-

Юрій Дрозд

# Вступ до алгебричної геометрії

2001

*Моїм жінкам - бабусі,*
*матусі й дружині.*

Цей посібник є записом лекцій з алгебричної геометрії, що їх читав автор у Київському Університеті та в Університеті Кайзерслаутерна. Потреба в ньому викликана відсутністю жодного підручника з цього предмету українською мовою. Втім, і російські (здебільшого перекладні) книжки не зовсім підходять для першого знайомства з ним. Вони вимагають вже деяких попередніх знань поза звичайною університетською освітою. Зокрема, вони найчастіше не містять необхідних відомостей з комутативної алгебри, яка є головним технічним засобом сучасної алгебричної геометрії. Тому читач мусить звертатися до додаткової літератури, яка, до того ж, не завжди доступна.

У читача цієї книжки ми передбачаємо лише володіння основами алгебри в об'ємі університетського курсу та первинними поняттями топології (на рівні означень). Необхідний матеріал з комутативної алгебри викладається разом з основами алгебричної геометрії. До речі, це сприяє й його засвоєнню, оскільки він не "зависає" в повітрі, а одразу починає працювати. Ми також знайомимо читача з поняттям *пучка*, дуже важливим в усій сучасній математиці, й ілюструємо на досить елементарних прикладах, як воно працює.

У книгу включено понад 100 задач різного рівня складності. Ми щиро рекомендуємо звертатися до них вже при першому читанні. Досвід доводить, що це є майже необхідною й достатньою умовою для активного засвоєння матеріалу. До більш складних з них наведено вказівки, які мають полегшити розв'язання. Серед вправ є й приклади, які ілюструють і конкретизують загальні теореми, є й такі, в яких викладено додаткові розділи теорії.

Опанувавши цей посібник, читач буде достатньо підготовлений як до вивчення більш складних підручників, серед яких ми рекомендуємо, в першу чергу, «Алгебраическую геометрию» Хартсхорна та «Основы алгебраической геометрии» Шафаревича, так і до роботи з оригінальними науковими статтями й монографіями.

Текст лекцій українською мовою з англійської переклала моя дружина Неллі, за що я їй щиро вдячний.

Розділ 1

# Афінні многовиди

## 1.1. Ідеали і многовиди. Теорема Гільберта про базу

Нехай $\mathbf{K}$ - алгебрично замкнене поле. Позначимо через $\mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$ (або $\mathbb{A}^n$, якщо $\mathbf{K}$ фіксоване) *$n$-вимірний афінний простір* над $\mathbf{K}$, тобто множину всіх $n$-ок $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ з компонентами з $\mathbf{K}$. Підмножина $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$ зветься *афінним алгебричним многовидом*, якщо вона збігається з множиною спільних нулів деякої сукупності многочленів $S = \{ F_1, F_2, \ldots, F_m \} \subseteq \mathbf{K}[ x_1, \ldots, x_n ]$. Позначимо цю множину через $V(S)$, або $V(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. Ми часто опускатимемо слово "алгебричний" і просто казатимемо "афінний многовид", тим більше, що ми майже ніколи не матимемо справу з іншими многовидами. Якщо $\mathbf{F}$ є підполем у $\mathbf{K}$, то через $X(\mathbf{F})$ позначають множину всіх точок многовиду $X$, координати яких належать $\mathbf{F}$.

Якщо $S$ складається з одного многочлена $F \neq 0$, многовид $V(S) = V(F)$ зветься *гіперповерхнею* в $\mathbb{A}^n$ (*плоскою кривою*, якщо $n = 2$; *просторовою поверхнею*, якщо $n = 3$).

Вправи 1.1.1. (1) Довести,що наступні підмножини в $\mathbb{A}^n$ є афінними алгебричними многовидами:
   (a) $\mathbb{A}^n$;
   (b) $\emptyset$;
   (c) $\{ a \}$ для кожної точки $a \in \mathbb{A}^n$.
   (d) $\left\{ (t^k, t^l) \mid t \in \mathbf{K} \right\} \subset \mathbb{A}^2$, де $k, l$ – фіксовані цілі числа.

(2) Припустимо,що $F = F_1^{k_1} \ldots F_s^{k_s}$, де $F_i$ – незвідні многочлени. Покладемо $X = V(F)$, $X_i = V(F_i)$. Показати, що $X = \bigcup_{i=1}^s X_i$.

(3) Нехай $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ – поле комплексних чисел, $\mathbb{R}$ – поле дійсних чисел. Намалювати множини точок $X(\mathbb{R})$ для плоскої кривої $X = V(F)$, де $F$ – наступні многочлени:
   (a) $x^2 - y^2$;
   (b) $y^2 - x^3$ ("кубіка з вістрям");
   (c) $y^2 - x^3 - x^2$; ("кубіка з вузлом");
   (d) $y^2 - x^3 - x$ ("гладка кубіка").

   (Ми пишемо, як завжди, $(x, y)$ замість $(x_1, x_2)$, так само у наступній вправі писатимемо $(x, y, z)$ замість $(x_1, x_2, x_3)$.)

(4) Намалювати множини точок $X(\mathbb{R})$ для просторових поверхонь $X = V(F)$, де $F$ – наступні многочлени:

(a) $x^2 - yz$;
(b) $xyz$;
(c) $x^2 - z^3$;
(d) $x^2 + y^2 - z^3$.

Ми часто позначаємо через $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$, де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, добуток $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$. Зокрема, многочлен з $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$ записується як скінченна сума

$$\sum_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}} \mathbf{x}^{\mathbf{m}}, \text{ де } \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n, \ \alpha_{\mathbf{m}} \in \mathbf{K}.$$

Множина многочленів $S$ визначає ідеал $\langle S \rangle = \langle F_1, F_2, \ldots, F_m \rangle \subseteq \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, який складається з усіх "формальних наслідків" цих многочленів, тобто всіх лінійних комбінацій $\sum_{i=1}^m H_i F_i$, де $H_i$ – деякі многочлени. Звичайно, якщо $G \in \langle S \rangle$ і $a \in V(S)$, тоді також $G(a) = 0$. Отже, якщо $S'$ – інша множина многочленів, така що $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$, то $V(S) = V(S')$. Тобто насправді афінний многовид скоріше визначається ідеалом кільця многочленів.

Взагалі кажучи, виникає питання, чи кожен такий ідеал визначає афінний многовид. Рівносильне питання – чи кожен ідеал в кільці многочленів має скінченну множину твірних. Це дійсно так, що доводить наступна теорема.

Теорема 1.1.2 (Теорема Гільберта про базу). *Припустимо, що кожен ідеал кільця* $\mathbf{A}$ *має скінченну множину твірних. Тоді те саме вірне і для кільця многочленів* $\mathbf{A}[x_1, \ldots, x_n]$ *при будь-якому* $n$.

Кільце $\mathbf{A}$, в якому кожен ідеал має скінченну множину твірних, зветься *нетеровим*. Отже Теорема Гільберта про базу твердить, що кільце многочленів над нетеровим кільцем є знову нетеровим. Оскільки кожен ідеал поля $\mathbf{K}$ або є $0$, або збігається з $\mathbf{K}$, він завжди є скінченно породженим (порожньою множиною у першому і $1$ в останньому випадку). Отже, всі кільця многочленів з коефіцієнтами з поля є нетеровими.

Доведення. Ясно, що досить довести теорему для $n = 1$ (далі працюють прості індуктивні міркування). Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$, де кільце $\mathbf{A}$ є нетеровим, і нехай $I$ – ідеал в $\mathbf{B}$. Позначимо через $I_d$ множину, яка складається зі старших коефіцієнтів усіх многочленів степеня $d$, які належать до $I$, і нульового елемента $\mathbf{A}$. Очевидно, $I_d$ є ідеалом в $\mathbf{A}$. Крім того, $I_d \subseteq I_{d+1}$: якщо $a$ є старшим коефіцієнтом многочлена $F$, то він є також старшим коефіцієнтом $xF$. Отже, об'єднання $I_\infty = \bigcup_d I_d$ є знову ідеалом в $\mathbf{A}$ (перевірте це!). Оскільки $\mathbf{A}$ є нетеровим, $I_\infty$ має скінченну множину твірних $T = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}$. Позначимо через $F_k$ многочлен з $I$ зі старшим коефіцієнтом $a_k$, $d_k = \deg F_k$, а через $D$ максімум усіх $d_k$. Кожен ідеал $I_d$ для $d < D$ є також скінченно породженим. Нехай

$T_d = \{ b_{id} \}$ – множина твірних $I_d$ і $G_{id}$ – многочлен степеня $d$ зі старшим коефіцієнтом $b_{id}$. Ми твердимо, що (скінченна) множина $S = \{ F_1, F_2, \dots, F_m \} \cup \{ G_{id} \mid d < D \}$ є множиною твірних $I$.

Саме, ми доведемо, що кожен многочлен $F \in I$ належить до $\langle S \rangle$, використовуючи індукцію за $d = \deg F$. Якщо $d = 0$, то $F \in I_0$ (оскільки він збігається зі своїм власним старшим коефіцієнтом). Отже, $F \in \langle T_0 \rangle$, тобто $F \in \langle S \rangle$. Припустимо, що наше твердження є дійсним для всіх многочленів степенів, менших за $d$, і нехай $F \in I$ – довільний многочлен степеня $d$. Розглянемо його старший коефіцієнт $a$. Якщо $d < D$, $a \in I_d$, то $a = \sum_i c_i b_{id}$ для деяких $c_i \in \mathbf{A}$. Тоді многочлен $F' = \sum_i c_i G_{id}$ належить до $\langle S \rangle$, $\deg F' = d$ і старший коефіцієнт $F'$ є також $a$. Отже, $\deg(F - F') < d$. Звичайно, $F - F' \in I$, отже, $F - F' \in \langle S \rangle$ і $F = F' + (F - F')$ також належить до $\langle S \rangle$.

Припустимо тепер, що $d \geqslant D$. Через те, що $a \in I_\infty$, маємо: $a = \sum_k c_k a_k$ для деяких $c_k$. Покладемо $F' = \sum_k c_k x^{d-d_k} F_k$. Знову $F' \in \langle S \rangle$ і має той самий степінь і той самий старший член що й $F$. Тому, так само, як і вище, $F - F'$, а тому й $F$, також належать до $\langle S \rangle$. □

Цей результат дає нам можливість визначити афінний алгебричний многовид $V(I)$ для кожного ідеала $I \subseteq \mathbf{K}[ x_1, \dots, x_n ]$ як $V(S)$ для деякої (отже, й довільної) скінченної системи твірних $I$.

Вправи 1.1.3. (1) Довести, що коли $X_i \subseteq \mathbb{A}^n$ $(i \in S)$ є афінними многовидами, то також і $\bigcap_{i \in S} X_i$ є афінним многовидом. Якщо $S$ є скінченна, тоді також $\bigcup_{i \in S} X_i$ є афінним многовидом. Отже, афінні многовиди можуть розглядатись як замкнені підмножини деякої топології на $\mathbb{A}^n$. Цю топологію звуть *топологією Зариського* .

*Вказівка*: Довести, що коли $X_i = V(I_i)$, то $\bigcap_i X_i = V(\sum_i I_i)$; якщо множина $S$ скінченна, то $\bigcup_i V_i = V(\prod_i I_i)$.

(2) Знайти всі замкнені множини в топології Зариського на афінній прямій $\mathbb{A}^1$.

(3) Показати, що коли $C \subset \mathbb{A}^2$ – нескінченна замкнена множина в топології Зариського, то вона містить плоску криву.

*Вказівка*: Використайте результанти.

(4) Нехай $\mathbf{F}$ – нескінченне підполе в $\mathbf{K}$. Довести, що $\mathbb{A}^n(\mathbf{F})$ є щільною в $\mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$ у топології Зариського.

(5) Нехай $\mathbf{F}$ – скінченне підполе в $\mathbf{K}$, яке складається з $q$ елементів. Знайти всі многочлени $F \in \mathbf{K}[ \mathbf{x} ]$, такі що $F(\mathbf{a}) = 0$ для всіх $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n(\mathbf{F})$.

Вправи 1.1.3 показують, що топологія Зариського є досить незвичною; в усякому випадку, вона є негаусдорфовою, якщо многовид $X$ нескінченний. Тим не менш, вона корисна для цілей алгебричної геометрії, й тому ми завжди розглядатимемо афінний многовид $X \subseteq \mathbb{A}^n$ як топологічний простір з топологією Зариського, тобто топологією на $X$, індукованою топологією Зариського простору $\mathbb{A}^n$.

Зауваження. Якщо $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ є полем комплексних чисел, афінний простір, а отже й кожен афінний многовид, може розглядатися також як топологічний простір зі "звичайною" (Евклідовою) топологією. Хоча вона є дуже важливою і широко використовується в комплексній алгебричній геометрії, ми будемо згадувати про неї лише в деяких вправах.

### 1.2. Регулярні функції та регулярні відображення

Нехай $X = V(S)$ – афінний многовид. Функція $f : X \to \mathbf{K}$ зветься *регулярною* якщо вона є обмеженням на $X$ деякої поліноміальної функції, тобто функції $\mathbb{A}^n \to \mathbf{K}$, яка відображує точку $a$ в $F(a)$, де $F \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$. Очевидно, якщо $f$ і $g$ є дві поліноміальні функції на $X$, їх (поточкові) сума й добуток є також поліноміальними функціями. Отже, всі регулярні функції утворюють $\mathbf{K}$-алгебру $\mathbf{K}[X]$, яка зветься *алгеброю регулярних функцій*, або *координатною алгеброю* афінного многовиде $X$. Оскільки поле $\mathbf{K}$ є нескінченним, многочлен $F$ повністю визначається відповідною поліноміальною функцією. Тому ми не розрізняємо їх і часто кажемо про "обмеження многочлена," "значення многочлена," і т.і.

Звичайно, відображення $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbf{K}[X]$, яке ставить у відповідність многочлену $F$ функцію $a \mapsto F(a)$, є гомоморфізмом алгебр і навіть епіморфізмом. Тому $\mathbf{K}[X] \simeq \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$, де $I(X)$ – ідеал, який складається з усіх многочленів $F$, таких що $F(a) = 0$ для кожної точки $a \in X$. Цей ідеал зветься *визначальним ідеалом* афінного многовиду $X$.

