Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 3, 1974, 34—42.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОКСТЕРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Ю. А. Дрозд

Представления частично упорядоченных множеств были введены Л. А. Назаровой и А. В. Ройтером в работе [9], где ими был построен алгоритм, позволяющий выяснить, имеет ли данное множество конечное число неразложимых представлений, и в случае конечности типа вычислить все представления. Используя этот алгоритм, М. М. Клейнер [7], [8] получил критерий конечности и полное описание представлений множеств конечного типа. Из результатов этих работ, в частности, следовали такие качественные факты, касающиеся представлений множеств конечного типа:

1) кольцо эндоморфизмов любого неразложимого представления тривиально;
2) в данной размерности есть не более одного неразложимого представления;
3) число представлений и их вид не зависят от основного поля;
4) двойственное множество также имеет конечный тип и те же размерности неразложимых представлений.

Одновременно П. Габриель [4] ввел в рассмотрение представления колчанов (т. е. диаграммы в категории векторных пространств с заданной схемой) и получил для них аналогичные результаты. Кроме того, оказалось, что колчаны конечного типа — это в точности те, которые имеют вид схем Дынкина типа A_k, D_k или E_k, а размерности неразложимых представлений соответствуют положительным корням этих схем.

Естественно возникло желание дать объяснение этим фактам, не прибегая к явному вычислению всех представлений. Для представлений колчанов это было сделано И. Н. Бернштейном, И. М. Гельфандом и В. А. Пономаревым [2]. Именно, они показали, что все представления колчанов, имеющих вид схем Дынкина, получаются некоторой стандартной конструкцией из тривиальных представлений, для которых все указанные свойства очевидны. Эта конструкция получила название функтора Кокстера, поскольку на размерностях представлений она индуцирует преобразование Кокстера, соответствующее данной схеме Дынкина.

В настоящей работе строится аналогичная конструкция для представлений частично упорядоченных множеств и доказывается, что и здесь имеют место все аналогичные результаты (в том числе и интерпретация размерностей) *). Кроме того, показывается, что для множеств конечного типа каждое неразложимое представление устойчиво в том смысле, что его орбита открыта в множестве всех представлений данной размерности. Грубо говоря, из существования неразложимого представления данной размерности следует, что это — представление «общего положения».

---

*) Отметим, что если все элементы данного множества несравнимы, то эта конструкция фактически совпадает с конструкцией, введенной И. М. Гельфандом и В. А. Пономаревым [5].

Некоторые затруднения появляются из-за того, что возникающая здесь квадратичная форма, в отличие от случая колчанов, не обязательно положительна: она принимает положительные значения лишь на векторах с неотрицательными коэффициентами. Это, в частности, мешает непосредственно передоказать критерий М. М. Клейнера и получить полное описание представлений.

В дальнейшем для упрощения изложения основное поле K мы всегда будем считать бесконечным, так как случай конечного поля сводится к этому стандартными методами теории Галуа, изложенными, например, в [10].

При доказательстве мы будем использовать некоторые простые сведения о квадратичных формах и алгебраических группах. Эти результаты изложены в дополнении, помещенном в конце статьи.

1. Множества конечного типа. Основнаа теорема

Пусть S — конечное частично упорядоченное множество. *Представлением* S над полем K называется его гомоморфизм в упорядоченное по включению множество $S(U)$ подпространств конечномерного векторного пространства U над полем K.

Гомоморфизмом представления $X\colon S \to S(U)$ в представление $Y\colon S \to S(W)$ назовем линейное отображение $L\colon U \to W$ такое, что $LX(i) \subset Y(i)$ для любого элемента $i \in S$. Если L взаимно однозначно и $LX(i) = Y(i)$ для любого $i \in S$, то L назовем *изоморфизмом* X на Y. Очевидно, представления данного множества S образуют аддитивную (но не абелеву) категорию. Кольцо эндоморфизмов представления X в этой категории мы будем обозначать через $E(X)$.

