МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 24, № 6 (1978)

О ЛОКАЛЬНО СОПРЯЖЕННЫХ ПОРЯДКАХ

Ю. А. Дрозд, В. М. Турчин

Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо с полем частных k. Напомним, что $\mathfrak{o}$-кольцом, или $\mathfrak{o}$-порядком, называется $\mathfrak{o}$-алгебра Λ, которая, как $\mathfrak{o}$-модуль, конечно порождена и не имеет кручения [1]. Если кольцо $\mathfrak{o}$ локально, то для ряда классов порядков удается дать полную классификацию (см., например, [2], [3] и т. п.). В настоящей работе мы укажем некоторый подход к глобализации подобных результатов. Этот подход основан на обычной в арифметических вопросах технике иделей. В частности, будет дана глобальная классификация наследственных порядков, удовлетворяющих условию Эйхлера.

1. Общие результаты. Обозначим $A = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}} k$. Это конечномерная k-алгебра, причем Λ — порядок в A в смысле [4, гл. 6]. Для всякого простого идела $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}$ обозначим $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{p}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}$. $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ и т. п. Если Γ такой $\mathfrak{o}$-порядок в A, что $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-порядки $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ и $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ сопряжены в $A_{\mathfrak{p}}$, т. е. $\Gamma_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^{-1}$, где $a_{\mathfrak{p}} \in A_{\mathfrak{p}}^*$ для всех $\mathfrak{p}$, назовем Γ и Λ локально сопряженными. Множество классов сопряженности в A порядков, локально сопряженных с Λ, обозначим $c(\Lambda)$.

Поскольку для любого $\mathfrak{o}$-порядка Γ в A $\Gamma_{\mathfrak{p}} = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ для почти всех $\mathfrak{p}$ (т. е. для всех, кроме конечного числа), можно считать, что $a_{\mathfrak{p}} \in \Lambda_{\mathfrak{p}}^*$ для почти всех $\mathfrak{p}$, т. е. набор $\{a_{\mathfrak{p}}\}$ есть идель алгебры A [1]. Наоборот, пусть дан такой идель $\{a_{\mathfrak{p}}\}$. Тогда $a_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^{-1} = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ для почти всех $\mathfrak{p}$ и, следовательно, в A существует такой $\mathfrak{o}$-порядок Γ, что $\Gamma_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}} \Lambda_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^{-1}$ для всех $\mathfrak{p}$ [1]. Таким образом, получаем сюръективное отображение $\sigma\colon \mathring{J}_A \to c(\Lambda)$, где $\mathring{J}_A$ — группа иделей алгебры A (она не зависит от выбора порядка Λ).

Тривиально проверяется, что слои σ — это в точности двойные смежные классы $A^* \setminus J_A/N_\Lambda$, где N_Λ — нормализатор в J_A подгруппы J_Λ Λ-единичных иделей (в J_Λ входят те и только те идели $\{a_\mathfrak{p}\}$, у которых $a_\mathfrak{p} \in \Lambda_\mathfrak{p}^*$ для всех $\mathfrak{p}$; в отличие от J_A, J_Λ зависит от порядка A). Таким образом, получаем

Предложение 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между $c(\Lambda)$ и множеством двойных смежных классов $A^* \setminus J_A/N_\Lambda$.*

В дальнейшем мы, как правило, будем отождествлять эти два множества.

Отметим, что $N_\Lambda \supset J_\Lambda$, а множество $A^* \setminus J_\Lambda/J_\Lambda$ естественно отождествляется с множеством $g(\Lambda)$ классов изоморфизма Λ-модулей главного рода [1], [5]. Поэтому существует сюръективное отображение $\omega\colon g(\Lambda) \to c(\Lambda)$. Легко видеть, что $\omega[M] = [\Lambda_l(M)]$, где $[M]$ — класс изоморфизма модуля M, а $[\Lambda_l(M)]$ — класс сопряженности его левого кольца множителей [1]. Поскольку структуру $g(\Lambda)$ часто удается описать [5], [6], естественно воспользоваться этим для описания $c(\Lambda)$.