Твердження 1.2.1. (1) *Для кожної точки $a \in X$ "відображення обчислення" $f \mapsto f(a)$ є гомоморфізмом $\mathbf{K}$-алгебр $v_a : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}$.*

(2) *Навпаки, для кожного гомоморфізму $\mathbf{K}$-алгебр $\alpha : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}$ існує єдина точка $a \in X$ така, що $\alpha(f) = f(a)$ для всіх $f \in \mathbf{K}[X]$.*

Доведення. Перше твердження очевидне. Розглянемо деякий гомоморфізм $\alpha : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}$. Позначимо через $\xi_i$ обмеження на $X$ многочлена $x_i$ (" $i$-та координатна функція"). Очевидно, функції $\xi_i$ $(i = 1, \dots, n)$ породжують $\mathbf{K}[X]$ як $\mathbf{K}$-алгебру. Покладемо $a_i = \alpha(\xi_i)$ і $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Якщо $F$ – деякий многочлен з $I(X)$, то $F(a) = \alpha(F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$, оскільки $\alpha$ є гомоморфізмом алгебр. Але при ототожненні $\mathbf{K}[X]$ з $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ останнє значення збігається з классом $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто дорівнює 0. Тому $a \in X$. Крім того, за означенням, $\xi_i(a) = \alpha(\xi_i)$, звідки

$f(a) = \alpha(f)$, оскільки $\xi_i$ породжують алгебру $\mathbf{K}[X]$. Якщо $b$ – інша точка, така що $\alpha(f) = f(b)$ для всіх регулярних функцій $f$, тоді, зокрема, $\xi_i(b) = \alpha(\xi_i) = a_i$, тобто всі координати $b$ збігаються з координатами $a$, отже, $b = a$. $\square$

Нехай $Y$ – інший афінний многовид і $f : Y \to X$ – деяке відображення. Якщо $a \in Y$, то $f(a)$ є точкою $\mathbb{A}^n$, отже, визначені її координати $f_1(a), \dots, f_n(a)$. Інакше кажучи, $f$ визначає $n$ "координатних відображень" $f_i : Y \to \mathbf{K}$. Відображення $f$ називають *регулярним*, або *морфізмом афінних многовидів*, якщо всі ці координатні відображення є регулярними функціями.

Очевидно, якщо $f : Y \to X$ і $g : Z \to Y$ є регулярними відображеннями афінних многовидів, їхня композиція $f \circ g : Z \to X$ є також регулярним відображенням. Як завжди, регулярне відображення $f$, яке має регулярне обернене $f^{-1}$, зветься *ізоморфізмом* афінних многовидів. Якщо існує ізоморфізм $f : X \xrightarrow{\sim} Y$, многовиди $X$ і $Y$ звуть *ізоморфними* й пишуть $X \simeq Y$.

Твердження 1.2.2. (1) *Відображення $f : Y \to X$ є регулярним тоді й лише тоді, коли функція $\varphi \circ f : Y \to \mathbf{K}$ є регулярною для кожної регулярної функції $\varphi : X \to \mathbf{K}$. Крім того, відображення $f^* : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}[Y]$, таке що $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, є гомоморфізмом $\mathbf{K}$-алгебр.*

(2) *Навпаки, кожен гомоморфізм $\mathbf{K}$-алгебр $\mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}[Y]$ збігаєтьcя з $f^*$ для единого регулярного відображення $f : Y \to X$.*

Доведення. Якщо $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$, де $f_i$ є обмеженням на $Y$ деякого многочлена $F_i$, а $\varphi$ – обмеження на $X$ многочлена $G$, то $\varphi \circ f$ є обмеженням на $Y$ многочлена $G(F_1(a), \dots, F_n(a))$, тобто регулярною функцією. Навпаки, припустимо, що $\varphi \circ f$ – регулярна функція для кожного $\varphi \in \mathbf{K}[X]$. Нехай $\varphi = x_i$ – $i$-та координатна функція на $\mathbb{A}^n$. Тоді $\varphi \circ f(a)$ є $i$-тою координатою точки $f(a)$. Отже, всі ці координати є регулярними функціями і відображення $f$ є регулярнним. Очевидно, що $(\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f$ і $(\varphi\psi) \circ f = (\varphi \circ f)(\psi \circ f)$, тобто $f^*$ дійсно є гомоморфізмом $\mathbf{K}$-алгебр.

Нехай тепер $\gamma : \mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}[Y]$ – деякий гомоморфізм $\mathbf{K}$-алгебр і $a \in Y$. Тоді композиція $v_a \circ \gamma$, де $v_a$ є відображенням обчислення, є гомоморфізмом $\mathbf{K}[X] \to \mathbf{K}$, отже, визначає єдину точку $b \in X$, таку що $v_a \circ \gamma = v_b$. Тому існує єдине відображення $f : Y \to X$, таке що $v_a \circ \gamma = v_{f(a)}$ для кожного $a \in Y$. Зокрема, якщо $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$, то $f_i(a) = v_{f(a)}(\xi_i) = v_a(\gamma(\xi_i)) = \gamma(\xi_i)(a)$, де $\xi_i$ є координатними функціями на $X$. Оскільки це є вірним для кожної точки $a \in Y$, ми одержуємо, що $f_i = \gamma(\xi_i)$ є регулярними функціями на $Y$, тобто $f$ є регулярним відображенням і $\gamma(\xi_i) = f^*(\xi_i)$. Оскільки $\xi_i$ породжують $\mathbf{K}[X]$, $\gamma = f^*$. Єдиність $f$ очевидна. $\square$

Наслідок 1.2.3. *Афінні алгебричні многовиди $X$ і $Y$ ізоморфні тоді й лише тоді, коли алгебри $\mathbf{K}[X]$ і $\mathbf{K}[Y]$ ізоморфні. Більш того, морфізм $f : X \to Y$ є ізоморфізмом тоді й лише тоді, коли відображення $f^*$ є ізоморфізмом.*

Вправи 1.2.4.
(1) Для кожної регулярної функції $f$ на афінному многовиді $X$, покладемо $D(f) = \{\, x \in X \mid f(x) \neq 0 \,\}$. Множини $D(f)$ звуться *головними відкритими множинами* (многовиду $X$). Довести, що головні відкриті множини утворюють базу топології Зариського, тобто перетин головних відкритих множин знов є головною відкритою множиною і кожна відкрита множина є об'єднанням головних відкритих множин.
(2) Довести, шо кожне регулярне відображення є неперервним (в топології Зариського).
(3) *Афінне перетворення* $\mathbb{A}^n$ – це відображення $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ вигляду $a \mapsto Aa + b$, де $A$ – обертовна $n \times n$ матриця, а $b$ – фіксований вектор. Покажіть, що таке перетворення є автоморфізмом $\mathbb{A}^n$ (тобто ізоморфізмом на себе).
(4) Покажіть, що єдиними автоморфізмами афінної прямої $\mathbb{A}^1$ є афінні перетворення. Чи є це вірним і при $n > 1$?
(5) Розгляньте плоскі криві, задані наступними рівняннями:
   (a) $x^2 - y$;
   (b) $xy$;
   (c) $xy - 1$;
   (d) $x^2 - y^3$.

   Доведіть, що вони є попарно неізоморфними. Яка з них ізоморфна афінній прямій?
(6) Нехай $X$ – плоска крива, визначена рівнянням $x^2 - y^3$, $f : \mathbb{A}^1 \to X$ – регулярне відображення, таке що $f(\lambda) = (\lambda^3, \lambda^2)$ для кожного $\lambda \in \mathbf{K}$. Довести, що $f$ є бієктивним, але обернене до нього відображення не є регулярним.
(7) Припустимо, що $\operatorname{char} \mathbf{K} = p$ – додатнє первинне число. Покажіть, що відображення $\Phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, таке що $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p)$, є регулярним і бієктивним, але обернене до нього не є регулярним. Це відображення зветься *Фробеніусовим відображенням*.
(8) За умов попередньої вправи, припустимо, що $X = X(S)$ для деякої множини $S \subseteq \mathbf{F}[\,\mathbf{x}\,]$, де $\mathbf{F}$ — первинне підполе $\mathbf{K}$. Покажіть, що $\Phi(X) = X$, де $\Phi$ – Фробеніусове відображення.

## 1.3. Теорема Гільберта про нулі

Вище ми побудували віповідність між ідеалами $I$ кільця многочленів $\mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,]$ і афінними многовидами $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$: кожному ідеалу $I$ відповідає многовид $V(I)$ його нулів і кожному многовиду $X$ відповідає ідеал $I(X)$ многочленів, які обертаються в нуль на $X$. Очевидно, що $V(I(X)) = X$: якщо точка $a$ не належить до $X$, тоді, за означенням, існує многочлен $F$, який обертається в нуль на $X$ (отже, належить $I(X)$) але не обертається в нуль в $a$; отже, $a \notin V(I(X))$. З іншого боку, прості приклади показують, що можливо $I(V(I)) \neq I$. Наприклад, якщо $I = \langle F^2 \rangle$ для деякого многочлена $F$, то $F \in I(V(I))$, але $F \notin I$.

Вправа 1.3.1. Припустимо, що $I = \langle F \rangle$. Знайти $I(V(I))$, використовуючи розклад $F$ у добуток незвідних многочленів (нагадаємо, що такий розклад єдиний з точністю до перестановки і сталих множників).

Останній приклад можно легко узагальнити. А саме, позначимо через $\sqrt{I}$ множину всіх многочленів $F$, таких що $F^k \in I$ для деякого цілого $k$. Ця множина зветься *коренем* ідеала $I$.

Вправа 1.3.2. Перевірте, що $\sqrt{I}$ знову є ідеалом.

Очевидно, $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$. Визначна теорема Гільберта показує, що ці два ідеали насправді збігаються.

Теорема 1.3.3 (Теорема Гільберта про нулі). *Якщо поле* $\mathbf{K}$ *алгебрично замкнене, то* $I(V(I)) = \sqrt{I}$ *для кожного ідеала* $I \subseteq \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Ідеал $I$ кільця $\mathbf{A}$ зветься *радикальним ідеалом*, якщо $I = \sqrt{I}$. Зокрема, Теорема Гільберта про нулі твердить, що ідеал $I \subseteq \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ є визначальним ідеалом афінного многовиду тоді й лише тоді, коли він є радикальним ідеалом.

Спочатку відмітимо наступний спеціальний випадок цієї теореми.

Наслідок 1.3.4. $V(I) = \emptyset$ *тоді й лише тоді, коли* $I = \langle 1 \rangle = \mathbf{K}[x_1, \ldots x_n]$.

Дійсно, $V(I) = \emptyset$ означає, що всі многочлени обертаються в нуль на $V(I)$. Зокрема, $1 \in I(V(I))$. Але це означає, що $1 \in I$ оскільки $1^k = 1$. Тоді, звичайно, $I$ містить всі многочлени. Обернене твердження є очевидним.

Наступний трюк показує, що Теорема Гільберта про нулі в дійсності є наслідком цього спеціального випадку.

Твердження 1.3.5 (Лема Рабіновича). *Якщо має місце Наслідок 1.3.4, то має місце й Теорема 1.3.3.*

Доведення. Нехай $F \in I(V(I))$. Розглянемо ідеал $J \subseteq \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, породжений всіма многочленами з $I$ і ще многочленом

$x_{n+1}F - 1$. Очевидно, $V(J) = \emptyset$. Отже, $1 \in J$, тобто

$$1 = \sum_{i=1}^{m} H_i F_i + H_{m+1}(x_{n+1}F - 1) \tag{1.3.1}$$

для деяких многочленів $H_i \in \mathbf{K}[\,x_1, \ldots, x_{n+1}\,]$ і деяких многочленів $F_i \in I$. Рівність (1.3.1) є формальною рівністю многочленів, отже, ми можемо замінити в ній змінні $x_i$ на будь-які значення, взяті з довільної $\mathbf{K}$-алгебри. Замінивши $x_{n+1}$ на $1/F$, ми одержимо:

$$1 = \sum_{i=1}^{m} H_i(x_1, \ldots, x_n, 1/F) F_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Домноживши ці рівності на спільний знаменник, який дорівнює $F^k$ для деякого цілого $k$, ми одержимо, що $F^k = \sum_{i=1}^{m} G_i F_i \in I$, де $G_i$ позначає $F^k H_i(x_1, \ldots, x_n, 1/F)$. $\square$

Тепер ми будемо доводити наслідок 1.3.4 (який також часто зветься "Теоремою про нулі"). Більш того, ми сформулюємо еквівалентне твердження, яке буде дійсним для *будь-якого* поля $\mathbf{K}$, а не лише для алгебрично замкненого. (І в залишку цього розділу, так само, як у наступному, ми не передбачаємо поле $\mathbf{K}$ алгебрично замкненим.)

Спочатку зробимо наступні прості зауваження.

Твердження 1.3.6. *Нехай $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ – зростаючий ланцюг ідеалів нетерового кільця (наприклад, $\mathbf{K}[\,x_1, \ldots, x_n\,]$). Тоді він стабілізується, тобто існує число $r$, таке що $I_r = I_s$ для всіх $s > r$.*

Доведення. Як ми зауважили раніше, об'єднання $I = \bigcup_i I_i$ є знову ідеалом. Оскільки кільце є нетеровим, $I = \langle\, a_1, \ldots, a_m \,\rangle$ для деякої скінченної множини. Кожен $a_k$ належить до деякого ідеала $I_{i_k}$. Покладемо $r = \max_k i_k$; очевидно, $I_r = I = I_s$ для всіх $s > r$. $\square$

Наслідок 1.3.7. *Для кожного власного ідеала $I \subset \mathbf{A}$ нетерового кільця $\mathbf{A}$ існує максимальний ідеал, який містить $I$.*

Нагадаємо, що *максимальний ідеал* – це власний ідеал $J \subset \mathbf{A}$, такий що не існує власних ідеалів $J'$ з $J \subset J'$.

Доведення. Якщо $I$ не є максимальним, то існує власний ідеал $I_1 \supset I$. Якщо $I_1$ не є максимальним, то існує власний ідеал $I_2 \supset I_1$, і т.д. Отже, якщо не існує максимального ідеала, який містить $I$, ми одержимо зростаючий ланцюг ідеалів, який ніколи не стабілізується. Це протирічить твердженню 1.3.6. $\square$

Зауваження. Насправді, останній наслідок є дійсним для *будь-якого* кільця, незалежно від того, чи є воно нетеровим, чи ні, але доведення цього потребує деякої "трансфінітної" теоретико-множинної техніки, подібної до леми Цорна або чогось еквівалентного. Ми ніколи не будемо використовувати це для не-нетерових кілець.

Твердження 1.3.8. *Якщо* $0$ *є єдиним власним ідеалом кільця* $\mathbf{A}$*, то* $\mathbf{A}$ *є полем.*

Доведення. Нехай $a \neq 0$ – елемент $\mathbf{A}$, $I = \langle a \rangle$. Оскільки $I \neq 0$, $I = \mathbf{A}$. Зокрема, $1 \in I$, тобто існує елемент $b \in \mathbf{A}$, такий що $ab = 1$; отже, $a$ є обертовним. □

Наслідок 1.3.9. *Власний ідеал* $I \subset \mathbf{A}$ *є максимальним тоді й лише тоді, коли* $\mathbf{A}/I$ *є полем.*

Доведення. $I$ є максимальним тоді й лише тоді, коли в $\mathbf{A}/I$ немає власних ідеалів, за вийнятком $0$. □

Тепер ми готові переформулювати наслідок 1.3.4 в такий спосіб:

Теорема 1.3.10. *Якщо* $I$ *– максимальний ідеал кільця многочленів* $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$*, де* $\mathbf{K}$ *є будь-яким полем, то поле* $\mathbf{K}[\mathbf{x}]/I$ *є алгебричним розширенням* $\mathbf{K}$.