Прямой суммой представлений $X\colon S \to S(U)$ и $Y\colon S \to S(U')$ в этой категории является представление $Z = X \oplus Y\colon S \to S(U \oplus U')$, в котором $Z(i) = X(i) \oplus Y(i)$ для всех $i \in S$. Представления вида $X \oplus Y$ и все им изоморфные называются *разложимыми*, остальные — *неразложимыми*.

Говорят, что множество S *конечного типа*, если оно имеет конечное число неразложимых представлений с точностью до изоморфизма *).

Нам будет удобна модульная интерпретация представлений. По множеству S можно построить K-алгебру $A = A(S)$ с базисом $\{a_{ij}\}$ $(i, j \in S;\ i \leqslant j)$ и законом умножения: $a_{ij}a_{kl} = \delta_{jk}a_{il}$. Пусть $V = V(S)$ — модуль над алгеброй A с базисом $\{v_i\}$ $(i \in S)$ и действием операторов: $v_i a_{jk} = \delta_{ij}v_k$. Если U — конечномерное векторное пространство над K, то $U \otimes_K V$ также является A-модулем. Предположим, что $X\colon S \to S(U)$ — представление множества S. Тогда, очевидно, $X \otimes V = \sum\limits_i X(i) \otimes v_i$ есть A-подмодуль в $U \otimes_K V$. Наоборот, если M^i — подмодуль в $U \otimes_K V$, то, полагая $X(i) = \{u \in U \mid u \otimes v_i \in M\}$, мы получим представление $X\colon S \to S(U)$ такое, что $M = X \otimes V$. При этом линейное отображение $L\colon U \to W$ является гомоморфизмом представления $X\colon S \to S(U)$ в представление $Y\colon S \to S(W)$ тогда и только тогда, когда $(L \otimes 1)(X \otimes V) \subset Y \otimes V$. Интересно отметить, что, поскольку $\mathrm{Hom}_A(V, V) = K$, всякий эндоморфизм A-модуля $U \otimes_K V$ имеет вид $L \otimes 1$. В частности, представления X и Y в пространстве U изоморфны тогда и только тогда, когда подмодули $X \otimes V$ и $Y \otimes V$ переводятся друг в друга автоморфизмом модуля $U \otimes_K V$.

*) Следовало бы говорить «конечный тип над полем K», но, как будет видно из дальнейшего, конечность типа не зависит от поля.

Итак, мы получаем взаимно однозначное соответствие между A-подмодулями в $U \otimes_K V$ и представлениями множества S в пространстве U. Но каждый подмодуль $M \subset U \otimes_K V$ можно задать, указав его проективное накрытие $P = P(M)$ (см. [1]) и гомоморфизм $f: P \to U \otimes_K V$ с образом M. Наоборот, всякий гомоморфизм $f: P \to U \otimes_K V$ определяет подмодуль $M = \operatorname{Im} f$, т. е. представление множества S. При этом $P = P_1 \oplus P_2$, где $P_1 = P(M)$ и $f(P_1) = M$, а $P_2 \subset \operatorname{Ker} f$ (см. [1]). Если теперь $g: Q \to W \otimes_K V$ — другой гомоморфизм с проективным Q и $\operatorname{Im} f = N$, а $L: U \to W$—такое линейное отображение, что $(L \otimes 1)(M) \subset N$, то ввиду проективности P существует такой гомоморфизм $F: P \to Q$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & U \otimes_K V \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L\otimes 1} \\ Q & \xrightarrow{g} & W \otimes_K V. \end{array} \tag{1}$$

При этом, если $P = P(M)$, $Q = P(N)$, а L — изоморфизм и $(L \otimes 1)(M) = N$, то и F — изоморфизм.