В дальнейшем будем предполагать, что алгебра A полупроста. Через C обозначим центр A. Как известно [4, глава 5], всякий автоморфизм A, тождественный на C, является внутренним. Поэтому существует вложение $\operatorname{Aut} A/\operatorname{Int} A \to \operatorname{Aut} C$ ($\operatorname{Int} A$ — группа внутренних автоморфизмов), причем $\operatorname{Aut} C$ — конечная группа. Поэтому классификация порядков в A с точностью до изоморфизма и с точностью до сопряженности отличается лишь на действие некоторой конечной группы (тех автоморфизмов центра, которые продолжаются до автоморфизмов A).

Обозначим K_Λ группу стабильных классов Λ-модулей главного рода [5]. Будем говорить, что Λ удовлетворяет условию Эйхлера, если естественное отображение $g(\Lambda) \to K_\Lambda$ инъективно, т. е. из стабильной эквивалентности Λ-модулей главного рода следует изоморфизм. Поскольку сквозное отображение $J_A \to g(\Lambda) \to K_\Lambda$ — гомоморфизм групп [5], в этом случае A^*J_Λ — нормальная подгруппа в J_A, содержащая коммутант J_A', и $K_\Lambda \simeq J_A/A^*J_\Lambda$. Но $A^*N_\Lambda/A^*J_\Lambda$ — подгруппа в J_A/A^*J_Λ, значит, $c(\Lambda)$ можно отождествить с фактор-группой J_Λ/A^*N_Λ.

Из результатов [5] следует, что Λ удовлетворяет условию Эйхлера, если в разложении Веддербарна

$$A \simeq M_{d_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{d_t}(D_t),$$

где D_i — тела, $d_i > 1$, как только D_i некоммутативно. Более того, если k — поле алгебраических чисел, ограничение $d_i > 1$ нужно накладывать только на те номера i, для которых D_i является вполне определенным телом кватернионов [6].

Заметим, что фактор-группа $J_A/J'_A = \bar{J}_A$ допускает сравнительно простое описание. Именно, если B — простая компонента алгебры $A_\mathfrak{p}$, то $B \simeq M_n(D)$, где D — конечномерное тело над $k_\mathfrak{p}$, и определитель Дьедонне

$$\det\colon B^* \to \bar{D} = D^*/(D^*)'$$

индуцирует изоморфизм $B^*/(B^*)' \simeq \bar{D}$ [7, глава IV].

Очевидно, $\bar{J}_A$ можно тогда отождествить с ограниченным прямым произведением всех групп $\bar{D}$. Эпиморфизм $J_A \to \bar{J}_A$ в этом случае мы также будем называть определителем Дьедонне и обозначать $\det$. Такое отождествление согласовано с диагональным вложением $A^* \to J_A$ и определителем Дьедонне $\det\colon A^* \to \bar{A}$ для алгебры A. Поэтому мы получаем

Предложение 2. *Если Λ удовлетворяет условию Эйхлера, то $g(\Lambda) \simeq \bar{J}_A/\bar{A}\det(J_\Lambda)$, где $\det$ — определитель Дьедонне, а $c(\Lambda) \simeq J_A/\bar{A}\det(N_\Lambda)$.*

В арифметическом случае (т. е. когда k — поле алгебраических чисел) $\det$ можно отождествить с редуцированной нормой $\mathrm{Nr}\colon A^* \to C^*$ [8]. Поэтому $\bar{J}_A \simeq J_C$.

При этом $\bar{A}$ переходит в $\mathrm{Nr}\, A^* = C_A^*$ — подгруппу C^*, состоящую из тех элементов, которые положительны во всех бесконечных простых точках ветвления алгебры A [9, глава XI].

Следствие 1 [1]). *Если k — поле алгебраических чисел, а Λ удовлетворяет условию Эйхлера, то*

$$g(\Lambda) \simeq K_\Lambda \simeq J_C/C_A^*\,\mathrm{Nr}(J_\Lambda), \quad c(\Lambda) \simeq J_C/C_A^*\mathrm{Nr}(N_\Lambda).$$

Из предложения 2 можно получить также простую оценку группы $c(\Lambda)$ через K_Λ.

---

[1]) Для $g(\Lambda)$ этот результат фактически содержится в [6].