Покажемо, що ця теорема дійсно містить в собі наслідок 1.3.4. Дійсно, нехай $I$ – власний ідеал з $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$, де $\mathbf{K}$ є алгебрично замкненим, і $J$ – максимальний ідеал, який містить $I$. Оскільки $\mathbf{K}$ не має власних алгебричних розширень, то $\mathbf{K}[\mathbf{x}]/J = \mathbf{K}$. Отже, ми одержуємо гомоморфізм $\mathbf{K}[\mathbf{x}] \to \mathbf{K}$ з ядром $J \supseteq I$, або, що те саме, гомоморфізм $\mathbf{K}[\mathbf{x}]/I \to \mathbf{K}$. Тоді твердження 1.2.1 показує, що $V(I) \neq \emptyset$.

Ми переформулюємо теорему 1.3.10 ще раз. Зауважимо, що фактор-алгебра $\mathbf{K}[\mathbf{x}]/I$ для кожного ідеала $I$ є скінченно породженою $\mathbf{K}$-алгеброю. Беручи до уваги наслідок 1.3.9, ми бачимо, що теорема 1.3.10 еквівалентна наступній:

Теорема 1.3.11. *Якщо скінченно породжена* $\mathbf{K}$*-алгебра* $\mathbf{A}$ *є полем, вона є алгебричним розширенням поля* $\mathbf{K}$.

Останню теорему буде доведено в наступному розділі з використанням досить сильної й важливої техніки, яка зветься "цілою залежністю" і "нетеровою нормалізацією."

## 1.4. Ціла залежність

*В цьому розділі ми не вважаємо поле* $\mathbf{K}$ *алгебрично замкненим.*

Означення 1.4.1. Нехай $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ – розширення кілець.

(1) Елемент $b \in \mathbf{B}$ зветься *цілим над* $\mathbf{A}$, якщо $F(b) = 0$ для деякого многочлена $F \in \mathbf{A}[x]$ зі старшим коефіцієнтом $1$.

(2) Кільце $\mathbf{B}$ зветься *цілим розширенням* $\mathbf{A}$, якщо кожен елемент $\mathbf{B}$ є цілим над $\mathbf{A}$.

Якщо $\mathbf{A}$ є полем, "цілі елементи" збігаються з "алгебричними," оскільки ми завжди можемо поділити будь-який ненульовий многочлен на його старший коефіцієнт. Дійсно, ми побачимо, що багато рис цілих розширень кілець подібні до алгебричних розширень полів. Перш, ніж вивчати це поняття більш детально, ми покажемо, як воно використовується для доведення теореми Гільберта про нулі. Спочатку зробимо наступне просте зауваження.

Твердження 1.4.2. *Припустимо, що ціле розширення* $\mathbf{B}$ *кільця* $\mathbf{A}$ *є полем. Тоді* $\mathbf{A}$ *є також полем.*

Доведення. Нехай $a$ – ненулевий елемент $\mathbf{A}$, $b = a^{-1}$ – його обернений в полі $\mathbf{B}$. Оскільки останній є цілим над $\mathbf{A}$, існують такі елементи $c_i \in \mathbf{A}$, що $b^m + c_1 b^{m-1} + \cdots + c_m = 0$. Помноживши цю рівність на $a^{m-1}$, ми одержимо: $b = -c_1 - \cdots - c_m a^{m-1} \in \mathbf{A}$, отже, $a$ обертовний в $\mathbf{A}$. □

Наступний результат грає вирішальну роль у доведенні теореми Гільберта про нулі, а також і в теорії розмірностей алгебричних многовидів.

Теорема 1.4.3 (Нормалізаційна лема Нетера). *Якщо* $\mathbf{B}$ *– скінченно породжена* $\mathbf{K}$*-алгебра, то існує підалгебра* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, *ізоморфна до алгебри многочленів* $\mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_d\,]$ *і така, що* $\mathbf{B}$ *є цілим розширенням* $\mathbf{A}$.

З останньої теореми одразу випливає й теорема про нулі. Дійсно, припустимо, що $\mathbf{B}$ є полем. Тоді $\mathbf{A}$ є також полем, як випливає з твердження 1.4.2, отже, $d = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ і $\mathbf{B}$ є алгебричним розширенням $\mathbf{K}$.

Для доведення нормалізаційної леми Нетера (а з нею й Теореми Гільберта про нулі) нам потрібні деякі елементарні властивості цілих розширень, а також модулів над нетеровими кільцями. Нагадаємо наступне означення.

Означення 1.4.4. *Модулем* над кільцем $\mathbf{A}$ (або $\mathbf{A}$-*модулем*) зветься абелева група $M$ разом із "правилом множення" $\mathbf{A} \times M \to M$, $(a, v) \mapsto av$, таким що виконуються наступні умови:

(1) $a(bv) = (ab)v$ для всіх $a, b \in \mathbf{A}$ і $v \in M$.
(2) $1v = v$ для кожного $v \in M$.
(3) $(a + b)v = av + bv$ для всіх $a, b \in \mathbf{A}$ і $v \in M$.
(4) $a(u + v) = au + av$ для всіх $a \in \mathbf{A}$ і $u, v \in M$.

Зауважимо, що коли $\mathbf{A}$ є полем, це поняття збігається з поняттям векторного простору над $\mathbf{A}$. Звичайно, будь-яке розширення $\mathbf{B}$ кільця $\mathbf{A}$ може розглядатися як $\mathbf{A}$-модуль, так само, як будь-який ідеал кільця $\mathbf{A}$. Можна також означати в звичайний спосіб поняття *підмодуля, фактор-модуля*, і т.д., і ми будемо вільно користуватися ними, так само, як і їхніми елементарними властивостями, що є такими ж, як і для абелевих груп або векторних просторів. Зокрема, ідеал кільця $\mathbf{A}$ – це підмодуль $\mathbf{A}$, розглядуваного як модуль над собою.

ОЗНАЧЕННЯ 1.4.5. Нехай $M$ – модуль над кільцем $\mathbf{A}$.

(1) Підмножина $S \subseteq M$ зветься *породжуючою множиною* модуля $M$, якщо для кожного $v \in M$ існують елементи $a_i \in \mathbf{A}$ і $u_i \in S$, такі що $v = \sum_i a_i u_i$.
(2) Модуль зветься *скінченно породженим*, якщо він має скінченну породжуючу множину.
(3) Для кожної підмножини $S \subseteq M$ позначимо через $\langle S \rangle$, або $\langle S \rangle_{\mathbf{A}}$, якщо необхідно уточнити кільце, *підмодуль* $M$, *породжений* множиною $S$, тобто множину всіх лінійних комбінацій $\sum_i a_i u_i$, де $a_i$ пробігає $\mathbf{A}$, а $u_i$ пробігає $S$.
(4) Модуль $M$ зветься *нетеровим*, якщо кожен підмодуль $N \subseteq M$ є скінченно породженим, тобто має скінченну породжуючу множину.

Зокрема, кільце $\mathbf{A}$ є нетеровим тоді й лише тоді, коли воно є нетеровим як модуль над собою.

ТВЕРДЖЕННЯ 1.4.6. (1) *Кожен підмодуль і фактор-модуль нетерового модуля є нетеровим.*
(2) *Якщо підмодуль $N$ модуля $M$ і фактор-модуль $M/N$ є нетеровими, то $M$ є також нетеровим.*
(3) *Якщо кільце $\mathbf{A}$ є нетеровим, то кожен скінченно породжений $\mathbf{A}$-модуль є також нетеровим.*

ДОВЕДЕННЯ. Нехай $M$ – $\mathbf{A}$-модуль, $N$ – його підмодуль і $L = M/N$.

*1.* Очевидно, що коли $M$ є нетеровим, $N$ є також нетеровим. Розглянемо будь-який підмодуль $L' \subseteq L$. Він має вигляд $N'/N$ для деякого підмодуля $N'$, такого що $N' \supseteq N$. Оскільки $M$ є нетеровим, $N'$ має скінченну породжуючу множину $\{ u_1, u_2, \dots, u_r \}$. Тоді множина класів $\{ u_1 + N, \dots, u_r + N \}$ є породжуючою для $L'$. Отже, $L$ є нетеровим.

*2.* Припустимо, що $N$ і $L$ є нетеровими. Нехай $M'$ – будь-який підмодуль $M$. Тоді $M' \cap N$ має скінченну породжуючу множину $\{ u_1, u_2, \dots, u_r \}$. Фактор-модуль $M'/(M' \cap N)$, ізоморфний до підмодуля $(M' + N)/N \subseteq M/N$, також має скінченну породжуючу множину $\{ w_1, w_2, \dots, w_t \}$. Нехай $w_i = v_i + (M' \cap N)$. Ми покажемо, що множина $\{ v_1, v_2, \dots, v_t, u_1, u_2, \dots, u_r \}$ є породжуючою для $M'$.

Дійсно, розглянемо будь-який елемент $v \in M'$ і його клас $w = v + (M' \cap N)$ в $M'/(M' \cap N)$. Тоді $w = \sum_i a_i w_i$ для деяких $a_i \in \mathbf{A}$.

Покладемо $v' = \sum_i a_i v_i$. Клас елемента $v - v'$ у фактор-модулі $M'/(M' \cap N)$ є нулем, тобто $v - v' \in M' \cap N$. Тому $v - v' = \sum_j b_j u_j$ для деяких $b_j \in \mathbf{A}$, звідки $v = \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j u_j$.

*3.* Припустимо тепер, що кільце $\mathbf{A}$ є нетеровим. Розглянемо будь-яку скінченну породжуючу множину $S = \{ u_1, u_2, \dots, u_r \}$ модуля $M$. Доведемо, що $M$ є нетеровим, використовуючи індукцію за $r$. Якщо $r = 1$, відображення $\varphi : \mathbf{A} \to M$, таке що $\varphi(a) = au_1$ є епіморфізмом, отже, $M \simeq \mathbf{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ є нетеровим. Припустимо, що це твердження є дійсним для модулів, які мають $r-1$ твірний. Покладемо $N = \langle u_1, u_2, \dots, u_{r-1} \rangle$. Тоді $N$ є нетеровим, а $M/N$ породжується одним елементом $u_r + N$. Отже, $M/N$, а тоді й $M$, є також нетеровими. $\square$

Використаємо тепер ці факти для встановлення деяких властивостей цілих розширень. Ми також користуватимемося наступними поняттями.

Означення 1.4.7. Нехай $M$ – $\mathbf{A}$-модуль.

(1) Для кожної підмножини $S \subseteq M$ назвемо *анулятором* $S$ в $\mathbf{A}$ множину $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(S) = \{ a \in \mathbf{A} \mid au = 0 \text{ для всіх } u \in S \}$.
(2) Для кожної підмножини $T \subseteq \mathbf{A}$ назвемо *анулятором* $T$ в $M$ множину $\operatorname{Ann}_M(T) = \{ u \in M \mid au = 0 \text{ для всіх } a \in T \}$.
(3) Модуль $M$ зветься *точним*, якщо $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(M) = 0$.

Твердження 1.4.8. *Нехай $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ – розширення кілець, $b \in \mathbf{B}$. Наступні умови рівносильні:*

(1) *Елемент $b \in \mathbf{B}$ є цілим над $\mathbf{A}$.*
(2) *Підкільце $\mathbf{A}[b]$ є скінченно породженим $\mathbf{A}$-модулем.*
(3) *Існує скінченно породжений $\mathbf{A}$-підмодуль $M \subseteq \mathbf{B}$, такий що $bM \subseteq M$ і $1 \in M$.*
(4) *Існує скінченно породжений $\mathbf{A}$-підмодуль $M \subseteq \mathbf{B}$, такий що $bM \subseteq M$ і $\operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(M) = 0$.*

Доведення. *1⇒2*: Якщо $b^m + a_1 b^{m-1} + \dots + a_m = 0$, де $a_i \in \mathbf{A}$, то $\{ 1, b, \dots, b^{m-1} \}$ є породжуючою множиною $\mathbf{A}[b]$ як $\mathbf{A}$-модуля.

*2⇒3*: Можна покласти $M = \mathbf{A}[b]$.

*3⇒4* тривіально.

*4⇒1*: Нехай $\{ u_1, u_2, \dots, u_m \}$ – породжуюча множина $M$. Тоді $bu_j = \sum_i a_{ij} u_i$ для деяких $a_{ij} \in \mathbf{A}$ ($j = 1, \dots, m$). Запишемо ці рівності в матричній формі: $(bI - A)\mathbf{u} = 0$, де $A = (a_{ij})$, $I$ – одинична матриця розміру $m \times m$, а $\mathbf{u}$ – це стовпчик $(u_1, u_2, \dots, u_m)^\top$. Домноживши останню рівність на *приєднану* матрицю $\widetilde{(bI - A)}$, одержимо: $\det(bI - A)\mathbf{u} = 0$, або $\det(bI - A)u_i = 0$ для всіх $i$. Тоді $\det(bI - A)M = 0$, звідки $\det(bI - A) = 0$. Але $\det(bI - A)$ має вигляд $b^m + c_1 b^{m-1} + \dots + c_m$, де $c_i \in \mathbf{A}$. Отже, $b$ є цілим над $\mathbf{A}$. $\square$

Наслідок 1.4.9. *Нехай* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *– розширення кілець.*

(1) *Множина всіх елементів з* $\mathbf{B}$*, цілих над* $\mathbf{A}$*, є підкільцем* $\mathbf{B}$. Це підкільце зветься *цілим замиканням* $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$.
(2) *Якщо* $\mathbf{B}$ *ціле над* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{C} \supseteq \mathbf{B}$ *– розширення* $\mathbf{B}$ *й елемент* $c \in \mathbf{C}$ *цілий над* $\mathbf{B}$*, то* $c$ *є також цілим над* $\mathbf{A}$*. Зокрема, якщо* $\mathbf{B}$ *ціле над* $\mathbf{A}$ *і* $\mathbf{C}$ *ціле над* $\mathbf{B}$*, то* $\mathbf{C}$ *є також цілим над* $\mathbf{A}$.

Доведення. *1.* Нехай $b, c \in \mathbf{B}$ цілі над $\mathbf{A}$. Знайдемо скінченно породжені $\mathbf{A}$-підмодулі $M, N \subseteq \mathbf{B}$, такі що $bM \subseteq M$, $cN \subseteq N$, причому $M$ і $N$ містять $1$. Розглянемо множину $MN = \{\sum_i u_i v_i \mid u_i \in M, v_i \in N\}$. Можна легко перевірити, що вона також є скінченно породженим $\mathbf{A}$-підмодулем і $1 \in MN$. Більш того, $bMN \subseteq MN$ і $cMN \subseteq MN$, звідки $(b+c)MN \subseteq MN$ і $(bc)MN \subseteq MN$. Отже, $b+c$ і $bc$ є цілими над $\mathbf{A}$.

*2.* Нехай $c^m + b_1 c^{m-1} + \dots + b_m = 0$, де $b_i \in \mathbf{B}$. Як і вище, знайдемо скінченно породжений $\mathbf{A}$-підмодуль $M \subseteq \mathbf{B}$, такий що $b_i M \subseteq M$ для всіх $i = 1, \dots, m$ і $1 \in M$. Покладемо $N = \sum_{i=0}^{m-1} c^i M$. Це скінченно породжений $\mathbf{A}$-підмодуль в $\mathbf{C}$, який містить $1$, і $cN \subseteq N$. Отже, $c$ є цілим над $\mathbf{A}$. □

Для доведення нормалізаційної леми Нетера нам потрібен наступний простий факт про алгебру многочленів.

