P=P^*\otimes_A V\otimes_A P$, где $P^*=\mathrm{Hom}_A(P,A)$. Элементы V_P называются матрицами с коэффициентами из V, или V-матрицами. Две матрицы X и Y называются подобными, если в A_P есть такой обратимый элемент S, что $Y=SXS^{-1}$. Матричная задача (A, V) — это задача классификации V-матриц с точностью до подобия.

Если $P=P_1\oplus P_2$, то существует естественное вложение $V_{P_1}\oplus V_{P_2}\to V_P$. Образ пары (X_1, X_2) при этом вложении называется прямой суммой матриц X_1 и X_2 и обозначается $X_1\oplus X_2$. Если матрицу X нельзя представить в виде прямой суммы, то она называется неразложимой. Говорят, что задача (A, V) конечного типа, если существует лишь конечное число неразложимых V-матриц (с точностью до подобия). В противном случае говорят, что эта задача бесконечного типа.

Если A — конечномерная алгебра над полем k, а V — алгебра-бимодуль, конечномерный над k, то задача (A, V) называется конечномерной задачей над полем k.

Пусть k' — конечномерное расширение поля k. Обозначим $A'=A\otimes_k k'$, $V'=V\otimes_k k'$. Если (A, V) — конечномерная задача над k, то (A', V') — конечномерная задача над k'.

Предложение 4.1. *Если задача (A', V') конечного типа, то и задача (A, V) конечного типа. Если расширение k'/k сепарабельно, а задача (A, V) конечного типа, то и задача (A', V') конечного типа.*

Доказательство. Для произвольного левого A-модуля B обозначим $B'=k'\otimes_k B\simeq A'\otimes_A B$. Тогда если C — правый A'-модуль, то

$$C\otimes_{A'} B'\simeq C\otimes_{A'} A'\otimes_A B\simeq C\otimes_A B.$$

Поэтому если P — проективный A-модуль, то

$$V'_{P'}=\hat{P}'\otimes_{A'} V'\otimes_{A'} P'\simeq \hat{P}'\otimes_{A'} V'\otimes_A P\simeq P^*\otimes_A V'\otimes_A P\simeq V_P\otimes_k k',$$

где $\hat{P}'=\mathrm{Hom}_{A'}(P', A')\simeq \mathrm{Hom}_A(P, A')\simeq \mathrm{Hom}_A(P, A)\otimes_k k'=P^{*\prime}$. Обозначим через F естественное вложение $V_P=V_P\otimes 1\to V_P\otimes_k k'=V'_{P'}$. Пусть теперь Q — некоторый проективный A'-модуль. Тогда $V'\otimes_{A'} Q\simeq V\otimes_A Q'$ и существует естественное вложение

$$V'_Q=\hat{Q}\otimes_{A'} V'\otimes_{A'} Q\simeq \mathrm{Hom}_{A'}(Q, V\otimes_A Q)\to \mathrm{Hom}_A(Q, V\otimes_A Q)\simeq$$
$$\simeq V_Q=Q^*\otimes_A V\otimes_A Q\simeq \hat{Q}'\otimes_{A'} V\otimes_A Q\simeq V'_Q\otimes_k k'.$$

Обозначим это вложение через G.

Как A-модуль, $P'\simeq P^n$, где $n=(k':k)$, и легко видеть, что при этом изоморфизме $GF(X)\in V_{P'}$ переходит в $X^n\in V_{P^n}$. Предположим, что задача (A', V') конечного типа и $Y_1, \ldots, Y_s$ — все неразложимые V'-матрицы. Тогда $F(X)$ подобно $Y_1^{k_1}\oplus\ldots\oplus Y_s^{k_s}$, и если X — неразложимая V-матрица, то из однозначности разложения ([11]) следует, что X — прямое слагаемое одной из матриц $G(Y_i)$. Поскольку у каждого $G(Y_i)$ есть лишь конечное число неразложимых слагаемых, задача (A, V) — конечного типа.

Пусть теперь k' — сепарабельное расширение поля k. Тогда точная последовательность k'-бимодулей $k'\otimes_k k'\to k'\to 0$ расщепляется ([19]); тем самым индуцируется расщепление $Q'\simeq Q\oplus\overline{Q}$, при котором, как нетрудно проверить, матрица $FG(Y)$ также разлагается в прямую сумму $Y\oplus\overline{Y}$. Поэтому то же рассуждение, что и выше, показывает, что если (A, V) — задача конечного типа, то и (A', V') — конечного типа.