Предложение 3. *Пусть* Λ *удовлетворяет условию Эйхлера,* $A = \oplus_{i=1}^{t} A_i$, *где* A_i — *простые алгебры,* C_i — *центр* A_i, $(A_i : C_i) = d_i^2$, d — *наименьшее общее кратное* d_i. *Тогда* $\operatorname{Ker} \omega \supset K_\Lambda^d$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в любом классе смежности $A^* \setminus J_A/J_\Lambda$ существуют такие идели $\{a_\mathfrak{p}\}$, что $a_\mathfrak{p} = 1$ для $\mathfrak{p} \in S$, где S — произвольный конечный набор простых идеалов. Мы примем за S множество тех простых $\mathfrak{p}$, для которых $\Lambda_\mathfrak{p}$ — немаксимальный порядок [1]. Тогда при $\mathfrak{p} \overline{\in} S$ $\Lambda_\mathfrak{p} = \oplus_{i=1}^{t} \Lambda_i$, где Λ_i — максимальный порядок в $(A_i)_\mathfrak{p}$.

Пусть $(C_i)_\mathfrak{p} \simeq F_1 \oplus \ldots \oplus F_K$ (F_i — поля) и соответственно $(A_i)_\mathfrak{p} \simeq B_1 \oplus \ldots \oplus B_K$ (B_j — простая алгебра с центром F_j). Тогда $(B_j : F_j) = d_i^2$ и $B_j \simeq M_n(D)$, где D — тело, а $n \mid d_i$. Соответственно $\Lambda_i = \oplus_{i=1}^{K} M_j$ (M_j — максимальный порядок в B_j), а $M_j \simeq M_n(\Delta)$, где Δ — максимальный порядок в D. Но легко видеть, что в нормализаторе $M_n(\Delta)$ содержатся все матрицы aI ($a \in D$, I — единичная матрица). Поскольку $\det(aI) = (\det a)^n$, отсюда вытекает, что для любого иделя $\{a_\mathfrak{p}\}$ такого, что $a_\mathfrak{p} = 1$ при $\mathfrak{p} \in S$, $\det \{a_\mathfrak{p}\}^d \in \bar{A} \det(N_\Lambda)$, что и требовалось доказать.

Из этого результата вытекает, в частности, обобщение одной теоремы Шура (см. [10, теорема 76.5]).

Следствие 2. *Пусть* φ — *гомоморфизм некоторого порядка* Γ *в простую алгебру* A, *удовлетворяющую условию Эйхлера и такую, что порядок* h *группы* $g(\Lambda)$ *взаимно прост с* d *(где* $d^2 = (A : C)$, Λ — *некоторый максимальный порядок в* A*). Тогда существует внутренний автоморфизм* α *алгебры* A *такой, что* $\operatorname{Im} \alpha\varphi \subset \Lambda$.

Для доказательства достаточно заметить, что $\operatorname{Im} \varphi$ содержится в некотором максимальном порядке Λ'. Но Λ' локально сопряжен с Λ [1] и, следовательно, сопряжен с Λ, поскольку $(h, d) = 1$ и, значит, $K_\Lambda^d = K_\Lambda$.

Теорема Шура получается, если $A = M_d(C)$, а $\Lambda = M_d(\Delta)$, где Δ — максимальный порядок в C.

Замечание. Если порядок Λ максимален, а $A = M_d(C)$, то, как нетрудно убедиться, $\operatorname{Ker} \omega = K_\Lambda^d$, так что теорема Шура дает и необходимое условие вложимости любого порядка в $M_d(\Delta)$.

2. Вполне разложимые порядки. Применим развитую технику к порядкам, все локализации которых вполне разложимы. Кроме того, мы будем предполагать, что Λ является пересечением максимальных порядков. Тогда $\Lambda \cap C$ — максимальный порядок в C и, следовательно, Λ разлагается одновременно с C или, что то же, одновременно с A.

Поэтому алгебру A можно считать простой и, кроме того, предполагать, что $C = k$ (иначе $\mathfrak{o}$ можно заменить дедекиндовым кольцом $\Lambda \cap C$).

В этом случае $A_{\mathfrak{p}} \simeq M_n(D)$, где D — центральное тело над k. Пусть Δ — единственный максимальный порядок в D [11], π — его простой элемент, $F = \Delta/\pi\Delta$ — тело вычетов.