Лема 1.4.10. *Нехай* $F \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ *– многочлен додатнього степеня. Існує автоморфізм* $\varphi$ *алгебри многочленів* $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$*, такий що*

$$\varphi(F) = \lambda x_n^d + \sum_{i=1}^{d-1} G_i x_n^i, \tag{1.4.1}$$

*де* $G_i \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$*, а* $\lambda \neq 0$ *є елементом поля* $\mathbf{K}$.

Доведення. Нехай $k$ – максимальне ціле число, таке що $x_i^k$ зустрічається в $F$ для деякого $i$, $t = k+1$. Розглянемо автоморфізм $\varphi$, визначений в такий спосіб:

$$\varphi(x_i) = x_i + x_n^{t^i} \text{ для } i < n;$$
$$\varphi(x_n) = x_n.$$

Тоді, для будь-якого $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\varphi(\mathbf{x}^{\mathbf{m}}) = x_n^{\nu(\mathbf{m})} + H$, де $\nu(\mathbf{m}) = m_n + m_1 t + m_2 t^2 + \dots + m_{n-1} t^{n-1}$, а $H$ містить $x_n$ лише в степенях, меньших за $\nu(\mathbf{m})$. Якщо цей одночлен зустрічається в $F$, то всі $m_i < t$. Тому значення $\nu(\mathbf{m})$ є різними для різних одночленів, які зустрічаються в $F$. Отже, $\varphi(F)$ має вигляд (1.4.1), де $d$ є максимальним значенням $\nu(\mathbf{m})$. □

Доведення Нормалізаційної леми Нетера. Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\mathbf{b}]$ – скінченно породжена $\mathbf{K}$-алгебра, де $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Існує епіморфізм $f : \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,] \to \mathbf{B}$ (наприклад, той, що відображає $x_i$ в $b_i$). Розглянемо один з них. Тоді $\mathbf{B} \simeq \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]/I$, де $I = \operatorname{Ker} f$. Якщо $I = 0$, $\mathbf{B} \simeq \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$. Припустимо, що $I$ містить многочлен $F$ додатнього степеня. За лемою 1.4.10, існує автоморфізм $\varphi$ алгебри $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$, такий що $\varphi(F)$ має вигляд (1.4.1). Замінюючи $f$ на $f \circ \varphi$, ми вважатимемо, що вже $F$ має цей вигляд. Оскільки образи $f(x_i)$ породжують $\mathbf{K}$-алгебру $\mathbf{B}$, ми можемо також припустити, що $f(x_i) = b_i$. Тоді $\lambda b_n^d + g_1 b_n^{d-1} + \dots + g_d = 0$, де $g_i = G_i\,(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$. Оскільки $\lambda$ є обертовним, елемент $b_n$ є цілим над підкільцем $\mathbf{B}' = \mathbf{K}[\,b_1, \dots, b_{n-1}\,]$. Тепер проста індукція (з використанням леми 1.4.9(2)) завершує доведення. $\square$

Вправи 1.4.11.

(1) Знайти приклад скінченно породженого модуля, що містить підмодуль, який не є скінченно породженим.

*Вказівка*: Розглянути кільце многочленів з нескінченною кількістю змінних.

(2) Припустимо, що розширення кілець $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ – *скінченного типу*, тобто $\mathbf{B} = \mathbf{A}[b_1, b_2, \dots, b_n]$ для деяких $b_i \in \mathbf{B}$. Довести, що коли кожен $b_i$ є цілим над $\mathbf{A}$, то $\mathbf{B}$ – скінченно породжений $\mathbf{A}$-модуль, отже, є цілим над $\mathbf{A}$.

(3) Довести, що коли поле $\mathbf{K}$ є нескінченним, автоморфізм $\varphi$ з леми 1.4.10 може бути вибраний *лінійним*, тобто таким що $\varphi(x_j) = \sum_i \alpha_{ij} x_i$, де $A = (\alpha_{ij})$ – обертовна $n \times n$ матриця над $\mathbf{K}$.

*Вказівка*: Знайти таку $n$-ку $\mathbf{a} \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$, що $F_d(\mathbf{a}) \neq 0$, де $F_d$ є сумою всіх членів степеня $d = \deg F$ з $F$, і обертовну матрицю $A$, таку що $\mathbf{a}$ є її останнім стовпчиком.

## 1.5. Геометрія і алгебра

Знову припустимо, що $\mathbf{K}$ – алгебрично замкнене поле. Спочатку встановимо один наслідок Теореми Гільберта про нулі.

Твердження 1.5.1. *$\mathbf{K}$-алгебра $\mathbf{A}$ є ізоморфною координатній алгебрі афінного алгебричного многовиду тоді й лише тоді, коли вона є скінченно породженою і* редукованою*, тобто не має ненульових нільпотентних елементів.*

Надалі скінченно породжені редуковані $\mathbf{K}$-алгебри звуться *афінними алгебрами* (над $\mathbf{K}$).

Доведення. Твердження "лише тоді" очевидне з означення. Припустимо тепер, що $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,a_1, \dots, a_n\,]$ – афінна алгебра. Розглянемо гомоморфізм $\varphi : \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,] \to \mathbf{A}$, який відображає $F$ у $F(a_1, \dots, a_n)$. Він є епіморфізмом, отже, $\mathbf{A} \simeq \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]/I$, де $I = \operatorname{Ker}\varphi$. Більш того, $\sqrt{I} = I$. Дійсно, якщо $F \in \sqrt{I}$, то $\varphi(F^k) = (\varphi(F))^k = 0$ для деякого $k$, звідки $\varphi(F) = 0$, оскільки $\mathbf{A}$ є редукованою, тобто $F \in I$. За Теоремою Гільберта про нулі, тоді $I = I(X)$, де $X = V(I)$, і $\mathbf{A} \simeq \mathbf{K}[X]$. $\square$

Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\mathbf{x}]/I(X)$ його координатна алгебра. Ми покажемо, що многовид $X$ і його топологія Зариського повністю визначаються алгеброю $\mathbf{A}$. Для кожної підмножини $Y \subseteq X$ покладемо $I(Y) = \{ a \in \mathbf{A} \mid a(y) = 0$ для всіх $y \in Y \}$. Очевидно, $I(Y)$ є радикальним ідеалом у $\mathbf{A}$. Якщо $Y = \{ x \}$ складається з єдиної точки, ми будемо писати $\mathfrak{m}_x$ замість $I(\{ x \})$. Навпаки, для кожної підмножини $S \subseteq \mathbf{A}$ покладемо $V(S) = \{ x \in X \mid a(x) = 0$ для всіх $a \in S \}$. Це замкнена множина в топології Зариського, тобто є також афінним многовидом, а саме, $V(S) = V(I \cup \widetilde{S})$, де $\widetilde{S}$ складається з (деяких) прообразів в $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$ функцій $a \in S$. Звичайно, якщо $X = \mathbb{A}^n$, ми одержимо "старі" означення з розділу 1.1. Більш того, ми можемо узагальнити Теорему Гільберта про нулі для цієї ситуації в наступний спосіб.

Наслідок 1.5.2. (1) *$V(I(Z)) = Z$ для кожної замкненої підмножини Зариського $Z \subseteq X$.*

(2) *$I(V(I)) = \sqrt{I}$ для кожного ідеалу $I \subseteq \mathbf{A}$; отже, якщо $I$ – радикальний ідеал, то $I(V(I)) = I$.*

*Зокрема, $V(I) = \emptyset$ тоді й лише тоді, коли $I = \mathbf{A}$.*

Доведення. Вправа. $\square$

Отже, ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між замкненими підмножинами Зариського в $X$ і радикальними ідеалами в $\mathbf{A}$. Більш того, з означення одразу випливає, що $\mathbf{K}[Z] = \mathbf{K}[X]/I(Z)$ для кожної замкненої $Z \subseteq X$.

Твердження 1.5.3. (1) *Для кожної точки $x \in X$ ідеал $\mathfrak{m}_x$ є максимальним.*

(2) *Навпаки, для кожного максимального ідеала $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$ існує єдина точка $x \in X$, така що $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.*

Доведення. *1*. Розглянемо гомоморфізм обчислення $v_x : \mathbf{A} \to \mathbf{K}$ ($v_x(a) = a(x)$). Очевидно, він є епіморфізмом і $\mathfrak{m}_x = \operatorname{Ker} v_x$. Отже, $\mathbf{A}/\mathfrak{m}_x \simeq \mathbf{K}$ є полем і $\mathfrak{m}_x$ є максимальним ідеалом.

*2*. Оскільки $\mathfrak{m} \neq \mathbf{A}$, існує точка $x \in X$, така що $a(x) = 0$ для всіх $a \in \mathfrak{m}$. Отже, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$ і $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, оскільки він є максимальним ідеалом. Єдиність $x$ очевидна. $\square$

Отже, ми можемо (і часто будемо) ототожнювати афінний многовид $X$ з множиною $\operatorname{Max} \mathbf{A}$ максимальних ідеалів його координатної алгебри $\mathbf{A}$. Остання зветься *максимальним спектром* кільця $\mathbf{A}$. Більш того, топологія Зариського на $X$ може бути одержана "чисто алгебричним" шляхом в такий спосіб:

Твердження 1.5.4. *Нехай $Z \subseteq X$ – замкнена підмножина Зариського, $I = I(Z)$. Тоді $x \in Z$ тоді й лише тоді, коли $\mathfrak{m}_x \supseteq I$.*

Інакше кажучи, замкнені підмножини Зариського в $X$ відповідають підмножинам $\operatorname{Max}\mathbf{A}$ вигляду $\{\,\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \supseteq I\,\}$, де $I$ пробігає радикальні ідеали $\mathbf{A}$.

Доведення очевидне. □

Означення 1.5.5. Нехай $X$ – топологічний простір.

(1) $X$ зветься *нетеровим*, якщо кожен спадний ланцюг його замкнених підмножин $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$ стабілізується, тобто існує ціле $r$, таке що $Z_s = Z_r$ для всіх $s > r$.

(2) $X$ зветься *незвідним*, якщо він є непорожнім і $Y \cup Z \neq X$ для будь-яких власних замкнених підмножин $Y, Z \subset X$. Рівносильно, $X$ є незвідним тоді й лише тоді, коли будь-яка непорожня відкрита підмножина $U \subseteq X$ є *щільною* в $X$, тобто $U \cap U' \neq \emptyset$ для будь-якої іншої непорожньої відкритої підмножини $U' \subseteq X$.

Твердження 1.5.6. (1) *Будь-який афінний алгебричний многовид є нетеровим топологічним простором.*

(2) *Афінний алгебричний многовид є незвідним тоді й лише тоді, коли його координатна алгебра є* цілою*, тобто є ненульовою і не містить ненульових дільників нуля.*

Доведення. *1* випливає з твердження 1.3.6, оскільки будь-який спадний ланцюг замкнених підмножин $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$ визначає зростаючий ланцюг ідеалів у координатній алгебрі: $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$, де $I_i = I(Z_i)$. Останній стабілізується: існує деякий номер $r$, такий що $I_s = I_r$ для $s > r$. Тоді $Z_s = V(I_s) = V(I_r) = Z_r$.

*2*. Нехай $X$ – непорожній афінний многовид, $\mathbf{A}$ його координатна алгебра. Припустимо, що $\mathbf{A}$ ціла й $Y, Z \subset X$ є власними замкненими підмножинами. Покладемо $I = I(Y)$, $J = I(Z)$. Тоді $I \neq 0$ і $J \neq 0$. Нехай $a \in I$ і $b \in J$ є ненульовими. Тоді $ab \neq 0$ і $ab \in I(Y \cup Z)$. Отже, $I(Y \cup Z) \neq 0$ і $Y \cup Z \neq X$, тобто $X$ є незвідним.

Припустимо тепер, що $X$ незвідний і $a, b \in \mathbf{A}$ – ненульові елементи. Тоді $Y = V(a)$ і $Z = V(b)$ є власними замкненими підмножинами, тому $V(ab) = Y \cup Z \neq X$. Отже, $ab \neq 0$ і $\mathbf{A}$ є цілою. □

Наслідок 1.5.7. *Замкнена підмножина $Z \subseteq X$ є незвідною тоді й лише тоді, коли відповідний ідеал $I(Z) \subseteq \mathbf{K}[\,X\,]$* є первинним, *тобто таким власним ідеалом, що коли $a$ і $b$ не належать до нього, їхній добуток також не належить до нього.*

Звичайно, кожна підмножина нетерового простору є нетеровою в індукованій топології. Для нетерових просторів часто можна використовувати так звану "*нетерову індукцію*": щоб довести деяке твердження, перевірити спочатку, що воно виконується для порожньої множини, а потому довести, що воно виконується для $X$ за умови, що воно виконується для кожної власної замкненої підмножини $Y \subset X$. Тоді це твердження є дійсним для будь-якого нетерового простору. Для прикладу, ми доведемо наступний результат.

Теорема 1.5.8. *Нехай $X$ – нетеровий топологічний простір. Тоді існують незвідні замкнені підмножини $X_1, X_2, \dots, X_s \subseteq X$, такі що $X = \bigcup_{i=1}^s X_i$ і $X_i \not\subseteq X_j$ при $i \neq j$. Крім того, ці $X_i$ є єдиними: якщо $X = \bigcup_{i=1}^r Y_i$, де $Y_i$ – незвідні замкнені підмножини і $Y_i \not\subseteq Y_j$ при $i \neq j$, то $r = s$ й існує підстановка $\sigma$, така що $X_i = Y_{\sigma(i)}$ для всіх $i$.*

Замкнені підмножини $X_i$ звуться *незвідними компонентами* (або просто *компонентами*) $X$, а рівність $X = \bigcup_{i=1}^s X_i$ – *незвідним розкладом* $X$.

Доведення. Спочатку доведемо існування такого розкладу. Якщо $X = \emptyset$, твердження є очевидним. Припустимо, що воно є дійсним для будь-якої власної замкненої підмножини $X$. Якщо $X$ сам незвідний, покладемо $s = 1$, $X_1 = X$. Інакше $X = Y \cup Z$ для деяких власних замкнених підмножин $Y$ і $Z$. Тоді, за припущенням, $Y = \bigcup_{i=1}^k X_i$ і $Z = \bigcup_{i=k+1}^s X_i$, де всі $X_i$ – незвідні замкнені підмножини. Отже, $X = \bigcup_{i=1}^s X_i$. Якщо $X_i \subseteq X_j$ для деякого $i \neq j$, ми можемо викреслити $X_i$ з цього розкладу. Після скінченної кількості таких викреслень, ми одержимо шуканий розклад.