Обозначим через $M(V)$ категорию, объекты которой — гомоморфизмы $f: P \to U \otimes_K V$, а морфизмы — коммутативные диаграммы вида (1); через $R(S)$ — категорию представлений множества S. Мы доказали

Предложение 1. *Сопоставляя гомоморфизму $f: P \to U \otimes_K V$ представление $X: S \to S(U)$, определенное подмодулем $\operatorname{Im} f = M$, а коммутативной диаграмме (1) — линейное отображение $L: U \to W$, мы получаем сюрьективный функтор $\Phi: M(V) \to R(S)$. При этом $\Phi(f) \simeq \Phi(g)$, где $g: Q \to W \otimes_K V$; $P = P(M)$, когда $Q = Q_1 \oplus Q_2$, причем $g(Q_2) = 0$, а $g_1 \simeq f$ (g_1 — ограничение g на Q_1).*

Отметим, что при заданном L морфизм F в диаграмме (1) восстанавливается, вообще говоря, не однозначно (так как g не обязательно мономорфизм).

Канонический изоморфизм $\operatorname{Hom}_A(P, U \otimes_K V) \simeq U \otimes_K V \otimes_A \hat{P}$, где $\hat{P} = \operatorname{Hom}_A(P, A)$, позволяет отождествить категорию $M(V)$ с категорией *V-матриц* в смысле [6], если рассматривать V как разделенный $K \times A$-бимодуль, положив $(c, a)v = cv$, $v(c, a) = va$ ($c \in K$; $a \in A$; $v \in V$).

Разложим единицу кольца A в сумму минимальных ортогональных идемпотентов: $1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. (Мы считаем, что $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, удобно предполагать, что меньшие точки имеют и меньшие номера, т. е. из $i \leqslant j$ в S следует $i \leqslant j$ в обычном смысле.) Тогда $P_i = a_{ii}A$ — это все неразложимые неизоморфные проективные A-модули, и любой проективный модуль P имеет вид: $P \simeq \bigoplus_i P_i^{x_i}$. *Размерностью V-матрицы* из $U \otimes_K V \otimes_A \hat{P}$, где $\dim U = x_0$, назовем целочисленный вектор $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

$V \otimes_A \hat{P}_i = Va_{ii}$ — одномерное пространство, поэтому V-матрица размерности x задается набором числовых матриц $\{X_i\}$ ($i \in S$) (X_i размера $x_0 \times x_i$). $\operatorname{Hom}_A(P_j, P_i) \simeq a_{ii}Aa_{jj}$ — одномерное пространство, порожденное a_{ij} при $i \leqslant j$, и 0 в противном случае. Отсюда следует, что наборы $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ задают изоморфные V-матрицы тогда и только тогда, когда их можно перевести друг в друга преобразованиями таких трех типов: 1) элементарными преобразованиями столбцов матриц X_i; 2) прибавлением к столбцам X_i столбцов X_j при $j \leqslant i$; 3) одновременными элементарными преобразованиями строк во всех матрицах X_i.

Таким образом, мы приходим к исходному определению работы [10].

Если $e_i=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте), то существует всего одна V-матрица E_i размерности e_i, задаваемая гомоморфизмом $P_i \to 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и гомоморфизмом $0 \to V$ при $i=0$. Заметим, что E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — это единственные неразложимые V-матрицы, не соответствующие неразложимым представлениям множества S, так что с классификационной точки зрения между $M(V)$ и $R(S)$ практически нет разницы.

В дальнейшем мы будем, как правило, отождествлять представление S и соответствующую V-матрицу и обозначать их одной буквой. В частности, E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ мы будем рассматривать как «виртуальные» представления S в нульмерном пространстве. Кольцо эндоморфизмов представления X (точнее, соответствующей матрицы) в категории $M(V)$ обозначим через $\tilde{E}(X)$. $E(X)$ есть некоторое фактор-кольцо этого кольца.

Обозначим через V_x пространство V-матриц размерности $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Для соответствующих представлений $X\colon S \to S(U)$ $x_i = \dim X(i) - \dim \overline{X}(i)$, где $\overline{X}(i) = \sum\limits_{j<i} X(j)$.