Напомним, как вычисление модулей сводится к матричным задачам. Предположим сначала, что алгебра $\widetilde{\Lambda}$ разложима: $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Lambda}_1\oplus\widetilde{\Lambda}_2$, и пусть Λ_i — проекция Λ на $\widetilde{\Lambda}_i$. Если C — некоторый Λ-модуль представления, то существует точная последовательность

$$0\to C_1\to C\to C_2\to 0, \tag{1}$$

где C_i есть Λ_i-модуль. Заметим, что если Λ — хороший порядок, то из рассмотрений § 3 следует, что Λ_1 можно считать бассовым, а Λ_2 — максимальным, причем $\widetilde{\Lambda}_2$ — тело. Тогда $C_2\simeq\Lambda_2^n$, а $C_1\simeq B_1^{m_1}\oplus\ldots\oplus B_s^{m_s}$, где B_i — неразложимые прямые слагаемые надколец порядка Λ_1 (их конечное число) ([17]). Точной последовательности (1) соответствует элемент $\alpha\in\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$, причем легко видеть, что два элемента $\alpha,\beta\in\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$ определяют изоморфные модули тогда и только тогда, когда существуют автоморфизмы f_i модулей C_i такие, что $\beta=f_1\alpha f_2$. Таким образом, описание Λ-модулей представлений сводится к операторному изучению бифунктора $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$ и, следовательно, к матричной задаче (см. ([10]), ([11])).

В случае, если алгебра $\widetilde{\Lambda}$ не обязательно разложима, рассмотрим радикал R порядка Λ и его правое кольцо множителей Γ. Для Λ-модуля представления C запишем точную последовательность

$$0\to CR\to C\to\overline{C}\to 0, \tag{2}$$

где $\overline{C}=C/CR$. Здесь $\overline{C}$ — векторное пространство над телом $T=\Lambda/R$, поэтому $\overline{C}\simeq T^n$; CR есть Γ-модуль. Поскольку Γ — порядок веса 2, $CR\simeq B_1^{m_1}\oplus\ldots\oplus B_s^{m_s}$, где B_i — прямые слагаемые надколец Γ ([9]). Обозначим $C_2=\overline{C}$, $C_1=CR$. Тогда, как и выше, описание Λ-модулей сводится к операторному изучению бифунктора $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$, т. е. к матричной задаче. Однако, хотя по любому элементу $\alpha\in\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$ можно построить точную последовательность

$$0\to C_1\xrightarrow{\varphi}C\xrightarrow{\psi}C_2\to 0, \tag{3}$$

совсем не обязательно при этом, чтобы $\operatorname{Im}\varphi=CR$. Действительно, точную последовательность (3) можно включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R^n & \to & \Lambda^n & \to & T^n & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\eta} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & C_1 & \xrightarrow{\varphi} & C & \xrightarrow{\psi} & C_2 & \to & 0
\end{array}$$

откуда видно, что $\operatorname{Im}\varphi=CR$ тогда и только тогда, когда η — эпиморфизм.

Учитывая, что $R = r\Gamma$ и потому $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, C_1) \simeq C_1/C_1 r$, а $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1) \simeq \simeq (C_1/C_1 r)^n$, мы видим, что $\operatorname{Im}\varphi = CR$ тогда и только тогда, когда элементу α соответствует такой элемент $(x_1, \ldots, x_n) \in (C_1/C_1 r)^n$, что прообразы $x_1, \ldots, x_n$ являются образующими C_1 как правого Γ-модуля. Это условие мы будем называть «условием невырожденности».

Нам будет удобно записывать элементы $\alpha \in \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C_2, C_1)$ в виде матриц, как это сделано в ([11]). Обозначим группу $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, B_i)$ или $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T, B_i)$ через E_i. Тогда α соответствует блочная матрица

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где X_i — матрица размера $m_i \times n$ с коэффициентами из E_i. Обозначим также $H_{ij} = \operatorname{Hom}_\Lambda(B_i, B_j)$, а Λ_2 или T обозначим через H. Тогда, записывая автоморфизмы C_1 и C_2 в виде матриц [см. ([11])], нетрудно проверить, что две матрицы X и Y вида (4) определяют изоморфные модули тогда и только тогда, когда их можно перевести друг в друга с помощью последовательности преобразований следующих трех типов:

а) умножение строки (столбца) матрицы $X_i(X)$ на обратимый элемент кольца $H_{ii}(H)$;

б) прибавление к столбцу матрицы X другого столбца, умноженного на элемент H;

в) прибавление к строке матрицы X_j строки матрицы X_i, умноженной на элемент H_{ij} (конечно, если $i=j$, то эти строки должны быть различны).

Преобразования типов а) — в) будем называть элементарными.

Итак, описание Λ-модулей представлений сводится к приведению матриц вида (4) (быть может, с некоторыми условиями невырожденности) элементарными преобразованиями. При этом нужно разобрать следующие случаи:

I. $\widetilde{\Lambda} = D$;
II. $\widetilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$;
III. $\widetilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$;
IV. $\widetilde{\Lambda} = M_3(D)$;
V. $\widetilde{\Lambda} = M_2(D_1) \oplus D_2$,

где D, D_i — конечномерные тела над K.

В дальнейшем максимальный порядок в $D(D_i)$ мы будем обозначать через $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_i)$, а его простой элемент — через $\pi(\pi_i)$.