Тепер доведемо єдиність. Нехай $X = \bigcup_{i=1}^s X_i = \bigcup_{i=1}^r Y_i$ – два незвідних розклади. Тоді для кожного $i$ $X_i = \bigcup_{j=1}^r (X_i \cap Y_j)$. Оскільки $X_i$ є незвідним, $X_i \subseteq Y_j$ для деякого $j$. Так само, $Y_j \subseteq X_k$ для деякого $k$, звідки $X_i \subseteq X_k$. Тому $i = k$, отже, $X_i = Y_j$. Очевидно, такий номер $j$ єдиний; більш того, різним $i$ відповідають різні $j$. Отже, $s = r$ і відображення $i \mapsto j$ визначає підстановку $\sigma$, таку що $X_i = Y_{\sigma(i)}$ для всіх $i$. □

Використовуючи взаємно однозначну відповідність між радикальними ідеалами в афінній алгебрі й замкненими підмножинами відповідного многовиду, ми можемо переформулювати теорему 1.5.8 в такий спосіб.

Наслідок 1.5.9. *Для довільного радикального ідеала $I$ афінної алгебри існують первинні ідеали $P_1, P_2, \dots, P_s$, такі що $I = \bigcap_{i=1}^s P_i$ і $P_i \not\supseteq P_j$ при $i \neq j$. Крім того, ці $P_i$ єдині: якщо ще $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$, де $Q_i$ – первинні ідеали і $Q_i \not\supseteq Q_j$ при $i \neq j$, то $r = s$ й існує підстановка $\sigma$, така що $P_i = Q_{\sigma(i)}$ для всіх $i$.*

Первинні ідеали $P_i$ звуться *первинними компонентами* радикального ідеала $I$, а рівність $I = \bigcap_{i=1}^s P_i$ – *первинним розкладом* $I$.

Вправа 1.5.10. Довести, що наслідок 1.5.9 має місце для радикальних ідеалів довільного нетерового кільця.

Зауваження. Існує більш вишукана версія наслідку 1.5.9, яка стосується всіх ідеалів нетерового кільця (зокрема, афінної алгебри) і в якій замість первинних ідеалів виступають так звані *примарні*, але це уточнення нам не потрібне.

Вправи 1.5.11. (1) Довести, що для кожного радикального ідеала $I$ афінної алгебри $\mathbf{A}$, $I = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Max}\mathbf{A},\, \mathfrak{m}\supseteq I} \mathfrak{m}$.

(2) Знайти приклад, який показав би, що попереднє твердження не є вірним для довільних нетерових кілець.

*Вказівка*: Можна розглянути кільце формальних степеневих рядів від однієї змінної.

(3) Нехай $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – гомоморфізм афінних алгебр і $\mathfrak{m}$ – максимальний ідеал $\mathbf{B}$. Довести, що $\gamma^{-1}(\mathfrak{m})$ є максимальним ідеалом $\mathbf{A}$.

(4) Знайти приклад, який показав би, що попереднє твердження може бути несправедливим для довільних нетерових кілець.

(5) Довести, що будь-який нетеровий топологічний простір є квазікомпактним. (Це означає, що кожне відкрите покриття такого простору містить скінченне підпокриття.)

(6) Довести, що незвідні компоненти гіперповерхні $V(F)$ – це гіперповерхні $V(F_i)$, де $F_i$ пробігає первинні дільники $F$.

(7) Знайти незвідні компоненти наступних афінних многовидів в $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$:

(a) $X = V(x^2 + yz, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$;

(b) $X = V(x^2 - yz, x^3 - z^2)$.

(8) Нехай $f : Y \to X$ – морфізм афінних многовидів.

(a) Показати, що $f^*$ є сюр'єктивним тоді й лише тоді, коли $f$ – *замкнене занурення*, тобто ізоморфізм $Y$ на замкнений підмноговид $X$.

(b) Показати, що $f^*$ є ін'єктивним тоді й лише тоді, коли $f$ є *домінантним*, тобто його образ є щільним в $X$.

### 1.6. Структурний пучок. Кільця часток

Нагадаємо поняття *пучка* на топологічному просторі.

Означення 1.6.1. Пучок $\mathcal{F}$ на топологічному просторі $X$ складається з множин $\mathcal{F}(U)$, заданих для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$, і відображень $\mathcal{F}^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, заданих для кожної пари $V \subseteq U$ відкритих підмножин, таких що виконуються наступні умови:

(1) $\mathcal{F}^U_U$ є тотожним відображенням для кожного $U$.

(2) $\mathcal{F}^U_W = \mathcal{F}^V_W \circ \mathcal{F}^U_V$ для кожної трійки $W \subseteq V \subseteq U$ відкритих множин.

(3) Для будь-якого відкритого покриття $U = \bigcup_i U_i$ відкритої множини $U$ і будь-яких елементів $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, таких що

$\mathcal{F}^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i)=\mathcal{F}^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ для всіх $i,j$, існує єдиний елемент $f\in\mathcal{F}(U)$, такий що $f_i=\mathcal{F}^U_{U_i}(f)$ для всіх $i$.

Елементи $\mathcal{F}(U)$ звуться *перерізами* пучка $\mathcal{F}$ над відкритою множиною $U$. Відображення $\mathcal{F}^U_V$ зветься *відображенням обмеження.*

Якщо всі $\mathcal{F}(U)$ є групами (кільцями, алгебрами і т.ін.) і всі $\mathcal{F}^U_V$ є гомоморфізмами груп (відповідно, кілець, алгебр і т.ін.), то $\mathcal{F}$ зветься пучком груп (відповідно, кілець, алгебр і т.ін.).

Для кожного афінного алгебричного многовиду $X$ з координатною алгеброю $\mathbf{A}$ означимо його *структурний пучок* $\mathcal{O}_X$ (або $\mathcal{O}$, якщо $X$ фіксований) в наступний спосіб. Множина $\mathcal{O}(U)$ складається з усіх функцій $f:U\to\mathbf{K}$, які задовольняють такій умові:

*Для кожної точки $x\in U$ існує окіл $V\subseteq U$ і дві функції $a,b\in\mathbf{A}$, такі що $b(y)\neq 0$ і $f(y)=a(y)/b(y)$ для всіх $y\in V$.*

Відображення $\mathcal{O}^U_V$ переводить кожну функцію $f\in\mathcal{F}(U)$ в її обмеження на $V$.

Вправа 1.6.2. Перевірити, що $\mathcal{O}_X$ – це дійсно пучок $\mathbf{K}$-алгебр.

Функції з $\mathcal{O}_X(U)$ звуться *регулярними функціями* на $U$, а структурний пучок $\mathcal{O}_X$ зветься також *пучком регулярних функцій.*

Звичайно обчислити алгебру $\mathcal{O}(U)$ нелегко. Втім, у деяких випадках це можна зробити. Перш за все, це стосується “глобальних перерізів.”

Твердження 1.6.3. $\mathcal{O}_X(X)=\mathbf{K}[\,X\,]$.

Доведення. Припустимо, що $f\in\mathcal{O}(X)$. Тоді існує відкрите покриття $X=\bigcup_i U_i$ і регулярні функції $a_i,b_i$, такі що $b_i(x)\neq 0$ і $f(x)=a_i(x)/b_i(x)$ для всіх $i$ та для всіх $x\in U_i$. Оскільки $X$ квазікомпактний, а головні відкриті множини утворюють базу топології Зариського (див. вправу 1.2.4(1)), ми можемо припустити, що це покриття скінченне і кожна $U_i$ є головною відкритою множиною $D(g_i)=\{\,x\in X\mid g_i(x)\neq 0\,\}$. Оскільки $b_i(y)\neq 0$ для кожного $y\in D(g_i)$, тобто з $b_i(x)=0$ випливає $g_i(x)=0$, Теорема Гільберта про нулі показує, що $g_i^k=b_ic_i$ для деякого $k$ і деякої регулярної функції $c_i$. Тому, $f=a_ic_i/g_i^k$ на $U_i=D(g_i)=D(g_i^k)$, отже, ми можемо припустити, що вже $U_i=D(b_i)$. Тоді $U_i\cap U_j=D(b_ib_j)$. Оскільки $a_i/b_i=a_j/b_j$ на цьому перетині, ми маємо, що $a_ib_j=a_jb_i$ на $D(b_ib_j)$, або, що те саме, $a_ib_ib_j^2=a_jb_jb_i^2$ всюди. Але $f=a_i/b_i=a_ib_i/b_i^2$ на $U_i$, отже, замінюючи $a_i$ на $a_ib_i$ і $b_i$ на $b_i^2$, ми можемо припустити, що $a_ib_j=a_jb_i$ всюди. Тоді $b_if=b_ia_j/b_j=a_i$ на кожному $U_j$, тобто всюди.

Зауважимо тепер, що $X=\bigcup_i D(b_i)$, тому $V(\{\,b_i\,\})=\emptyset$. За Теоремою Гільберта про нулі, існують регулярні функції $h_i$, такі що

$\sum_i h_i b_i = 1$, звідки $f = \sum_i h_i b_i f = \sum_i h_i a_i$ є регулярною функцією на $X$. $\square$

Майже те саме можна зробити для головних відкритих множин, але для цього нам потрібний деякий допоміжний алгебричний матеріал, а саме, поняття про *кільця часток*.

Розглянемо довільне кільце $\mathbf{A}$. Підмножина $S \subseteq \mathbf{A}$ зветься *мультиплікативною*, якщо $1 \in S$ і $st \in S$ для кожних $s, t \in S$. За заданою мультиплікативною підмножиною $S \subseteq \mathbf{A}$ побудуємо нове кільце в наступний спосіб:

(1) Розглянемо множину пар $\mathbf{A} \times S$ і відношення еквівалентності на ній: $(a, s) \sim (b, t)$ тоді й лише тоді, коли існує елемент $r \in S$, такий що $atr = bsr$. Позначимо через $\mathbf{A}[S^{-1}]$ множину класів еквівалентності за цим відношенням, а через $a/s$ – клас пари $(a, s)$ у $\mathbf{A}[S^{-1}]$.
(2) Для двох елементів, $a/s$ і $b/t$, з $\mathbf{A}[S^{-1}]$ покладемо $a/s + b/t = (at + bs)/st$ і $(a/s)(b/t) = ab/st$.

Вправи 1.6.4. (1) Перевірте, що $\sim$ є дійсно відношенням еквівалентності на $\mathbf{A} \times S$.
(2) Перевірте, що означення суми й добутку не залежать від вибору пар $(a, s)$ і $(b, t)$ в їхніх класах.
(3) Перевірте, що ці означення суми й добутку перетворюють $\mathbf{A}[S^{-1}]$ на кільце.

Кільце $\mathbf{A}[S^{-1}]$ зветься *кільцем часток* $\mathbf{A}$ *за мультиплікативною підмножиною* $S$.

Якщо $S$ складається з усіх недільників нуля з $\mathbf{A}$, кільце часток $\mathbf{A}[S^{-1}]$ зветься *повним кільцем часток* $\mathbf{A}$. Звичайно, якщо кільце $\mathbf{A}$ ціле, повне кільце часток – це те саме, що поле часток $\mathbf{A}$.

Вправи 1.6.5. (1) Перевірте, що відображення $\rho_S : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[S^{-1}]$, таке що $\rho_S(a) = a/1$, є гомоморфізмом кілець і $\operatorname{Ker} \rho_S = \{\, a \in \mathbf{A} \mid as = 0$ для деякого $s \in S \,\}$. Зокрема, $\mathbf{A}[S^{-1}]$ є нульовим кільцем тоді й лише тоді, коли $0 \in S$; $\rho_S$ є зануренням тоді й лише тоді, коли $S$ не містить дільників нуля. (В останньому випадку ми завжди ототожнюємо $\mathbf{A}$ з його образом в $\mathbf{A}[S^{-1}]$ і пишемо $a$ замість $a/1$.)
(2) Нехай $T$ – інша мультиплікативна підмножина в $\mathbf{A}$, $T/1 = \{\, t/1 \mid t \in T \,\}$ – її образ в $\mathbf{A}[S^{-1}]$. Довести, що $A[S^{-1}][(T/1)^{-1}] \simeq \mathbf{A}[(ST)^{-1}]$, де $ST = \{\, st \mid s \in S, t \in T \,\}$.
(3) Довести, що коли $S$ не містить дільників нуля, $\mathbf{A}[S^{-1}]$ канонічно ізоморфне до підкільця повного кільця часток. (Ми будемо завжди ототожнювати їх.) Зокрема, якщо $\mathbf{A}$ ціле й $0 \notin S$, кільце $\mathbf{A}[S^{-1}]$ можна розглядати як підкільце поля часток $\mathbf{A}$.

Якщо $g$ – елемент $\mathbf{A}$, $S = \{ g^k \mid k \in \mathbb{N} \}$, то кільце часток $\mathbf{A}[S^{-1}]$ позначають також через $\mathbf{A}[ g^{-1} ]$, а відображення $\rho_S$ – через $\rho_g$.

Вправа 1.6.6. Нехай $X$ – афінний алгебричний многовид, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[ X ]$. Мета цієї вправи – довести, що $\mathcal{O}_X(U) \simeq \mathbf{A}[g^{-1}]$ для кожної головної відкритої підмножини $U = D(g)$ і при цьому ототожненні обмеження $\mathcal{O}_U^X$ збігається з $\rho_g$. Ми наслідуємо доведення твердження 1.6.3.

(1) Перевірте, що кожен елемент $\mathbf{A}[g^{-1}]$ може бути розглянутий як регулярна функція на $U$ і різні елементи $\mathbf{A}[g^{-1}]$ визначають різні функції. Отже, $\mathbf{A}[g^{-1}]$ можна ототожнити з підкільцем $\mathcal{O}_X(U)$. Перевірте, що при цьому ототожненні $\rho_g$ збігається з $\mathcal{O}_U^X$.

(2) Перевірте, що коли $U = \bigcup_i U_i$ – відкрите покриття, існують головні відкриті множини $D(g_i) \subseteq U_i$, такі що $U$ є скінченним об'єднанням деяких $D(g_i)$.
Отже, якщо функція $f : U \to \mathbf{K}$ регулярна, існує скінченна множина $\{ g_1, g_2, \dots, g_m \}$, така що $U = \bigcup_i U_i$, де $U_i = D(g_i)$, і $f(x) = a_i(x)/b_i(x)$ для кожного $x \in U_i$, де $a_i, b_i \in \mathbf{A}$ і $b_i(x) \neq 0$ для кожного $x \in U_i$.

(3) Нехай $f$ – будь-яка регулярна функція на $U$; $U_i = D(g_i)$, $a_i$ і $b_i$ визначені, як вище. Перевірте, що, змінюючи елементи $a_i, b_i, g_i$, можна вважати $b_i = g_i$.

(4) Розглядаючи обмеження $f$ на $D(b_i b_j)$, перевірте, що можна вважати $a_i b_j = a_j b_i$, звідки $b_i f = a_i$ на $U$.

(5) Довести, що $g^k = \sum_i h_i b_i$ для деякого цілого $k$ і деяких $h_i \in \mathbf{A}$, звідки $f \in \mathbf{A}[g^{-1}]$.

Розділ 2

# Проективні та абстрактні многовиди

## 2.1. Проективні многовиди та однорідні ідеали

Нагадаємо, що *$n$-вимірний проективний простір* $\mathbb{P}^n_{\mathbf{K}}$ над полем $\mathbf{K}$[1] (або просто $\mathbb{P}^n$, якщо $\mathbf{K}$ фіксоване) є, за означенням, множиною класів еквівалентності $(\mathbf{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, де $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (b_0, b_1, \dots, b_n)$ означає, що $a_i = \lambda b_i$ для всіх $i$ і деякого ненульового $\lambda \in \mathbf{K}$. Клас еквівалентності $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ в $\mathbb{P}^n$ позначимо $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$; елементи $a_i$ звуться *однорідними координатами* точки $\mathbf{a} = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$.