На пространстве V_x действует группа $G_x = \mathrm{GL}(x_0, K) \times \mathrm{GL}(P)$, где $\mathrm{GL}(P)$ — группа автоморфизмов A-модуля P. Это — алгебраическая группа размерности $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j} x_i x_j$. Размерность же самого пространства V_x равна $\sum\limits_{i=1}^{n} x_0 x_i$. Представления, изоморфные X, — это элементы орбиты группы G_x, проходящей через X. Мультипликативная группа поля K, вложенная в G_x диагональным образом, действует на V_x тождественно, так что фактическая группа преобразований — это G_x/K^*. Из утверждения 5 добавления следует, что если число орбит конечно, то $\dim G_x > \dim V_x$.

Положим $Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j} x_i x_j - \sum\limits_{i=1}^{n} x_0 x_i$ и рассмотрим в $(n+1)$-мерном вещественном пространстве E замкнутый выпуклый конус C, состоящий из векторов $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, у которых все координаты неотрицательны. Всевозможные размерности V-матриц — это векторы решетки с базисом $e_0, e_1, \ldots, e_n$, лежащие в конусе C. Поэтому из вышесказанного и утверждения 4 дополнения следует

Предложение 2. *Если множество S конечного типа* *), *то $Q(x) > 0$ для любой точки $x \in C$.*

Оказывается, верно и обратное, как показывает следующая основная теорема.

Теорема 1. *Если $Q(x) > 0$ для любой точки $x \in C$, то:*

1) *множество S конечного типа;*

2) *$\tilde{E}(X) \simeq E(X) \simeq K$ для любого неразложимого представления X;*

3) *если $Q(x) = 1$, то в размерности x есть ровно одно неразложимое представление (с точностью до изоморфизма);*

4) *если $Q(x) > 1$, то в размерности x нет неразложимых представлений;*

---

*) Достаточно требовать даже, чтобы S имело конечное число неизоморфных неразложимых представлений в каждой размерности. Вместе с теоремой 1 это дает новое доказательство гипотезы Брауэра — Трелла для представлений частично упорядоченных множеств [9].

5) *орбита неразложимого представления открыта в* V_x (*в топологии Зарисского*).

Пусть $\hat{S}$ — двойственное частично упорядоченное множество, т. е. $i \leqslant j$ в $\hat{S}$ означает, что $j \leqslant i$ в S. Тогда соответствующая ему квадратичная форма совпадает с $Q(x)$, откуда вытекает

Следствие 1. *Если S конечного типа, то и $\hat{S}$ конечного типа, причем между представлениями S и $\hat{S}$ есть взаимно однозначное соответствие, сохраняющее размерность.*

Следствие 2. *Всякое неразложимое представление множества конечного типа реализуется над простым подполем поля K (т. е. коэффициенты матриц X_i можно считать лежащими в простом поле). Кроме того, представление, неразложимое над полем K, остается неразложимым и над любым расширением этого поля* *).

Замечание. Из того, что $Q(x) > 0$ в конусе C, вообще говоря, не следует положительность формы Q. Так, если $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ с порядком: $1 < 4$; $1 < 5$; $2 < 4$; $2 < 5$; $3 < 5$, то Q принимает вне C даже отрицательные значения, в то время как S—множество конечного типа (см. [7]).

В заключение этого параграфа покажем, что все утверждения теоремы следуют из того, что $\tilde{E}(X) = K$ для любого неразложимого X.

Действительно, 4) и 5) следуют тогда из утверждения 6 дополнения. Далее, так как два непустых открытых множества в V_x всегда пересекаются, а различные орбиты G_x не пересекаются, в данной размерности существует не более одного неразложимого представления. Поскольку размерностей, меньших данной, конечное число, в каждой размерности есть всего конечное число неизоморфных представлений, а потому в V_x есть открытая орбита (см. утверждение 5 дополнения). Предположим, что $Q(x) = 1$, а O— открытая орбита в V_x. Тогда $\dim O = \dim V_x = \dim G_x - 1$, и если $X \in O$, то $\dim \tilde{E}(X) = 1$, т. е. $E(X) = K$ и X неразложимо, чем доказано утверждение 3).