§ 5. Представления хороших порядков в случаях I—III

В случаях I — III постановка и решение матричных задач почти не отличаются от коммутативного случая, разобранного в ([5]) (см. также ([6]), гл. X). Поэтому мы ограничимся только изложением тех пунктов доказательства, в которые необходимо внести изменения, вызванные некоммутативностью.

Пусть $\widetilde{\Lambda}=D$. Тогда Γ — бассов порядок и, по предложению 3.3, R — двусторонний Γ-идеал. $\Gamma/R=\mathfrak{A}$ есть k-алгебра, содержащая подтело $T=\Lambda/R$, причем $\dim_T\mathfrak{A}=\mu_\Lambda(\Gamma/R)=\mu_\Lambda(\Gamma)=3$. Отметим, что здесь $\overline{\Lambda}=\mathfrak{D}$.

Предложение 5.1 (ср. ([5]), предл. 3.4). *Если Λ — хороший порядок и $\widetilde{\Lambda}$ есть тело, то возможен один из трех случаев:*

а) $\Gamma=\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$ — *тело*;

б) $\Gamma=\mathfrak{D}, \mathfrak{A}=T+aT+a^2T=T+Ta+Ta^2$; $\quad a^3=0$.

в) Γ — *максимальное бассово подкольцо в* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}=T+aT+a^2T==T+Ta+Ta^2$; $a^3=0$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ — тело, то $R=r\Gamma$ — единственный максимальный идеал в Γ, откуда следует, что всякий Γ-идеал главный, т. е. Γ — максимальный порядок.

Пусть $\mathfrak{A}$ — не тело; $N=\operatorname{rad}\Gamma\neq 0$, поэтому $\dim_T N=2$, $N^3=0$ и $\mathfrak{A}/N\simeq T$. Минимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}$ имеют вид S/R, где S — минимальный Γ-надмодуль R. Поскольку Γ горенштейново, а $R\simeq\Gamma$, у R есть один минимальный надмодуль, а в алгебре $\mathfrak{A}$ — один минимальный идеал. Поэтому $N^2\neq 0$ и $\mathfrak{A}\supset N\supset N^2\supset 0$ — единственный композиционный ряд в $\mathfrak{A}$. Если $a\in N\setminus N^2$, то $a^2\neq 0$, значит, $N^2=a^2T=Ta^2$ и $[1, a, a^2]$ — базис $\mathfrak{A}$ над T (как правый, так и левый).

Обозначим через J прообраз N в Γ (очевидно, $J=\operatorname{rad}\Gamma$). Если $J\simeq\Gamma$, то $\Gamma=\mathfrak{D}$. Пусть $J\not\simeq\Gamma$. Тогда у Γ есть одно минимальное надкольцо Δ — правое и левое кольцо множителей J ([17]) (предл. 10.3), причем $J\simeq\Delta$. Обозначим через S минимальный надмодуль R. Из того, что $R\simeq\Gamma$, следует, что $S\simeq\Delta$. Но S — максимальный подмодуль в $J\simeq\Delta$. Поэтому $\Delta=\mathfrak{D}$. Изоморфизм $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}R\simeq\mathfrak{A}$ следует из того, что $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}R$ содержит подтело, изоморфное T, и структура идеалов в $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}R$ линейна.

Вычислим группы E_i и элементарные преобразования матриц. Пусть $R=r\Gamma=\Gamma r$. Тогда

$$\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(T, \Gamma)\cong\Gamma/\Gamma r=\mathfrak{A},$$

а в случае в)

$$\bar{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^1_\Lambda(T, \mathfrak{D})\simeq\mathfrak{D}/\mathfrak{D}r=\mathfrak{D}/\mathfrak{D}R\simeq\mathfrak{A}.$$

Будем считать, что $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}R$ содержит T и имеет T-базис $[1', a', a'^2]$. Легко видеть, что в случаях б) и в) условия невырожденности и элементарные преобразования будут в точности такие же, как в работе ([5]) (случаи 2 и 3). Поэтому матричные задачи в этих случаях решаются точно так же. Вместо нормальной формы Фробениуса нужно воспользоваться нормальной формой матрицы полулинейного преобразования над телом T (см. ([20]), гл. 3, § 12).

В случае а) получается задача приведения матрицы с коэффициентами из тела $\mathfrak{A}$ элементарными преобразованиями строк над $\mathfrak{A}$, а столбцов — над T, причем строки этой матрицы должны быть линейно независимы (над $\mathfrak{A}$). Обозначим центр тела T через C, а центр $\mathfrak{A}$ — через L.

Предложение 5.2. *Если* $\dim_T\mathfrak{A}=3$, *то возможны два случая*:

1) $\mathfrak{A}=T(\varepsilon)$, *где* $\varepsilon\in L$ *и удовлетворяет кубическому уравнению с коэффициентами из* T;

2) $C\supset L$, $\dim_L C=3$.