Знову ми визначимо проективний алгебричний многовид як множину спільних нулів деяких многочленів. Проте, оскільки однорідні координати точки визначені лише з точністю до спільного множника, ми не можемо розглядати довільні многочлени й маємо обмежитись *однорідними*, тобто такими многочленами $F$, що всі одночлени, які зустрічаються в $F$, мають той самий степінь. Звичайно, якщо $F$ однорідним і $F(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, тоді також $F(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = 0$, тобто ми можемо сказати, що $F(\mathbf{a}) = 0$ для точки $\mathbf{a}$ проективного простору.

Вправа 2.1.1. Нехай $F$ – довільний многочлен, $F_d$ позначає його *однорідну* компоненту степеня $d$, тобто суму всіх одночленів степеня $d$, які зустрічаються в $F$. Припустимо, що для кожного ненульового $\lambda \in \mathbf{K}$ $F(\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = 0$. Довести, що $F_d(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ для всіх $d$.

Підмножина $X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbf{K}}$ зветься *проективним алгебричним многовидом*, якщо вона є множиною $PV(S)$ спільних нулів деякої множини $S$ однорідних многочленів. Ми часто опускатимемо слово "алгебричний" і просто казатимемо "проективний многовид." Якщо $\mathbf{F}$ є підполем $\mathbf{K}$, знову позначимо через $X(\mathbf{F})$ множину всіх точок многовиду $X$, координати якого належать до $\mathbf{F}$. Якщо $S$ складається з одного многочлена $F$, ми звемо $PV(F)$ *(проективною) гіперповерхнею* (*плоскою кривою*, якщо $n = 1$, *просторовою поверхнею*, якщо $n = 2$).

Ідеал $I \subset \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ зветься *однорідним*, якщо для кожного $F \in I$ всі однорідні компоненти $F$ також належать до $I$.

[1] Так само, як і раніше, ми звичайно вважаємо це поле алгебрично замкненим.

Інакше кажучи, $I = \oplus_d I_d$, де $I_d$ означає множину всіх однорідних многочленів степеня $d$, які належать до $I$ (включаючи $0$).

Вправи 2.1.2. (1) Показать, що ідеал $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ є однорідним тоді й лише тоді, коли він має множину твірних, яка складається з однорідних многочленів.
(2) Показать, що будь-який дільник однорідного многочлена є знову однорідним. Зокрема, однорідний многочлен є незвідним тоді й лише тоді, коли він не має власних однорідних дільників.
(3) Довести, що коли ідеал $I$ є однорідним, його радикал $\sqrt{I}$ також є однорідним.

Легко помітити, так само як в афінному випадку, що будь-який перетин і будь-яке скінченне об'єднання проективних многовидів у $\mathbb{P}^n$ є знову проективним многовидом. Отже, ми можемо визначити *топологію Зариського* на $\mathbb{P}^n$, приймаючи за її замкнені множини проективні многовиди . Ми завжди розглядаємо проективний простір і всі його підмножини (зокрема, проективні многовиди) з цією топологією.

Очевидно, якщо $I = \langle S \rangle$, де $S$ – множина однорідних многочленів, то $F(\mathbf{a}) = 0$ для кожного $F \in I$ і $\mathbf{a} \in PV(S)$. Крім того, $PV(S) = PV(S')$ для кожної множини $S'$ однорідних твірних ідеала $I$. Ось чому ми позначаємо $PV(S)$ також через $PV(I)$. З іншого боку, для кожної підмножини $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ми можемо визначити однорідний ідеал $I(X)$ як

$$\{ F \in \mathbf{K}[\mathbf{x}] \mid F(\mathbf{a}) = 0 \text{ для всіх } \mathbf{a} \in X \} .$$

(Зауважимо, що, зважаючи на вправу 2.1.1, цей ідеал є завжди однорідним.) Цілком очевидно, що $PV(I(X)) = X$ тоді й лише тоді, коли $X$ є проективним многовидом і що $I(X)$ є завжди радикальним ідеалом. Проте існують деякі власні однорідні ідеали $I$, такі що $PV(I) = \emptyset$. Так буде, наприклад, для ідеала $I_+ = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$. (Цей ідеал складається з усіх многочленів з нульовими вільними членами. Легко збагнути, що будь-який власний однорідний ідеал міститься в $I_+$.) Наступна версія Теореми Гільберта про нулі показує, що це фактично єдиний виняток.

Теорема 2.1.3 (Проективна Теорема Гільберта про нулі). *Нехай $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ – власний однорідний ідеал. Тоді*

(1) *$PV(I) = \emptyset$ тоді й лише тоді, коли $\sqrt{I} = I_+$, або, що те саме, $I_+^k \subseteq I$ для деякого $k$.*
(2) *Якщо $PV(I) \neq \emptyset$, то $I(PV(I)) = \sqrt{I}$.*

Доведення. Розглянемо афінний многовид $V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. (Він зветься *(афінним) конусом* над проективним многовидом $PV(I)$.)

Він завжди містить $0$, оскільки всі многочлени з $I$ мають нульовий вільний член. Якщо $PV(I) = \emptyset$, то $V(I) = \{0\}$, звідки $I(V(I)) = \sqrt{I} = I_+$. З іншого боку, якщо $PV(I) \neq \emptyset$, то, очевидно, $I(PV(I)) = I(V(I)) = \sqrt{I}$ завдяки Теоремі Гільберта про нулі. $\square$

Наслідок 2.1.4. *Існує взаємно однозначна відповідність між проективними многовидами в $\mathbb{P}^n$ і власними радикальними однорідними ідеалами в $\mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$.*

Власний однорідний ідеал $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ зветься *істотним*, якщо $\sqrt{I} \neq I_+$; отже, істотні ідеали визначають непорожні проективні многовиди.

Позначимо через $\mathbb{A}_i^n$ підмножину $\mathbb{P}^n$, яка складається з усіх точок $\mathbf{a} = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, таких що $a_i \neq 0$. Такі точки можуть бути однозначно подані у вигляді: $\mathbf{a} = (a_0/a_i : \dots : 1 : \dots : a_n/a_i)$, де $1$ стоїть на $i$-ому місті. Отже, можна ототожнити $\mathbb{A}_i^n$ з $n$-вимірним афінним простором, і ми це завжди робитимемо. Звичайно, $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{A}_i^n$ і підмножини $\mathbb{A}_i^n$ відкриті в топології Зариського $\mathbb{P}^n$. Вони звуться *канонічним афінним покриттям* $\mathbb{P}^n$.

Твердження 2.1.5. *Топологія Зариського $\mathbb{A}_i^n$ як афінного простору збігається з топологією, індукованою з $\mathbb{P}^n$. Інакше кажучи, якщо $X$ – замкнена підмножина $\mathbb{P}^n$, то $X \cap \mathbb{A}_i^n$ – замкнена підмножина в $\mathbb{A}_i^n$ і кожна замкнена підмножина $\mathbb{A}_i^n$ має вигляд $X \cap \mathbb{A}_i^n$ для деякої замкненої підмножини $\mathbb{P}^n$.*

Доведення. Нехай $\mathbf{P}_i$ – кільце многочленів від змінних $t_j$ для $0 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$. Розглянемо $\mathbf{P}_i$ в очевидний спосіб як координатну алгебру $\mathbb{A}_i^n$. Покладемо також $t_i = 1$. Для кожного однорідного многочлена $F \in \mathbf{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ степеня $d$, покладемо $F^{(i)} = F(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{P}_i$. З іншого боку, для кожного многочлена $G \in \mathbf{P}_i$ степеня $d$, покладемо $G^* = x_i^d G(x_0/x_i, \dots, x_n/x_i)$ (звичайно, $x_i/x_i$ тут треба опустити). $G^*$ є завжди однорідним многочленом степеня $d$ з $\mathbf{K}[\mathbf{x}]$. Для кожної множини $S \subseteq \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ однорідних многочленів покладемо $S^{(i)} = \{ F^{(i)} \mid F \in S \}$, а для кожної підмножини $T \subseteq \mathbf{P}_i$ покладемо $T^* = \{ G^* \mid G \in T \}$.

Розглянемо точку $\mathbf{a} = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in \mathbb{A}_i^n$. Оскільки $a_i \neq 0$, $F(\mathbf{a}) = 0$ тоді й лише тоді, коли $F^{(i)}(a_0/a_i, \dots, a_n/a_i) = 0$. Отже, для кожної множини $S$ однорідних многочленів $PV(S) \cap \mathbb{A}_i^n = V(S^{(i)})$ є замкненою підмножиною $\mathbb{A}_i^n$. З іншого боку, якщо $\mathbf{b} = (b_0, \dots, \check{b}_i, \dots, b_n)$ – точка $\mathbb{A}_i^n$, то $G(\mathbf{b}) = 0$ тоді й лише тоді, коли $G^*(b_0, \dots, 1, \dots, b_n) = 0$ ($1$ на $i$-ому місці). Отже, $V(T) = PV(T^*) \cap \mathbb{A}_i^n$ для кожної підмножини $T \subseteq \mathbf{P}_i$. $\square$

Зауваження. Оскільки $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^m \mathbb{A}_i^n$ – відкрите покриття, підмножина $X \subseteq \mathbb{P}^n$ є замкненою (відкритою) тоді й лише тоді, коли $X \cap \mathbb{A}_i^n$ є замкненою (відповідно, відкритою) в $\mathbb{A}_i^n$ для кожного

$i = 0, \dots, n$. Більш того, $Y = \overline{Y} \cap \mathbb{A}_i^n$ для будь-якої замкненої підмножини $Y \subseteq \mathbb{A}_i^n$, де $\overline{Y}$ – її замикання в $\mathbb{P}^n$, і $Y$ є відкритою в $\overline{Y}$.

Зокрема, якщо $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, то $X_i = X \cap \mathbb{A}_i^n$ – афінні многовиди, які утворюють відкрите покриття $X$. Це покриття також зветься *канонічним афінним покриттям* $X$.

Приклад 2.1.6. Розглянемо проективну плоску криву ("проективну коніку") $Q = PV(x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_2)$. Обчислимо її "афінні частини" $Q_i = Q \cap \mathbb{A}_i^2$ ("афінні коніки"). Для $\mathbb{A}_0^2$ покладемо $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$; тоді $Q_0 = V(x^2 + 2y + 1)$ ("парабола"). Для $\mathbb{A}_1^2$, покладемо $x = x_0/x_1$, $y = x_2/x_1$; тоді $Q_1 = V(x^2 + 2xy + 1)$ ("гіпербола"). Нарешті, для $\mathbb{A}_2^2$, покладемо $x = x_0/x_2$, $y = x_1/x_2$; тоді $Q_2 = V(x^2 + y^2 + 2y)$ ("елліпс" і навіть "коло").

Вправи 2.1.7.

(1) Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, такий що $X_i = X \cap \mathbb{A}_i^n \neq \emptyset$. Довести, що $X$ є незвідним (в топології Зариського) тоді й лише тоді, коли $X_i$ є незвідним і $X = \overline{X}_i$.
(2) Ототожнюючи $\mathbb{A}^2$ з $\mathbb{A}_0^2 \subset \mathbb{P}^2$, знайти проективне замикання $C$ "кубіки з вузлом" $C_0 = V(y^2 - x^3 - x^2)$. Знайти дві її інші "афінні частини," $C_1$, і $C_2$.

Вправи 2.1.8. Повернемося до позначень з доведення твердження 2.1.5. Для однорідного ідеала $I \subseteq \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ позначимо через $\widetilde{I}$ множину всіх однорідних многочленів з $I$.

(1) Показати, що для будь-якого однорідного ідеала $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$ $\widetilde{I}^{(i)} = \left\{ F^{(i)} \mid F \in \widetilde{I} \right\}$ є ідеалом в $\mathbf{P}_i$ і для будь-якого ідеала $J \subset \mathbf{P}_i$ $J^* = \{ G^* \mid G \in J \}$ збігається з $\widetilde{I}^{(i)}$ для деякого однорідного ідеала $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$.
(2) Довести, що коли $I$ ($J$) є радикальним ідеалом, то $\widetilde{I}^{(i)}$ (відповідно, $J^*$) є також радикальним. Чи є обернене також вірним? (Доведіть це або знайдіть контрприклад.)
(3) Довести, що $I = \bigcap_{i=0}^n \widetilde{I}^{(i)*}$ для будь-якого істотного радикального однорідного ідеала $I \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$. Чи виконується ця рівність для довільних істотних однорідних ідеалів? (Доведіть це або знайдіть контрприклад.)

*Вказівка*: Доведіть, що $PV(I) \cap \mathbb{A}_i^n = V(\widetilde{I}^{(i)})$ і $\overline{V(J)} = PV(J^*)$.

Використовуючи канонічне афінне покриття $X = \bigcup_{i=0}^n X_i$ проективного многовиду $X$, ми визначимо *структурний пучок* $\mathcal{O}_X$ (або $\mathcal{O}$, якщо $X$ фіксований) в наступний спосіб. Для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$ $\mathcal{O}_X(U)$ є множиною всіх функцій $f : U \to \mathbf{K}$, таких що для кожного $i = 0, \dots, n$ обмеження $f$

на $U \cap X_i$ є регулярною функцією на цьому перетині (в розумінні розділу 1.6), а відображення $\mathcal{O}_V^U$ переводить функцію $f$ в її обмеження на $V$.

Вправа 2.1.9. Перевірити, що $\mathcal{O}_X$ є дійсно пучком.

Зрозуміло, що структурний пучок кожної афінної частини $X_i$ є як раз обмеженням на $X_i$ пучка $\mathcal{O}_X$, тобто $\mathcal{O}_{X_i}(U) = \mathcal{O}_X(U)$ для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X_i$. (Зауважимо, що така підмножина $U$ є також відкритою в $X$).

Важливою характеристикою проективних многовидів є існування дуже невеликої кількості "глобальних регулярних" функцій на них.

Вправа 2.1.10. Показати, що $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \mathbf{K}$, тобто єдиними регулярними функціями на проективному просторі є константи.

*Вказівка*: Розгляньте обмеження $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n)$ на $\mathbb{A}_i^n$ і доведіть, що воно має вигляд $F_i(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, де $F_i$ – однорідний многочлен степеня $d$. Порівняйте ці обмеження на перетині $\mathbb{A}_i^n \cap \mathbb{A}_j^n$.

Зауваження. Пізніше (в розділі 2.4) ми побачимо, що те саме є вірним для будь-якого зв'язного проективного многовиду.

## 2.2. Абстрактні алгебричні многовиди

Відкрита підмножина проективного многовиду зветься *квазіпроективним* многовидом. Будь-який проективний (так само, як і афінний) многовид є квазіпроективним. Квазіпроективні многовиди утворюють природний клас об'єктів в алгебричній геометрії, і можна було б обмежитись його вивченням. Однак зручніше розглянути ширший клас об'єктів і визначити алгебричні многовиди як такі топологічні простори з пучками алгебр, що є локально ізоморфними до афінних многовидів. Спочатку введемо деякі необхідні означення. Ми завжди розглядаємо поле $\mathbf{K}$ з його топологією Зариського. Власні замкнені множини в цій топології – це скінченні множини.