Наконец, 1) следует из того, что множество $G_1 = \{x \in C \mid Q(x) = 1\}$ компактно (дополнение, утверждение 2), а потому в нем лежит лишь конечное число точек с целочисленными координатами, т. е. только в конечном числе размерностей имеются неразложимые представления.

2. Преобразования Кокстера и доказательство основной теоремы

Перейдем к доказательству теоремы 1. Всюду в этом параграфе мы будем считать, что форма Q, соответствующая множеству S, положительна на ненулевых векторах из конуса C.

Если $n = 0$, т. е. S пусто, то единственное неразложимое представление — это E_0, для которого утверждение теоремы тривиально. Поэтому мы можем предполагать, что для всех множеств с меньшим числом элементов наша теорема уже доказана.

Представление X размерности $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ называется *точным*, если $x_i \neq 0$, т. е. $X(i) \neq \overline{X}(i)$ ни для какого $i \in S$ (см. [8]). В частности, если $S \neq \phi$, все представления E_i не точны.

Мы будем пользоваться также естественным изоморфизмом $U \otimes_K V \otimes_A \otimes {}_A\hat{P} \simeq \mathrm{Hom}_K(U^*, V \otimes {}_A\hat{P})$.

Лемма 1. *Если в представление X не входит прямым слагаемым E_0, то соответствующее отображение $\varphi\colon U^* \to V \otimes {}_A\hat{P}$ мономорфно.*

---

*) Для множеств бесконечного типа это уже неверно: достаточно рассмотреть множество из четырех несравнимых точек (см. [9]).

Доказательство. Пусть U' — дополнение в U^* к $\operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $X = X' \oplus E_0^k$, где $k = \dim(\operatorname{Ker}\varphi)$, а X' — представление, соответствующее гомоморфизму $U' \to V \otimes_A \hat{P}$.

Лемма 2. *Если в представлении X нет неточных прямых слагаемых, то соответствующее отображение f: $P \to U \otimes_A V$ мономорфно.*

Доказательство. Пусть $\{X_i\}$ $(i \in S)$ — набор числовых матриц, определяющий представление X. Утверждение леммы означает, что столбцы матриц $X_j\,(j \leqslant i)$ линейно независимы в совокупности. Поэтому его достаточно доказывать для максимальных элементов $i \in S$. Поскольку в X не входит прямым слагаемым E_i, столбцы матрицы X_i линейно независимы относительно столбцов матриц X_j при $j < i$. Таким образом, остается проверить, что для любого максимального элемента $i \in S$ столбцы матриц X_i $(j < i)$ линейно независимы в совокупности.

Набор матриц $\{X_j\}\,(j \neq i)$ определяет представление X' множества $S \setminus \{i\}$, для которого теорема 1 уже предполагается справедливой. Пусть Y — какое-нибудь прямое слагаемое X'. Очевидно, $Y \neq E_j$ ни для какого $j \in S$. Пусть $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ — размерность $Y, \bar{y}_i = \sum\limits_{j<i} y_i$.
Если $\bar{y}_i \geqslant y_0$, то в пространстве V_y наборы матриц, у которых ранг системы столбцов матриц $\{Y_j\}\,(j < i)$ равен y_0, образуют открытое множество, инвариантное относительно действия G_y. Поскольку орбита Y открыта, она содержится в этом множестве. Но тогда преобразованиями вида 2) можно сделать нулевой ту часть матрицы X_i, которая стоит против Y, и, следовательно, $X \simeq Y \oplus Z$, что невозможно.

Итак, $\bar{y}_i < y_0$. Но тогда аналогичное рассуждение показывает, что столбцы матриц $\{Y_j\}$ $(j < i)$ линейно независимы в совокупности. Поскольку это верно для любого прямого слагаемого представления X', это верно и для всего представления, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если в представлении X нет неточных прямых слагаемых, то $E(X) \simeq \tilde{E}(X)$.*

Действительно, в этом случае гомоморфизм $F : P \to P$ такой, что $(L \otimes 1) f = fF$, где $L : U \to U$ — эндоморфизм X, определяется однозначно.