Доказательство. Если $C\supset L$, то $\dim_L \mathfrak{A}=\dim_T \mathfrak{A}\times\dim_C T\dim_L C$. Учитывая, что $\dim_L \mathfrak{A}$ и $\dim_C T$ — квадраты целых чисел, мы видим, что $\dim_L C=\dim_T \mathfrak{A}=3$.

Если $C\not\supset L$, выберем $\varepsilon\in L\setminus C$. Тогда $\mathfrak{A}\supset T(\varepsilon)\supset T$, откуда $\mathfrak{A}=T(\varepsilon)$ и ε — корень кубического уравнения над T.

В первом случае матричная задача решается точно так же, как в ([5]) (случай 1).

Во втором случае мы получаем конечномерную матричную задачу над полем L. Обозначим через $\overline{L}$ максимальное подполе T, содержащее C. Тогда $\dim_C T=(\dim_C\overline{L})^2$, откуда $\dim_L\mathfrak{A}=(\dim_L\overline{L})^2$, т. е. $\overline{L}$ — максимальное подполе в $\mathfrak{A}$ и потому — поле расщепления для T и для $\mathfrak{A}$ ([20]) (гл. V). Обозначим через L' нормальное над C расширение $\overline{L}$. Тогда после тензорного умножения на L' тело $\mathfrak{A}$ превратится в матричную алгебру $M_{3t}(L')$, где $t^2=\dim_C T$, а $T\otimes_L L'\simeq T\otimes_C C\otimes_L L'\simeq M_t(L')^3$. Наша матричная задача примет следующий вид: приводятся три матрицы над полем L' элементарными преобразованиями над этим полем, причем над столбцами элементарные преобразования выполняются одновременно. Эта задача (триада) также рассмотрена в ([5]) (случай 6 при $d=1$).

Поскольку все получившиеся задачи — конечного типа, хорошие порядки в теле имеют конечное число неразложимых представлений.

Пусть $\widetilde{\Lambda}=D_1\oplus D_2$, $\overline{\Lambda}=\mathfrak{O}_1\oplus\mathfrak{O}_2$. Обозначим через Λ_i проекцию Λ на D_i. Как показано в § 3, можно считать $\Lambda_2=\mathfrak{O}_2$, Λ_1 — бассов порядок в D_1. Нам нужно вычислить $E_i=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, B_i)$, где B_i — надкольца Λ_1. Это вычисление проводится аналогично ([5]) (случаи 4, 5). Надкольца Λ_1 линейно упорядочены ([17]) (§ 6): $\Lambda_1=B_0\subset B_1\subset\ldots\subset B_s=\mathfrak{O}_1$.

Обозначим $J=\Lambda\cap D_1$. Очевидно, $J\subset\operatorname{rad}\Lambda_1$. Γ — бассов порядок, поэтому либо его проекции на D_1 и D_2 максимальны, либо $\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2$. В последнем случае $R=R\Gamma_1\oplus R\Gamma_2$ и $\operatorname{rad}\Lambda_1=R\Gamma_1\subset J$.

Предположим, что $J=\operatorname{rad}\Lambda_1$. Тогда из точной последовательности $0\to J\to\Lambda\to\Lambda_2\to 0$ нетрудно вычислить, что $E_0\simeq T$ (нам будет удобно писать $E_0=a_0T$), при $0<i<s$

$$E_i=T+Ta_i=T+a_iT,\quad a_i^2=0,$$

E_s — либо тело, причем $\dim_T E_s=2$ и потому $E_s=T(a_s)$ (a_s удовлетворяет квадратному уравнению), либо $E_s=T+Ta_s=T+a_sT$, $a_s^2=0$. Гомоморфизмы $B_i\to B_j$ индуцируют отображения $\varphi_{ij}: E_i\to E_j$, причем при $i<j$ $\varphi_{ij}(1)=1$, $\varphi_{ij}(a_i)=0$, а при $i>j$ $\varphi_{ij}(1)=0$, $\varphi_{ij}(a_i)=a_j$.

Полученная задача решена в ([5]) (случай 4). Она конечного типа.

Если $J\neq\operatorname{rad}\Lambda_1$, то, дословно повторяя рассуждения из ([5]), мы получим ту же задачу, что и в ([5]) (случай 5). Она также конечного типа.

Случай $\widetilde{\Lambda}=D_1\oplus D_2\oplus D_3$ вполне аналогичен ([5]) (случай 6). Здесь также получаются задачи конечного типа.

Итак, в случаях I — III все хорошие порядки конечного типа.