Означення 2.2.1. (1) Для топологічного простору $X$ позначимо через $\mathcal{F}un_{X,\mathbf{K}}$ (або просто через $\mathcal{F}un$, якщо $X$ і $\mathbf{K}$ фіксовані) пучок $\mathbf{K}$-алгебр на $X$, такий що $\mathcal{F}un(U)$ є множиною всіх функцій $U \to \mathbf{K}$, а $\mathcal{F}un_V^U$ є звичайним обмеженням функцій.

(2) *Простором з функціями* (над даним полем $\mathbf{K}$) зветься пара $(X, \mathcal{O}_X)$, де $X$ – топологічний простір, а $\mathcal{O}_X$ – підпучок пучка алгебр $\mathcal{F}un_{X,\mathbf{K}}$, який задовольняє наступним умовам:
   (a) Якщо $f \in \mathcal{O}_X(U)$, то функція $f$ є неперервною.
   (b) Якщо $f \in \mathcal{O}_X(U)$ – така, що $f(p) \neq 0$ для всіх $p \in U$, то й $1/f \in \mathcal{O}_X(U)$.

Функції з $\mathcal{O}_X(U)$ звуться *регулярними функціями* на $U$.

(3) *Морфізмом* просторів з функціями $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ зветься неперервне відображення $\varphi : Y \to X$, таке що для кожної відкритої підмножини $U \subseteq X$ і для кожної функції $f \in \mathcal{O}_X(U)$ функція $f \circ \varphi$ належить до $\mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$.
В ціх сітуації через $\varphi^*(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ позначають гомоморфізм, який відображає $f$ у $f \circ \varphi$.

Зауваження. Оскільки замкнені підмножини Зариського $\mathbf{K}$, за винятком самого $\mathbf{K}$, є скінченними, функція $f : U \to \mathbf{K}$ є неперервною тоді й лише тоді, коли множина $\{\, p \in U \mid f(p) \neq \alpha \,\}$ є відкритою в $X$ для кожного $\alpha \in \mathbf{K}$. Тому обмеження функції $f \in \mathcal{O}_X(U)$ на $D(f) = \{\, p \in U \mid f(p) \neq 0 \,\}$ є обертовним в $\mathcal{O}_X(D(f))$.

Очевидно, якщо $\varphi : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ і $\psi : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ є морфізмами просторів з функціями, їхня композиція $\varphi \circ \psi$ є також морфізмом просторів з функціями $(Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Морфізм $\varphi$, який має обернений морфізм $\varphi^{-1}$, зветься *ізоморфізмом* просторів з функціями.

Надалі ми часто казатимемо "простір з функціями $X$," опускаючи $\mathcal{O}_X$, коли ясно, який пучок мається на увазі.

Приклади 2.2.2. (1) Будь-який топологічний простір $X$ можна розглядати як простір з функціями, якщо взяти за $\mathcal{O}_X(U)$ всі неперервні функції (в топології Зариського $\mathbf{K}$).

(2) Якщо $\mathbf{K}$ – топологічне поле (наприклад, $\mathbf{R}$ або $\mathbf{C}$), пара $(X, \mathcal{C})$, де $\mathcal{C}(U)$ є множиною всіх неперервних функцій (відносно даної топології $\mathbf{K}$), є також простором з функціями. Те саме вірно, якщо $X$ є диференційовним многовидом, а $\mathcal{C}$ замінюється пучком $\mathcal{C}^r$ $r$ разів неперервно диференційовних функцій ($1 \leqslant r \leqslant \infty$).
(Зауважимо, що $\mathbf{K}$ *не є* топологічним полем по відношенню до його топології Зариського, оскільки ані додавання, ані множення не є неперервним функціями $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}$!)

(3) Якщо $X$ – афінний або проективний многовид, а $\mathcal{O}_X$ – пучок регулярних функцій на $X$ в розумінні розділів 1.2 і 2.1, то $(X, \mathcal{O}_X)$ є простором з функціями. Говорячи про афінні й проективні многовиди як про простори з функціями, ми завжди матимемо на увазі саме ці структури.

(4) Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ – простір з функціями, $Y$ – підмножина $X$, розглядувана з індукованою топологією, тобто відкриті підмножини $Y$, за означенням, мають вигляд $Y \cap U$, де $U$ – відкрита підмножина $X$. Означимо пучок $\mathcal{O}_Y$, беручи за $\mathcal{O}_Y(Y \cap U)$ множину всіх функцій $f : Y \cap U \to \mathbf{K}$, які задовольняють наступній умові:

*Для кожної точки $y \in Y \cap U$ існують відкрита множина $V$ і функція $g \in \mathcal{O}_X(V)$, такі що $y \in V \subseteq U$ і $f|_{Y\cap V} = g|_{Y\cap V}$.*

Тоді $(Y, \mathcal{O}_Y)$ є також простором з функціями. Назвемо $(Y, \mathcal{O}_Y)$ *обмеженням* на $Y$ простору з функціями $(X, \mathcal{O}_X)$. Звичайно, якщо $Y$ є відкритою в $X$, то для будь-якої відкритої підмножини $V \subseteq Y$ (яка є також відкритою в $X$) $\mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_X(V)$. З іншого боку, якщо $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^n$ є проективними многовидами, то обмеження на $Y$ пучка регулярних функцій на $X$ збігається з пучком регулярних функцій на $Y$, і те саме є вірним для афінних многовидів $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$.

Відзначимо наступні очевидні й корисні властивості обмежень.

Твердження 2.2.3. *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ – простір з функціями і $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – обмеження $(X, \mathcal{O}_X)$ на підмножину $Y \subseteq X$. Тоді занурення $\varepsilon_Y : Y \to X$ є морфізмом і для будь-якого простору з функціями $(Z, \mathcal{O}_Z)$ відображення $\varphi \mapsto \varepsilon_Y \circ \varphi$ є бієкцією множини всіх морфізмів $Z \to Y$ на множину тих морфізмів $Z \to X$, образи яких містяться в $Y$.*

Доведення лишаємо читачеві як легку вправу. □

Означення 2.2.4. (1) Простір з функціями $(X, \mathcal{O}_X)$ над полем $\mathbf{K}$ зветься *алгебричним многовидом* (над $\mathbf{K}$), якщо існує скінченне відкрите покриття $X = \bigcup_i U_i$, таке що для кожного $i$ обмеження $(X, \mathcal{O}_X)$ на $U_i$ ізоморфне деякому афінному многовиду.

(2) *Морфізм* (*ізоморфізм*) алгебричних многовидів – це їхній морфізм як просторів з функціями.

Зокрема, будь-який квазіпроективний (зокрема, афінний або проективний) многовид є алгебричним многовидом в цьому розумінні. Існують приклади многовидів, які не є квазіпроективними, але вони досить вишукані і ми не можемо показати їх зараз. Якщо загальне означення здається занадто складним, читач може завжди припускати, що "многовид" – це просто квазіпроективний многовид.

Надалі, ми часто зватимемо многовид *афінним* або *проективним*, якщо він ізоморфний (як простір з функціями) афінному, відповідно, проективному многовиду. Пізніше (в розділі 2.4) ми побачимо, що коли квазіпроективний многовид $X \subseteq \mathbb{P}^n$ ізоморфний проективнному многовиду, то він є замкненим в $\mathbb{P}^n$. Отже, ми не одержимо нічого нового. З іншого боку, як покаже наступний приклад, це вже не так для афінних многовидів.

Твердження 2.2.5. *Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X]$ і $g \in \mathbf{A}$ – регулярна функція на $X$. Тоді головна відкрита підмножина $D(g)$ ізоморфна афінному многовиду.*

Доведення. Нехай $G$ – многочлен, обмеженням якого на $X$ є функція $g$, $I = I(X) \subseteq \mathbf{K}[\,x_1, \ldots, x_n\,]$. Розглянемо ідеал $J \subseteq \mathbf{K}[\,x_1, \ldots, x_{n+1}\,]$, породжений множиною $I \cup \{\, x_{n+1}G - 1\,\}$. Ми твердимо, що $D(g) \simeq V(J)$. Проекція

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1} \to \mathbb{A}^n, \quad \pi\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,$$

відображає $V(J)$ у $D(g)$, отже, визначає морфізм $V(J) \to D(g)$, який ми також позначимо $\pi$. Визначимо відображення $\varphi : D(g) \to V(J)$, поклавши

$$\varphi\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 1/g(a_1, a_2, \ldots, a_n)).$$

Очевидно, воно є оберненим до $\pi$ як відображення множин. Припустимо, що $U \subseteq V(J)$ – відкрита підмножина і $f$ є регулярною функцією на $U$. Ми маємо перевірити, що функція $f \circ \varphi$ є регулярною на $\varphi^{-1}(U) = \pi(U)$. Припустимо, що $f(a) = F_1(a)/F_2(a)$ для кожного $a \in U$, де $F_1, F_2$ – многочлени і $F_2(a) \neq 0$ для всіх $a \in U$. Якщо $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \in \pi(U)$, то $b_{n+1} \neq 0$. Тому для будь-якого $b \in \varphi^{-1}(U)$

$$(f \circ \varphi)\,(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{F_1(b_1, b_2, \ldots, b_n, 1/b_{n+1})}{F_2(b_1, b_2, \ldots, b_n, 1/b_{n+1})}\,,$$

отже, функція $f \circ \varphi$ є дійсно регулярною на $\varphi^{-1}U$. □

Наслідок 2.2.6. *Якщо $X$ – алгебричний многовид, існує база топології на $X$, яка складається з афінних многовидів.*

Доведення. Нехай $X = \bigcup_i U_i$, де $U_i$ – афінні многовиди. Якщо $V$ – будь-яка відкрита підмножина $X$, то $V = \bigcup_i (V \cap U_i)$ і $V \cap U_i$ – відкрита в $U_i$. Головні відкриті підмножини $U_i$ утворюють базу топології на $U_i$, отже, $V \cap U_i$ є об'єднанням головних відкритих підмножин $U_i$. Але кожна з них є афінним многовидом внаслідок твердження 2.2.5. □

Нагадаємо, що підмножина $Y$ топологічного простору $X$ зветься *локально замкненою*, якщо вона є перетином відкритої й замкненої підмножин $X$, або, що те саме, якщо $Y$ відкрита у своєму замиканні $\overline{Y}$.

Наслідок 2.2.7. *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ – алгебричний многовид, $Y \subseteq X$ – локально замкнена підмножина. Тоді $Y$ (розглянута як простір з функціями через обмеження з $X$) – також алгебричний многовид.*

В цьому випадку $Y$ зветься *підмноговидом* $X$. Якщо $Y$ – замкнена (відкрита) в $X$, вона зветься *замкненим* (відповідно, *відкритим*) *підмноговидом*.

Доведення. Якщо $X = \bigcup_i U_i$, де кожна $U_i$ є афінним многовидом, то $Y = \bigcup_i (Y \cap U_i)$. Якщо $Y$ – замкнена в $X$, то кожна

$Y \cap U_i$ є також афінним многовидом, оскільки є замкненою в $U_i$. Тому можна припустити, що $\overline{Y} = X$, тобто $Y$ є відкритою в $X$. В цьому випадку $Y \cap U_i$ відкрита в $U_i$, отже, є скінченним об'єднанням головних відкритих підмножин $U_i$, які є також афінними многовидами. □

Означення 2.2.8. Морфізм $f : Y \to X$ алгебричних многовидів зветься *зануренням*, якщо $\operatorname{Im} f$ є підмноговидом $X$ і $f$ індукує ізоморфізм $Y \to \operatorname{Im} f$. Якщо, крім того, $\operatorname{Im} f$ – замкнена (відкрита) підмножина в $X$, $f$ зветься *замкненим* (відповідно, *відкритим*) зануренням.

Вправи 2.2.9. (1) Нехай $X = \mathbb{A}^n \setminus \{ p \}$ для деякої точки $p$ і $n > 1$. Довести, що $X$ не є ізоморфним жодному афінному многовиду.

*Вказівка*: Показати, що будь-яка регулярна функція на $X$ є обмеженням єдиної регулярної функції з $\mathbb{A}^n$; зокрема, можна визначити "значення" $f(p)$ цих функцій у точці $p$. Потому довести, що $I = \{ f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(p) = 0 \}$ є власним ідеалом в $\mathcal{O}_X(X)$ але не існує жодної точки $a \in X$, такої що $f(a) = 0$ для всіх $f \in I$.

(2) Довести те саме для $X = \mathbb{P}^n \setminus \{ p \}$ ($n > 1$).

Зауваження. Ці многовиди також не є проективними многовидами, оскільки вони не є замкненими в $\mathbb{P}^n$ (див. розділ 2.4).

Тепер доведемо важливу рису, яка виділяє афінні многовиди поміж всіма просторами з функціями. Позначимо $\operatorname{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Y, X)$ множину морфізмів просторів з функціями $Y \to X$, а $\operatorname{Mor}_{\mathrm{Alg}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, – множину гомоморфізмів $\mathbf{K}$-алгебр $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Теорема 2.2.10. *Простір з функціями $(X, \mathcal{O}_X)$ є афінним многовидом тоді й лише тоді, коли $\mathcal{O}_X(X)$ є афінною алгеброю й відображення $\gamma : \operatorname{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Y, X) \to \operatorname{Mor}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$, $\varphi \mapsto \varphi^*(X)$, є взаємно однозначним для кожного простору з функціями $Y$.*

(З доведення буде видно, що достатньо перевірити цю умову, коли $Y$ – алгебричний і навіть афінний многовид.)

Доведення. Позначимо $\mathbf{A} = \mathcal{O}_X(X)$. Спочатку припустимо, що $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид; тоді $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X] = \mathbf{K}[\mathbf{x}]/I(X)$ – координатна алгебра $X$ (див. твердження 1.6.3). Покладемо $\xi_i = x_i + I(X)$ (координатні функції на $X$). Нехай $Y$ – довільний простір з функціями, $\mathbf{B} = \mathcal{O}_Y(Y)$ і $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – гомоморфізм алгебр. Покладемо $h_i = h(\xi_i)$ і, для будь-якої точки $y \in Y$, $\varphi(y) = (h_1(y), \dots, h_n(y)) \in \mathbb{A}^n$. Якщо $F \in I(X)$, то $F(\varphi(y)) = h(F(\xi_1, \dots, \xi_n))(y) = 0$, оскільки $F(\xi_1, \dots, \xi_n) = F + I(X) = 0$ і $h$ – гомоморфізм алгебр. Тому $\operatorname{Im} \varphi \subseteq X$, отже, $\varphi$ можна розглядати як відображення $Y \to X$ . Більш того, $\varphi^*(a) = h(a)$ для кожної функції $a \in \mathbf{A}$ .