Следствие 2. *Если в представлении X размерности $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ нет неточных прямых слагаемых, то* $\dim X(i) = \sum\limits_{j \leqslant i} x_i$.

Перейдем к построению преобразований Кокстера. Пусть X — некоторое представление, $f : P \to U \otimes_K V$ — соответствующий гомоморфизм, $M = \operatorname{Coker} f$. Тогда M^* есть подмодуль в $(U \otimes_K V)^* = U^* \otimes_K V^*$. Но V^* можно рассматривать как левый A-модуль или, что то же, как правый модуль над антиизоморфной алгеброй $A^0 = A(\hat{S})$, причем $V^* \simeq V(\hat{S})$. Следовательно, M^* определяет некоторую V^*-матрицу, т. е. представление σX множества $\hat{S}$.

Нетрудно проверить, что $\sigma X : \hat{S} \to S(U^*)$ сопоставляет точке $i \in \hat{S}$ ортогональное дополнение $X(i)^\perp$ подпространства $X(i)$.

Рассмотрим теперь соответствующий X гомоморфизм φ: $U^* \to V \otimes_A \hat{P}$. Пусть $W = \operatorname{Coker}\varphi$, ψ: $V \otimes_A \hat{P} \to W$— проекция на фактор-пространство, ψ^*: $W^* \to (V \otimes_A \hat{P})^*$ — двойственный мономорфизм. Заметим, что $(V \otimes_A \hat{P})^* = \operatorname{Hom}_K(V \otimes_A \hat{P},\ K) \simeq \operatorname{Hom}_A(\hat{P}, V^*) \simeq P \otimes_A V^* = V^* \otimes_{A^0} P$ (P рассматривается как левый проективный A^0-модуль). Следовательно, ψ^* определяет V^*-матрицу, т. е. представление ρX множества $\hat{S}$.

Лемма 3. 1) *Если X не содержит прямых слагаемых вида E_0, то $\rho^2 X \simeq X$ и $\tilde{E}(\rho X) \simeq \tilde{E}(X)$. Кроме того, если $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ —*

размерность X, *а* $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ — *размерность* ρX, *то* $y_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0$, *а* $y_i = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

2) *Если* X *не содержит прямых слагаемых вида* E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *то* $\sigma^2 X \simeq X$. *Кроме того, если* X *не содержит неточных прямых слагаемых, то* $\tilde{E}(\sigma X) \simeq \tilde{E}(X)$, *и если* $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — *размерность* X, *а* $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ — *размерность* σX, *то* $y_0 = x_0$, *а* $\sum_{j \leqslant i} x_j + \sum_{j \geqslant i} y_j = x_0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Доказательство. Лемма 3 непосредственно вытекает из лемм 1, 2 и следствий 1, 2.

Преобразования $F = \rho\sigma$ и $\bar{F} = \sigma\rho$ мы назовем *преобразованиями Кокстера* для множества S.

Следствие 3. 1) *Если* X — *точная неразложимая* V*-матрица, не изоморфная* σE_0, *то* $\tilde{E}(FX) \simeq \tilde{E}(X)$ *и* $\bar{F}F(X) \simeq X$.

2) *Если* X — *неразложимая* V*-матрица, не изоморфная* E_0 *или* ρY, *где* Y — *неточная* V^**-матрица, то* $\tilde{E}(\bar{F}X) \simeq \tilde{E}(X)$ *и* $F\bar{F}(X) \simeq X$.

Заметим, что представление σE_0 точно тогда и только тогда, когда все точки множества S несравнимы.