§ 6. Представления хороших порядков в случае IV

Пусть $\widetilde{\Lambda}=M_3(D)$. Тогда структура неприводимых Λ-модулей линейна и если Γ вполне разложимо, то оно наследственно, т. е. $\Gamma=\overline{\Lambda}$ (см. § 3). Если Γ не вполне разложимо, то у него есть три неприводимых модуля и из ([9]) (§ 5) следует, что Γ изоморфно порядку вида

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \mathfrak{D} \\ \pi\mathfrak{D} & \pi\mathfrak{D} & \pi\mathfrak{D} \\ \pi\mathfrak{D} & \mathfrak{D} & \pi\mathfrak{D} \end{pmatrix} + \mathfrak{D}E. \tag{1}$$

Случай 1. $\Gamma=\overline{\Lambda}$ — максимальный порядок. Тогда у Γ есть всего один неразложимый и неприводимый модуль представления B, причем $B/BR\simeq T$ как Λ-модуль, а $\operatorname{Hom}_\Lambda(B,B)\simeq\mathfrak{D}$. Кроме того, $\pi B\subset BR$ и потому B/BR есть левый модуль над телом $S=\mathfrak{D}/\pi\mathfrak{D}$. Но $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,B)\simeq B/BR$ (см. § 4). Отождествляя B/BR с T, мы получаем вложение S в T, причем $\dim_S T=3$. Матричная задача имеет такой вид: одна матрица с коэффициентами из T приводится элементарными преобразованиями строк над S, а столбцов — над T. С точностью до транспонирования получается та же задача, что и в § 5 (случай Ia)), которая, как было показано, конечного типа.

Случай 2. $\Gamma=\overline{\Lambda}$ — немаксимальный порядок. Тогда у Γ есть три неразложимых (и неприводимых) модуля B_1, B_2, B_3, причем $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,B_i)\simeq B_i/B_iR\simeq T$, $\operatorname{Hom}_\Lambda(B_i,B_i)\simeq\mathfrak{D}$, $\pi B_i\subset B_iR$ и $\mathfrak{D}/\pi\mathfrak{D}\simeq T$. Получаем задачу приведения трех матриц с общими столбцами (триаду), т. е. задачу конечного типа.

Случай 3. Γ — порядок вида (1). У него есть 4 неразложимых представления: три неприводимых,

$$B_1=(\mathfrak{D},\mathfrak{D},\mathfrak{D}),$$
$$B_2=(\pi\mathfrak{D},\mathfrak{D},\mathfrak{D}),$$
$$B_3=(\pi\mathfrak{D},\mathfrak{D},\pi\mathfrak{D}),$$

и одно двучленное: $B_0=(e_{22}+e_{33})\Gamma$. Вычислим $E_i=\operatorname{Ext}^1_\Lambda(T,B_i)\simeq B_i/B_ir$, где $R=r\Gamma$. Поскольку $l_\Lambda(\Gamma/r\Gamma)=3$, а $\Gamma=B_0\oplus B_1$ и $\mathfrak{D}/\pi\mathfrak{D}\simeq T$, $B_i/B_ir\simeq T$ $(i=1,2,3)$, а $\dim_T(B_0/B_0r)=2$. Обозначим $H=H_0/\operatorname{Ann}E_0$, где $H_0=\operatorname{Hom}_\Lambda(B_0,B_0)$. Тогда, как нетрудно проверить, $E_0\simeq H$ как H-модуль и $H=T+Ta=T+aT$, $a^2=0$. Вложения $B_1\to B_0$ и $B_3\to B_0$ индуцируют отображения $E_1\xrightarrow{\varphi_1}E_0$ и $E_3\xrightarrow{\varphi_3}E_0$, причем $\operatorname{Im}\varphi_1=\operatorname{Im}\varphi_3=aT$. Эпиморфизмы $B_0\to B_2$ и $B_0\to B_3$ индуцируют эпиморфизмы $E_0\xrightarrow{\psi_2}E_2$ и $E_0\xrightarrow{\psi_3}E_3$, причем $\operatorname{Ker}\psi_2=\operatorname{Ker}\psi_3=aT$.

Получается задача приведения матрицы

$$X=\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

(X_0 — матрица с коэффициентами из H, X_i — с коэффициентами из T при $i=1, 2, 3$), причем над столбцами X можно совершать элементарные преобразования с коэффициентами из T, над строками X_0 — с коэффициентами из H и над строками X_i ($i=1, 2, 3$) — с коэффициентами из T. Кроме того, строки X_0 можно прибавлять к строкам X_2 и X_3, полагая $a=0$, а строки X_1 и X_3, умноженные на a, можно прибавлять к строкам X_0.

Условие невырожденности накладывает на X_i ограничение: строки X_1 должны быть линейно независимы, а строки X_i ($i=0, 2, 3$) — линейно независимы в совокупности по модулю aT.

Приведем матрицу X_0 к виду

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & aE & 0 \end{pmatrix}$$

и будем считать, что размерность матрицы aE — минимальная среди всех матриц такого вида, подобных X. Тогда матрицы X_i элементарными преобразованиями приведутся к виду:

$$\begin{aligned} X_1 &= (X_1' \quad X_1'' \quad 0 \quad Y_1), \\ X_2 &= (0 \quad 0 \quad X_2' \quad Y_2), \\ X_3 &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_3) \end{aligned}$$

(деление соответствует разбиению матрицы X_0).