Через S мы обозначим структуру неприводимых $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-модулей представлений [2], [3]. Это — дедекиндова структура, всякий интервал которой имеет композиционный ряд. Кроме того, S обладает дополнительным строением: отношение изоморфизма модулей индуцирует отношение эквивалентности на S (конечно, не являющееся конгруэнтностью) и, кроме того, для любой пары элементов $M, N \in S$ такой, что N — максимальный подмодуль в S, M/N есть векторное пространство над телом F. Поэтому можно определить натуральное число $d(M, N) = \dim_F(M/N)$. Функция d по аддитивности распространяется на любую пару $M, N \in S$ такую, что $M \supset N$; если

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k = N$$

— композиционный ряд между M и N, то полагаем

$$d(M, N) = \sum_{i=1}^{K} d(M_{i-1}, M_i).$$

Наконец, для любой пары $M, N \in S$ положим

$$d(M, N) = d(M, M \cap N) - d(N, M \cap N).$$

Как следует из [3], структура S, снабженная отношением эквивалентности $\sim$ и функцией d, однозначно определяет порядок $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. Точнее, имеет место

Предложение 4. *Пусть Λ' — вполне разложимый порядок в $A_{\mathfrak{p}}$, S' его структура неприводимых модулей представлений. Всякий изоморфизм φ: $\Lambda_{\mathfrak{p}} \to \Lambda'$ индуцирует такой изоморфизм структур φ^*: $S \to S'$, что $\varphi^*(M) \sim \varphi^*(N)$ тогда и только тогда, когда*

$M \sim N$, *и*

$$d(M, N) = d(\varphi^*(M), \varphi^*(N))$$

для всех $M, N \in S$ (*очевидно, это условие нужно проверять лишь для пар* M, N, *где* N *– максимальный подмодуль в* M). *Наоборот, всякий изоморфизм структур с указанными свойствами индуцируется некоторым изоморфизмом порядков, причем, если* $\varphi^* = \psi^*$, *то* φ *и* ψ *отличаются на внутренний автоморфизм порядка* $\Lambda_{\mathfrak{p}}$.

Доказательство содержится в [3] для приведенного случая (это означает, что $d(M, N) = 1$, как только N — максимальный подмодуль в M). В общем случае необходимо внести лишь несущественные изменения.

Автоморфизмы структуры S, обладающие указанными свойствами, назовем допустимыми. Очевидно, для допустимого автоморфизма φ^* величина $d(\varphi^*) = d(M, \varphi^* M)$ не зависит от выбора M.

Из полной разложимости $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ следует, что образ $\Lambda_{\mathfrak{p}}^*$ при отображении $\det$ совпадает с образом максимального порядка $M_n(\Delta)$. Поэтому, если Λ удовлетворяет условию Эйхлера (например, если A – не тело), $g(\Lambda) = g(\overline{\Lambda})$, где $\overline{\Lambda}$ – максимальный порядок в A. Обозначим $[\mathfrak{p}]$, класс в $g(\Lambda)$ иделя, у которого все координаты, кроме $a_{\mathfrak{p}}$ единичные, а

$$a_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} \pi & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Классы $[\mathfrak{p}]$ являются системой образующих группы $g(\Lambda) = g(\overline{\Lambda})$.

Пусть элемент $a \in A_{\mathfrak{p}}^*$ лежит в нормализаторе $\Lambda_{\mathfrak{p}}$. Тогда a индуцирует автоморфизм порядка $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ и, следовательно, допустимый автоморфизм a^* структуры S. При этом, как нетрудно убедиться, $\det a = (\det \pi)^{d(a^*)}$.

Поскольку всякий допустимый автоморфизм S индуцируется некоторым элементом из нормализатора $\Lambda_{\mathfrak{p}}$, отсюда (и из предложения 2) следует

Предложение 5. *Пусть* Λ — *порядок в простой центральной алгебре* A, *который есть пересечение максимальных порядков и все локализации которого вполне* *разложимы, $S_{\mathfrak{p}}$ — структура неприводимых $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-модулей представлений, $d_{\mathfrak{p}} = \min d(a^*)$, где a^* пробегает все допустимые автоморфизмы $S_{\mathfrak{p}}$, для которых $d(a^*) > 0$. Предположим, что Λ удовлетворяет условию Эйхлера и пусть $K = g(\Lambda) = g(\overline{\Lambda})$, где $\overline{\Lambda}$ — максимальный порядок в A. Тогда $c(\Lambda) \simeq K/H$, где H — подгруппа, порожденная всеми классами $[\mathfrak{p}]^{d_{\mathfrak{p}}}$.*

Отметим, что в арифметическом случае $d_{\mathfrak{p}} = d$, где $d^2 = (A : k)$ почти для всех $\mathfrak{p}$ (для всех неразветвленных $\mathfrak{p}$, для которых $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \overline{\Lambda}_{\mathfrak{p}}$). То же имеет место и если $A \simeq M_d(k)$ (здесь $d_{\mathfrak{p}} = d$, как только $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \overline{\Lambda}_{\mathfrak{p}}$).