Пусть теперь X — точное неразложимое представление множества S. Из леммы 3 следует, что если $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — размерность X, то размерность ρX есть $\rho_0 x$, а размерность σX есть $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n x$, где ρ_i — отражение в пространстве E с формой Q, соответствующее вектору e_i (см. дополнение). Поэтому, если $X \neq \sigma E_0$, размерность FX равна φx, где $\varphi = \rho_0\rho_1 \ldots \rho_n$ — преобразование Кокстера пространства E, определенное базисом $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим представления $F^k X$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Если все они точны и не изоморфны σE_0, то их размерности $\varphi^k x$ образуют дискретное множество, целиком лежащее в C, что невозможно ввиду утверждения 3 дополнения. Итак, $F^k X$ для некоторого k либо неточно, либо изоморфно σE_0. Но $\tilde{E}(\sigma E_0) \simeq \tilde{E}(E_0) = K$ и $\tilde{E}(Y) = K$ для всякого неточного неразложимого представления по предположению индукции, поэтому и $\tilde{E}(X) = K$. Как было показано в конце первого параграфа, отсюда следует основная теорема.

Учитывая, что $\bar{F}$ — обратное преобразование к F, получаем еще такой результат.

Теорема 2. *Всякое точное неразложимое представление множества конечного типа имеет вид* $\bar{F}^k X$, *где* X — *либо неточное представление, либо* σE_0.

Замечания. 1. Во всех предыдущих рассуждениях F можно заменить на $\bar{F}$. Поэтому в теореме 2 $\bar{F}$ можно заменить на F, а X считать либо равным E_0, либо имеющим вид ρY, где Y — неточное представление.

2. Поскольку F и $\bar{F}$ сохраняют кольца эндоморфизмов и значение формы $Q(x)$, теорему 1 можно непосредственно вывести из теоремы 2.

3. Из доказательства следует, что X в теореме 2 всегда можно считать представлением некоторого множества $S \setminus \{i\}$, где i — максимальный элемент S. Это замечание может быть полезным при явном вычислении представлений по теореме 2.

Дополнение

1. Квадратичные формы. Пусть E — векторное пространство над полем вещественных чисел, $Q(x)$ — квадратичная форма в пространстве E, (x, y) — ассоциированная с ней симметричная билинейная форма. Если e — неизотропный вектор, т. е. $Q(e) \neq 0$, можно определить *отражение* ρ, соответствующее вектору e, по формуле $\rho x = x - \frac{2(x, e)}{(e, e)} e$. Очевидно, ρ — линейное отображение, сохраняющее форму Q, т. е. $Q(\rho x) = Q(x)$.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис E, состоящий из неизотропных векторов, ρ_i — отражение, соответствующее вектору e_i, то отображение $\varphi = \rho_1 \ldots \rho_n$ назовем *преобразованием Кокстера*, определенным базисом $e_1, \ldots, e_n$.

Утверждение 1. *Если вектор $x \in E$ не лежит в ядре формы Q (т. е. $(x, y) \neq 0$ для некоторого $y \in E$), то $\varphi x \neq x$.*

Доказательство. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты x в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то ρ_i затрагивает только i-ю координату. Поэтому из $\varphi x = x$ следует, что $\rho_i x = x$ для всех i, т. е. $(x, e_i) = 0$ и вектор x лежит в ядре формы Q.

Утверждение 2. *Пусть C—замкнутый конус в E, причем из $x \in C$, $x \neq 0$ следует, что $Q(x) > 0$. Тогда для любого вещественного числа a множество $C_a = \{x \in C \mid Q(x) = a\}$ компактно (в обычной топологии пространства E).*

Доказательство. Зафиксируем в E какую-нибудь норму $|\,|$ и рассмотрим множество $\bar{C}$ — пересечение конуса C с единичной сферой. $\bar{C}$ — компакт, поэтому форма $Q(x)$ принимает на нем минимальное значение q, причем $q > 0$. Тогда для любого $x \in C$ имеем $Q(x) = |x|^2 Q(x/|x|) \geqslant q|x|^2$, и потому C_a содержится в шаре радиуса $\sqrt{a/q}$. Поскольку, очевидно, C_a замкнуто, оно компактно.