Приведем Y_1 к виду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда X_1 можно привести к виду

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overline{Y}_1 \\ \overline{X}_1' & \overline{X}_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, X_2 можно привести к виду

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \overline{Y}_2 \\ 0 & 0 & \overline{X}_2' & 0 \end{pmatrix}$$

(не портя вида X_1). После этого матрицы $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Y}_3$ образуют триаду, а столбцы матрицы X_1'' можно прибавлять к столбцам матрицы $X_1^{\bullet}$, не портя вида остальных матриц.

Учитывая условия невырожденности, получаем 12 неразложимых представлений, соответствующих матрицам:

$$(1_i)\quad (i=0,1,2,3);\quad (1_0 a);\quad \begin{pmatrix}1_i\\1_1\end{pmatrix}\quad (i=0,2,3);$$

$$\begin{pmatrix}1_0 & a\\1_1 & 0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1_0 & a\\0 & 1_2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1_0 & a\\1_1 & 0\\0 & 1_2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1_1 & 0\\1_2 & 1_2\\0 & 1_3\end{pmatrix}$$

(1_i означает единичный элемент E_i).

Итак, все хорошие порядки в $M_3(D)$ — конечного типа.

§ 7. Представления хороших порядков в случае V

Наконец, рассмотрим случай $\widetilde{\Lambda}=M_2(D_1)\oplus D_2$. Проекция Λ на $M_2(D_1)$ — бассов порядок Λ_1, проекция Λ на D_2 есть $\mathfrak{O}_2$. Разберем отдельно два случая.

Случай 1. Γ — бассов порядок, тогда $\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2$, соответственно, $R=R_1\oplus R_2$ и $\Lambda\cap M_2(D_1)=R_1$. Выпишем неразложимые Λ_1-модули представлений. Это есть, во-первых, неразложимые надкольца $\Lambda_1=B_0\subset B_1\subset\ldots$ $\ldots\subset B_{s-1}$ и, во-вторых, неприводимые Λ_1-модули, которых может быть либо два B_s, B_{s+1}, либо один B_s. Учитывая, что $R_1\simeq B_1$, мы получаем такие значения $E_i=\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_2, B_i)$:

$$E_0\simeq T \text{ (будем писать } E_0=a_0T);$$

$$E_i\simeq T+a_iT=T+Ta_i,\quad a_i^2=0\quad (0<i<s);$$

$$E_s\simeq E_{s+1}\simeq T,$$

причем если B_s — единственный неприводимый Λ_1-модуль, то $T_1=\mathfrak{O}_1/\pi_1\mathfrak{O}_1$ есть подтело в T такое, что $\dim_{T_1}T=2$, а если существует и B_{s+1}, то $T_1=T$.

Гомоморфизмы $B_i\to B_j$ индуцируют отображения $\varphi_{ij}: E_i\to E_j$, причем при $i<j$ $\varphi_{ij}(1_i)=1_j$, $\varphi_{ij}(a_i)=0$, а при $i>j$ $\varphi_{ij}(1_i)=0$, $\varphi_{ij}(a_i)=a_j$, за исключением $\varphi_{s(s+1)}=0$ и $\varphi_{(s+1)s}=0$.

Получаем задачу о приведении матрицы

$$X=\begin{pmatrix}X_0\\ \vdots\\ X_s\\ X_{s+1}\end{pmatrix}$$

(возможно, X_{s+1} нет), где X_i — матрица над E_i, причем над столбцами X можно производить элементарные преобразования с коэффициентами из T, над строками X_i $(i<s)$ — с коэффициентами из E_i. Если B_s — единственный неприводимый модуль, то над строками X_s можно производить элементарные преобразования с коэффициентами из T_1, если же существует B_{s+1}, то над строками X_s и X_{s+1} можно совершать элементарные

преобразования с коэффициентами из T. Кроме того, к строкам X_j можно прибавлять строки X_i, умноженные на φ_{ij}.

Отметим, что если рассматривать только матрицы $X_0, \ldots, X_{s-1}$, то получается в точности задача, решенная в (5) (случай 4), все неразложимые матрицы для которой — это (1_i), (a_i) и $(1_i a_i)$. Приведем $X_0, \ldots, X_{s-1}$ и предположим, что число элементов вида a_i — наименьшее среди всех подобных матриц. Легко видеть, что тогда в X_s и X_{s+1} ненулевыми могут быть только элементы, стоящие над нулевыми столбцами матриц $X_0, \ldots, X_{s-1}$. Поэтому осталось привести матрицы X_s и X_{s+1}, что дает еще такие неразложимые матрицы:

если B_{s+1} существует —

$$(1_s); \quad (1_{s+1}); \quad \begin{pmatrix} 1_s \\ 1_{s+1} \end{pmatrix};$$

если нет —

$$(1_s); \quad \begin{pmatrix} 1_s \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

где $T = T_1(\varepsilon)$.