Полученный результат, в частности, можно применить к наследственным порядкам. В этом случае, как известно [2], $S_{\mathfrak{p}}$ линейно упорядочена, и если выбрать представителей $M_1, \ldots, M_t$ из классов изоморфизма неприводимых $\Lambda_{\mathfrak{p}}$-модулей представлений так, чтобы M_i был максимальным подмодулем в M_{i-1} $(i = 2, \ldots, t)$, а максимальный подмодуль M_{t+1} в M_t был изоморфен M_1, то $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ с точностью до изоморфизма характеризуется набором чисел $(m_1, \ldots, m_t)$, где $m_i = d(M_i, M_{i+1})$, причем этот набор определен с точностью до циклической перестановки. Поэтому здесь $d_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{k} m_i$, где k — такое наименьшее число, что $(m_1, \ldots, m_t) = (m_1, \ldots, m_k, m_1, \ldots, m_k, \ldots \ldots, m_1, \ldots, m_k)$. Это дает эффективный способ вычисления $d_{\mathfrak{p}}$ и, следовательно, $c(\Lambda)$ (если известна группа классов идеалов K). Число $d_{\mathfrak{p}}$ мы будем называть периодом последовательности $(m_1, \ldots, m_t)$. Заметим, что $m_1, \ldots, m_t$ — произвольный набор такой, что $\sum_{i=1}^{t} m_i = n$, если $A_{\mathfrak{p}} \simeq M_n(D)$, где D — тело. Таким образом, получаем

Следствие 3. *Пусть Λ — наследственный порядок в простой центральной алгебре A, удовлетворяющий условию Эйхлера. Предположим, что $A_{\mathfrak{p}} = M_{n_{\mathfrak{p}}}(D_{\mathfrak{p}})$, где $D_{\mathfrak{p}}$ — тело. Тогда Λ с точностью до изоморфизма определяется заданием следующих инвариантов:*

(1) *для каждого $\mathfrak{p}$ последовательности $m_{\mathfrak{p}} = (m_1, \ldots, m_t)$ такой, что $\sum_{i=1}^{t} m_i = n_{\mathfrak{p}}$, и для почти всех $\mathfrak{p}$ $m_{\mathfrak{p}} = (n_{\mathfrak{p}})$; последовательность $m_{\mathfrak{p}}$ определена с точностью до циклической перестановки;*

(2) *для каждого элемента* $\alpha \in K/H$, *где* $K = g(\bar{\Lambda})$ ($\bar{\Lambda}$ — *максимальный порядок в* A), *а* H — *подгруппа в* K, *порожденная классами* $[\mathfrak{p}]^{d_{\mathfrak{p}}}$, *где* $d_{\mathfrak{p}}$ — *период последовательности* $(m_1, \ldots, m_t)$.

Киевский государственный университет

Поступило 30.IV.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **80** (1965), 145—182.

[2] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В., О наследственных и бассовых порядках, Изв. АН СССР, Сер. матем., **31** (1967), 1415—1436.

[3] Завадский А. Г., Строение порядков, все представления которых вполне разложимы, Матем. заметки, **13**, № 3 (1973), 325—335.

[4] Джекобсон Н., Теория колец, М., ИЛ, 1947.

[5] Дрозд Ю. А., Адели и целочисленные представления, Изв. АН СССР, Сер. матем., **33** (1969), 1080—1088.

[6] Jacobinski H., Genera and decomposition of lattices over orders, Acta Math., **121** (1968), 1—29.

[7] Артин Э., Геометрическая алгебра, М., «Наука», 1969.

[8] Wang S., On the commutator group of a simple algebra, Amer. J. Math., **72** (1950), 323—334.

[9] Вейль А., Основы теории чисел, М., «Мир», 1972.

[10] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., «Наука», 1969.

[11] Hasse H., Ueber p-adische Schiefkörper und ihre Bedentung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., **104** (1931), 495—534.