Утверждение 3. *Если C — выпуклый замкнутый конус в E и $Q(x) > 0$ для ненулевых векторов $x \in C$, то для любого вектора $x \in C$ множество $\{\varphi^k x\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) либо недискретно, либо не содержится в C.*

Доказательство. Предположим, что $\{\varphi^k x\}$ — дискретное множество, целиком лежащее в C. Тогда $\varphi^k x \in C_a$, где $a = Q(x)$, и из компактности C_a следует, что в множестве $\{\varphi^k x\}$ лишь конечное число различных элементов. Но их сумма лежит в C и неподвижна относительно φ, что невозможно.

Утверждение 4. *Пусть C — множество векторов с неотрицательными координатами, Q — целочисленная квадратичная форма такая, что $Q(x) > 0$ для ненулевых целочисленных векторов из C. Тогда $Q(x) > 0$ для любого $x \in C \setminus \{0\}$.*

Доказательство (индукция по размерности, n). При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для размерности $n - 1$.

Из условия следует, что $Q(x) > 0$ для ненулевых векторов $x \in C$ с рациональными координатами. По непрерывности $Q(x) \geqslant 0$ для всех $x \in C$. Если $C \cap \operatorname{Ker} Q \neq \{0\}$, то в $C \cap \operatorname{Ker} Q$ есть векторы с рациональными координатами, что невозможно. Поэтому, если $Q(y) = 0$ для какого-то $y \in C \setminus \{0\}$, то в любой окрестности вектора y найдется такой y', что $Q(y') < 0$. Следовательно, y лежит на границе C, которая есть объединение множеств $C_i = \{x \in C \mid x_i = 0\}$. Но это невозможно по индукционному предположению, что и завершает доказательство.

2. Алгебраические группы (см. [3]). Пусть G — алгебраическая группа над бесконечным полем K, действующая регулярным образом на аффинном пространстве V.

Утверждение 5. *Если в пространстве V имеется только конечное число орбит относительно G, содержащих K-рациональные точки, то $\dim G \geqslant \dim V$, и одна из этих орбит открыта (в топологии Зарисского).*

Доказательство. Пусть $O_1, \ldots, O_t$ — все орбиты, содержащие K-рациональные точки. Так как в аффинном пространстве множество рациональных точек плотно, то $V = \bigcup_{i=1}^{t} \overline{O}_i$, откуда ввиду неприводимости V имеем $\overline{O}_i = V$ для некоторого i, а тогда $\dim V = \dim O_i$, и орбита O_i открыта [3]. Но $O_i \simeq G/H$, где H — стабилизатор точки $v \in O_i$, поэтому $\dim O_i \leqslant \dim G$, т. е. $\dim V \leqslant \dim G$.

Утверждение 6. *Предположим, что* $\dim G \geqslant \dim V$ *и для некоторой точки* $v \in V$ *стабилизатор нульмерен. Тогда* $\dim G = \dim V$, *и орбита точки* v *открыта.*

Доказательство. Если O — орбита точки v, то $\dim O = \dim G \geqslant \dim V$, откуда следует, что $\dim V = \dim G = \dim O$, а тогда $\overline{O} = V$, и орбита O открыта.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 26 февраля 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bass H., Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 466—488.
2. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А., Функторы Кокстера и теорема Габриеля, УМН **XXVIII**, вып. 2 (1973), 19—33.
3. Борель А., Линейные алгебраические группы, М., «Мир», 1972.
4. Gabriel P., Unzerlegbare Darstellungen. I, Manus. Math. **6**, № 1 (1972), 71—103.
5. Gelfand I. M., Ponomarev V. A., Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **5**. Hilbert space operators, Tihany (Hyngary), 1970, 163—237.
6. Дрозд Ю. А., Матричные задачи и категории матриц, Записки науч. сем. ЛОМИ **28** (1972), 144—153.
7. Клейнер М. М., Частично упорядоченные множества конечного типа, Записки научн. сем. ЛОМИ **28** (1972), 32—41.
8. Клейнер М. М., О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа, Записки научн. сем. ЛОМИ **28** (1972), 42—59.
9. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Представления частично упорядоченных множеств, Записки научн. сем. ЛОМИ **28** (1972), 5—31.
10. Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, М., «Мир», 1968.