Случай 2. Γ — не бассов порядок веса 2. Тогда из результатов (9) (§ 5) следует, что $\mathfrak{O}_1/\pi_1\mathfrak{O}_1 \simeq \mathfrak{O}_2/\pi_2\mathfrak{O}_2 \simeq T$ и Γ изоморфно порядку вида

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & \mathfrak{O}_1 \\ \pi_1\mathfrak{O}_1 & \overline{\Gamma} \end{pmatrix},$$

где $\overline{\Gamma}$ — подкольцо в $\mathfrak{O}_1 \oplus \mathfrak{O}_2$, состоящее из пар (ω_1, ω_2) таких, что $\varphi_1(\omega_1) = \varphi_2(\omega_2)$, где φ_1 и φ_2 — проекции $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ на T.

Порядок Γ имеет 4 неразложимых модуля представлений: три неприводимых

$$B_1 = (\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_1); \qquad B_2 = (\pi_1\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_1); \qquad B_3 = \mathfrak{O}_2$$

и один двучленный B_0. Так же, как в § 6 (случай 3), получаем такие значения $E_i = \mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, B_i)$:

$$E_i \simeq T \quad (i = 1, 2, 3); \quad E_0 \simeq H = T + Ta = T + aT, \quad a^2 = 0,$$

где $H = H_0/\mathrm{Ann}\, E_0$, $H_0 = \mathrm{Hom}_\Lambda(B_0, B_0)$. Вложения $B_1 \to B_0$, $B_3 \to B_0$ и эпиморфизмы $B_0 \to B_2$, $B_0 \to B_3$ индуцируют отображения $E_i \to E_j$, и легко видеть, что получается в точности та же задача, что и в § 6 (случай 3). Поскольку эта задача конечного типа, все хорошие порядки в $M_2(D_1) \oplus D_2$ — конечного типа, что завершает доказательство теоремы 1.2, а вместе с ней — и теоремы 1.1.

§ 8. Следствия

Описание представлений хороших порядков, данное в §§ 5—7, позволяет решить вопрос о том, когда все неразложимые представления локального порядка Λ реализуются в идеалах. Возможны три случая:

1) Λ — бассов порядок;

2) Λ — горенштейнов, но не бассов порядок;

3) Λ — негоренштейнов порядок.

Бассовы порядки описаны в ([17]); все их представления реализуются в идеалах.

Если Λ — горенштейнов, но не бассов порядок, то его единственное минимальное надкольцо Λ' неразложимо и негоренштейново (см. ([9]), § 3). Неразложимые представления Λ и Λ' реализуются в идеалах одновременно.

Итак, осталось разобрать третий случай.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть Λ — локальный негоренштейнов порядок, $R = \operatorname{rad}\Lambda$, $\overline{\Lambda}$ — пересечение максимальных надколец Λ. Неразложимые представления порядка Λ реализуются в идеалах тогда и только тогда, когда:*

(1) *$\overline{\Lambda}$ наследственно;*

(2) $\tilde{l}(\Lambda) = \mu_\Lambda(\overline{\Lambda}) = 3$;

(3) $\overline{\Lambda}R = R$.

Доказательство. Если все неразложимые представления реализуются в идеалах, то из ([21]) следует, что Λ — порядок конечного типа, т. е. хороший порядок. Поскольку Λ не бассов, из ([17]) следует, что $\tilde{l}(\Lambda) = 3$, т. е. Λ удовлетворяет условиям (1) и (2). С другой стороны, если порядок Λ удовлетворяет условиям (1)—(3), то $I' = \Lambda\overline{R} + \Lambda/\Lambda = 0$ и потому Λ — хороший порядок. Итак, нужно проверить, что если Λ — хороший порядок и $\tilde{l}(\Lambda) = 3$, то все его неразложимые представления реализуются в идеалах тогда и только тогда, когда $\overline{\Lambda}R = R$, или, что то же, $\Gamma = \overline{\Lambda}$, где $\Gamma = \Lambda(R)$.

Пусть $\tilde{\Lambda} = M_3(D)$. Если $\Gamma \neq \overline{\Lambda}$, то это случай 3 из § 6, и представление, соответствующее матрице

$$\begin{pmatrix} 1_0 & a \\ 1_1 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix},$$

не изоморфно идеалу. Если же $\Gamma = \overline{\Lambda}$, то все представления Λ реализуются в идеалах (см. § 6, случаи 1, 2).

Если $\tilde{\Lambda} = M_2(D_1) \oplus D_2$ и Γ не бассов, то, как и в предыдущем случае, есть представление, не изоморфное идеалу. Поэтому Γ бассово, мы находимся в условиях случая 1 § 7 и все представления Λ реализуются в идеалах тогда и только тогда, когда нет матриц вида $(1_i\ a_i)$, т. е. $s = 1$. Но это в точности равносильно тому, что $\Gamma = \overline{\Lambda}$.

Наконец, случай $\tilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ разбирается аналогично с учетом решения соответствующей задачи, данного в ([5]) (случай 6).

Доказанная теорема является обобщением результатов ([22]), ([23]), где аналогичный вопрос решается для коммутативных колец.

В заключение мы выведем из теоремы 1.2 одно следствие, касающееся уже не обязательно локальных порядков.

Следствие 8.2. *Пусть Λ — порядок конечного типа над полным локальным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$, $\overline{\Lambda}$ — пересечение максимальных надколец порядка Λ. Тогда порядок $\overline{\Lambda}$ вполне разложим.*

Доказательство. Если $\overline{\Lambda}$ не вполне разложим, то для некоторого минимального идемпотента e порядка $\overline{\Lambda}$ модуль $Q=e\overline{\Lambda}$, а потому и кольцо $e\overline{\Lambda}e=\Delta$ не вполне разложимы. Обозначим $P=e\Lambda$, $\Lambda_0=e\Lambda e=$ $=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,P)$. Λ_0 — локальный порядок, и из ([9]) (§ 1) следует, что он имеет конечный тип. По теореме 1.2 пересечение его максимальных надколец $\overline{\Lambda}_0$ — наследственный порядок и все модули представлений над ним вполне разложимы.

Пусть $A_1, \ldots, A_t$ — все правильные неприводимые Λ-модули, $A=A_1\oplus\ldots$ $\ldots\oplus A_t$. Так как $\overline{\Lambda}=\Lambda(A)$, то существует точная последовательность (([9]), § 1)

$$0\to Q\to A^n\to A^m.$$

Но $\Delta=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,Q)$, поэтому, обозначая $B=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,A)$, получаем точную последовательность Λ_0-модулей:

$$0\to\Delta\to B^n\to B^m.$$

Так как $B_i=\mathrm{Hom}_\Lambda(P,A_i)$ есть либо нулевой, либо правильный Λ_0-модуль, то B, а значит, и Δ—$\overline{\Lambda}_0$-модули. Но это невозможно, так как Δ не вполне разложимо. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Поступило
14.III.1972

Литература

1 Берман С. Д., Гудивок П. М., О целочисленных представлениях конечных групп, Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та, 5 (1962), 74—76.

2 Jones A., Groups with a finite number of indecomposable integral representations, Michigan Math. J., 10 (1963), 257—261.

3 Jacobinski H., Sur les ordres commutatifs avec un nombre finie de réseaux indécomposables, Acta Math., 118 (1967), 1—31.

4 Гудивок П. М., Представления конечных групп над числовыми кольцами, Изв. АН СССР. Сер. матем., 31 (1967), 799 — 834.

5 Дрозд Ю. А., Ройтер А. В., Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 31 (1967), 783—798.

6 Roggenkamp K. W., Lattices over orders. II, Lecture Notes in Math., Springer Ver., 142, 1970.

7 Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.

8 Джекобсон Н., Строение колец, М., ИЛ., 1961.

9 Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., О квазибассовых порядках, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36 (1972), 328—370.

10 Ройтер А. В., Матричные задачи и представления бисистем, Записки научн. сем. ЛОМИ, 28 (1972), 130—143.

[11] Дрозд Ю. А., Матричные задачи и категории матриц, Записки научн. сем. ЛОМИ, 28 (1972), 144—153.
[12] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, М., «Мир», 1971.
[13] Дрозд Ю. А., Узагальнення одніеі теореми Дейда, Доп. АН УРСР.
[14] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Наследственные порядки, Укр. матем. ж., 20, № 2 (1968), 246—248.
[15] Hasse H., Ueber $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., 104 (1931), 495—534.
[16] Дрозд Ю. А., Неразложимые матричные кольца второго порядка с конечным числом представлений бассовы, Матем. заметки, т. 12, вып. 5 (1972), 601—604.
[17] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В., О наследственных и бассовых порядках, Изв. АН СССР. Сер. матем., 31 (1967), 1415—1436.
[18] Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Теория гомологий в группах. II, Вестн. Ленингр. ун-та, 7 (1959), 72—87.
[19] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., ИЛ., 1960.
[20] Джекобсон Н., Теория колец., М., ИЛ., 1947.
[21] Ройтер А. В., Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений, Изв. АН СССР. Сер. матем., 32 (1968), 1275—1282.
[22] Bass H., On the ubiquity of Gorenstein rings, Math., Z., 82 (1963), 8—28.
[23] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Уточнение одной теоремы Басса, Докл. АН СССР, 176, № 2 (1967), 266—268.
[24] Roggenkamp K. W., Classification of the completely primary totally ramified orders with a finite number of nonisomorfic indecomposable lattices, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), 399—401.