Розглянемо відкриту підмножину $U \subseteq X$ і функцію $f \in \mathcal{O}_X(U)$ . Якщо $y_0 \in \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ , то $\varphi(y_0) \in U$ , тому, за означенням $\mathcal{O}_X$ , існує відкрита $V$ , $\varphi(y_0) \in V \subseteq U$ , і дві функції $a, b \in \mathbf{A}$ , такі що $b(p) \neq 0$ і $f(p) = a(p)/b(p)$ для всіх $p \in V$ . Тоді $y_0 \in \varphi^{-1}(V) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ , $h(a), h(b) \in \mathbf{B}$ і, для кожного $y \in \varphi^{-1}(V)$ , $h(b)(y) = b(\varphi(y)) \neq 0$ , а $f(\varphi(y)) = a(\varphi(y))/b(\varphi(y)) = h(a)(y)/h(b)(y)$ . За умовою (b) означення 2.2.1(2), $f \circ \varphi \in \mathcal{O}_Y(\varphi^{-1}(U))$ , отже, $\varphi$ є морфізмом просторів з функціями, таким що $\varphi^*(X) = h$ . Ця конструкція й дає обернене до $\gamma$ відображення.

Тепер припустимо, що $\mathbf{A} = \mathcal{O}_X(X)$ – афінна алгебра, а $\gamma$ є бієктивним для кожного $Y$ . Візьмемо за $Y$ афінний многовид, такий що $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} = \mathbf{K}[\,Y\,]$ , і нехай $\theta : Y \to X$ – такий морфізм, що $\theta^*$ є ізоморфізмом $\mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y(Y) = \mathbf{B}$ . Нехай $h = (\theta^*)^{-1} : \mathbf{B} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}$ , а $\varphi : X \to Y$ – таке, що $h = \varphi^*$ . Тоді $(\theta \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \theta^* = \mathrm{id}_{\mathbf{A}} = (\mathrm{id}_X)^*$ , звідки $\theta \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ , і в той самий спосіб $\varphi \circ \theta = \mathrm{id}_Y$ , отже, $\theta$ – ізоморфізм. $\square$

Вправи 2.2.11. (1) Нехай $X = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид, визначений множиною многочленів $S$ . Показати, що морфізм $f : Y \to X$ , де $Y$ – простір з функціями, це те саме що $n$-ка $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ регулярних функцій на $Y$ , така що $F(f_1, f_2, \dots, f_n) = 0$ для кожного $F \in S$ .

(2) Нехай $X = PV(S) \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, визначений множиною однорідних многочленів $S$ . Показати, що визначити морфізм $f : Y \to X$ , де $Y$ – простір з функціями, це те саме, що задати відкрите покриття $Y = \bigcup_i U_i$ і для кожного $i$ – $(n+1)$-ку $(f_{i0}, f_{i1}, \dots, f_{in})$ регулярних функцій на $U_i$ , які задовольняють наступним умовам:
- $F(f_{i0}, f_{i1}, \dots, f_{in}) = 0$ для кожного $F \in S$ і кожного $i$ ;
- для кожної точки $p \in U_i$ існує індекс $k$ , такий що $f_{ik}(p) \neq 0$ ;
- для кожної пари $i, j$ $\mathcal{O}^{U_i}_{U_i \cap U_j}(f_{ik} f_{jl}) = \mathcal{O}^{U_j}_{U_i \cap U_j}(f_{jk} f_{il})$ для всіх $k, l$ .

З іншого боку, такі дані $(U_i, f_{ik})$ визначають єдиний морфізм $Y \to X$ . Коли два такі набори, $(U_i, f_{ik})$ і $(V_j, g_{jk})$ , визначають той самий морфізм?

(3) Показати, що коли $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ – квазіпроективний многовид, регулярні функції $f_{ik}$ з попередньої вправи можна замінити однорідними многочленами $F_{ik} \in \mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_m\,]$ того самого степеня для будь-якого даного $i$ .

(4) Нехай $X = \mathbb{P}^1$, $Y = V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$ і $f : Y \to X$ заданий наступними даними (перевірте, що вони задовольняють умовам вправи 2):

$$U_1 = D(x-1)\,,\ U_2 = D(x+1)\,;$$
$$f_{10} = x-1,\ f_{11} = y,\ f_{20} = -y,\ f_{21} = x+1\,.$$

Перевірити, що $f$ не може бути визначеним "спільним" правилом виду: $f(y) = (g_1(y) : g_2(y))$ для всіх $y \in Y$ з $g_1, g_2 \in \mathbf{K}[\,Y\,]$. (Спробуйте знайти геометричний зміст цього відображення.)

Зауваження. Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ – простір з функціями, $U$ – відкрита підмножина $X$. З визначення пучка випливає, що функція $f : U \to \mathbf{K}$ належить до $\mathcal{O}_X(U)$ тоді й лише тоді, коли для кожної точки $p \in U$ існує відкрита $V$, така що $p \in V \subseteq U$ і $\mathcal{O}_V^U(f) \in \mathcal{O}_X(V)$. Тому морфізми просторів з функціями можна задавати "локально." Наступна лема є як раз версією останнього твердження. Її доведення, цілком прямолінійне, ми лишаємо читачеві.

Лема 2.2.12. *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ і $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – два простори з функціями. Припустимо, що задані: відкрите покриття $Y = \bigcup_i Y_i$ $Y$ і для кожного індекса $i$ морфізм $\varphi_i : Y_i \to X$, такі що для кожної пари $i, j$ обмеження $\varphi_i$ і $\varphi_j$ на $Y_i \cap Y_j$ збігаються. Тоді існує єдиний морфізм $\varphi : Y \to X$, такий що $\varphi_i = \varphi|_{Y_i}$ для кожного $i$.*

Морфізм $\varphi$ зветься *склеюванням* морфізмів $\varphi_i$.

## 2.3. Добутки многовидів

Маючи загальне поняття алгебричних многовидів, ми можемо означити їхні *прямі добутки*. Ми навіть зробимо це для будь-яких просторів з функціями над полем $\mathbf{K}$. Спочатку введемо наступні позначення.

Позначення 2.3.1. (1) Якщо $f : X \to \mathbf{K}$ і $g : Y \to \mathbf{K}$ – дві функції, позначимо через $f \otimes g$ функцію $X \times Y \to \mathbf{K}$, таку що $(f \otimes g)(a, b) = f(a)g(b)$ для кожних $a \in X$, $b \in Y$.

(2) Якщо $A \subseteq \mathcal{F}un(X)$ і $B \subseteq \mathcal{F}un(Y)$ – два підпростори, позначимо $A \otimes B = \{\, \sum_i f_i \otimes g_i \mid f_i \in A,\ g_i \in B \,\}$.

Очевидно, $A \otimes B$ є підпростором у $\mathcal{F}un(X \times Y)$; якщо $A$ і $B$ є підалгебрами, то $A \otimes B$ є також підалгеброю в $\mathcal{F}un(X \times Y)$, оскільки $(f \otimes g)(f' \otimes g') = ff' \otimes gg'$.

Зауваження. Насправді, операція "$\otimes$" є спеціальним випадком *тензорного добутку* векторних просторів, але ми не передбачаємо, що читач знайомий з останнім.

Означення 2.3.2. Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ і $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – два простори з функціями над полем $\mathbf{K}$. Визначимо їхній *добуток* (як просторів з функціями) в наступний спосіб.

(1) Для кожних відкритих підмножин $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ і кожної функції $g \in \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_Y(V)$ покладемо $D(U,V,g) = \{\, p \in U \times V \mid g(p) \neq 0 \,\}$. Визначимо топологію на $X \times Y$, взявши всі можливі множини $D(U,V,g)$ за її базу.

(2) Визначимо $\mathcal{O}_{X\times Y}(W)$, де $W$ – відкрита підмножина $X \times Y$ у щойно означеній топології, як множину всіх функцій $f : W \to \mathbf{K}$ з наступною властивістю:

*Для кожної точки $w \in W$, існують множина $D(U,V,g)$ і дві функції $a, b \in \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_Y(V)$, такі що $w \in D(U,V,g) \subseteq W$, $b(p) \neq 0$ і $f(p) = a(p)/b(p)$ для всіх точок $p \in D(U,V,g)$.*

Зауваження. Ми завжди розглядаємо $X \times Y$ як топологічний простір з топологією, визначеною вище, і ніколи з топологією-добутком, база відкритих підмножин якої утворена множинами $U \times V$, де $U$ відкрита в $X$, а $V$ відкрита в $Y$. Остання є, очевидно, слабшою (тобто має менше відкритих підмножин) і для алгебричних многовидів у топології Зариського є занадто слабкою.

Визначимо дві *канонічні проекції* (або просто *проекції*) добутку $X \times Y$ на співмножники $X$ та $Y$:

$$\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X, \text{ яка відображає } (x,y) \mapsto x,$$
$$\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y, \text{ яка відображає } (x,y) \mapsto y.$$

Вправа 2.3.3. Перевірте, що $\mathrm{pr}_X$ і $\mathrm{pr}_Y$ є дійсно морфізмами просторів з функціями.

Головною властивістю так визначеного добутку є його наступна "категорна характеристика."

Теорема 2.3.4. (1) *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – два простори з функціями. Тоді для кожного простору з функціями $(Z, \mathcal{O}_Z)$ відображення $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, X \times Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, X) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, Y)$: $\varphi \mapsto (\mathrm{pr}_X \circ\varphi, \mathrm{pr}_Y \circ\varphi)$, є бієктивним.*

(2) *З іншого боку, припустимо, що дано простір з функціями $(P, \mathcal{O}_P)$ і два морфізми, $\theta_1 : P \to X$ і $\theta_2 : P \to Y$, такі що для будь-якого $Z$ відображення $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, P) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, X) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, Y)$: $\varphi \mapsto (\theta_1 \circ \varphi, \theta_2 \circ \varphi)$, є бієктивним. Тоді $P \simeq X \times Y$.*

Доведення. *1*. Побудуємо зворотнє відображення. Розглянемо будь-які два морфізми, $\varphi_1 : Z \to X$ і $\varphi_2 : Z \to Y$, та визначимо відображення $\varphi : Z \to X \times Y$ в наступний спосіб: $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$. Перевіримо, що це є морфізм просторів з функціями; тоді $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi$ є бажаним зворотнім відображенням.

Нехай $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ – відкриті підмножини, $W = \varphi^{-1}(U \times V) = \varphi_1^{-1}(U) \cap \varphi_2^{-1}(V)$. Тоді для кожної функції $g = \sum_i a_i \otimes b_i \in \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_Y(V)$ функція $g \circ \varphi = \sum_i (a_i \circ \varphi_1)(b_i \circ \varphi_2)$ належить до $\mathcal{O}_Z(W)$. Зокрема, $W' = \varphi^{-1}(D(U,V,g)) = \{\, z \in W \mid g(\varphi(z)) \neq 0 \,\}$ – відкрита множина в $Z$, отже, $\varphi$ є неперервною. Більш того, якщо $f$ є іншою функцією з $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_Y(V)$, тоді $(f/g) \circ \varphi = (f \circ \varphi)/(g \circ \varphi)$ належить до $\mathcal{O}_Z(W')$, отже, $\varphi$ є дійсно морфізмом просторів з функціями.

*2*. Існує відображення $\varphi : P \to X \times Y$, таке що $\mathrm{pr}_X \circ \varphi = \theta_1$ і $\mathrm{pr}_Y \circ \varphi = \theta_2$. З іншого боку, існує відображення $\psi : X \times Y \to P$, таке що $\theta_1 \circ \psi = \mathrm{pr}_X$ і $\theta_2 \circ \psi = \mathrm{pr}_Y$. Тоді $\mathrm{pr}_X \circ \varphi \circ \psi = \mathrm{pr}_X$ і $\mathrm{pr}_Y \circ \varphi \circ \psi = \mathrm{pr}_Y$, звідки $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{X \times Y}$. Так само й $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_P$, тобто $\varphi$ і $\psi$ є ізоморфізмами. $\square$

Розглянемо деякі приклади. Поперше, для афінних просторів ми маємо наступний результат, узгоджений з інтуїцією.

Твердження 2.3.5. $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^{m+n}$.

Доведення. Застосуємо теорему 2.3.4(2) до пари морфізмів $\theta_1 : \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^m : (x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_m)$, і $\theta_2 : \mathbb{A}^{m+n} \to \mathbb{A}^n : (x_1, x_2, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$. Нехай $Z$ – будь-який простір з функціями, $\mathbf{A} = \mathcal{O}_Z(Z)$, $\varphi_1 : Z \to \mathbb{A}^m$ і $\varphi_2 : Z \to \mathbb{A}^n$ – будь-які два морфізми. За твердженням 1.2.2, вони однозначно визначаються гомоморфізмами алгебр $\varphi_1^* : \mathbf{K}[\, x_1, \dots, x_m \,] \to \mathbf{A}$ та $\varphi_2^* : \mathbf{K}[\, x_1, \dots, x_n \,] \to \mathbf{A}$. Ці гомоморфізми задаються $m$-кою $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ і $n$-кою $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ функцій з $\mathbf{A}$, де $a_i = \varphi_1^*(x_i)$, $b_j = \varphi_2^*(x_j)$. Визначимо гомоморфізм $\gamma : \mathbf{K}[\, x_1, \dots, x_{m+n} \,]$, поклавши $\gamma(x_i) = a_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ та $\gamma(x_i) = b_{i-m}$ для $m < i \leqslant m+n$. Ми знаємо, що $\gamma = \varphi^*$ для однозначно визначеного $\varphi : Z \to \mathbb{A}^{m+n}$. Очевидно, $\theta_1 \circ \varphi = \varphi_1$ і $\theta_2 \circ \varphi = \varphi_2$, тому відображення $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi$ є зворотнім до $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, \mathbb{A}^{m+n}) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, \mathbb{A}^m) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Sp}}(Z, \mathbb{A}^n)$. $\square$

Твердження 2.3.6. *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ і $(Y, \mathcal{O}_Y)$ – два простори з функціями, $X' \subseteq X$ і $Y' \subseteq Y$ – їхні підмножини, розглянуті як простори з функціями відносно обмежень, відповідно, з $X$ і $Y$. Тоді структура добутку просторів з функціями $X' \times Y'$ збігається з обмеженням на $X' \times Y'$ структури добутку $X \times Y$.*

Доведення. Розглянемо $X' \times Y'$ як обмеження з $X \times Y$. За твердженням 2.2.3, морфізм $Z \to X' \times Y'$ – це те саме, що морфізм $Z \to X \times Y$ з образом, який міститься в $X' \times Y'$. Внаслідок теореми 2.3.4, такий морфізм – це те саме, що пара морфізмів, $Z \to X$ і $Z \to Y$, з образами, які містяться, відповідно, в $X'$ і в $Y'$, тобто пара морфізмів $Z \to X'$ і $Z \to Y'$. Отже, це обмеження збігається з добутком $X'$ і $Y'$ як просторів з функціями. $\square$

Зауваження. Оскільки топологія $X \times Y$ як просторів з функціями є сильнішою, ніж добуток топологій $X$ і $Y$, добуток замкнених (відкритих) підмножин є замкненим (відкритим) в добутку просторів з функціями $X \times Y$.

Наслідок 2.3.7. *Нехай $X, Y$ – афінні многовиди. Тоді $X \times Y$ є також афінним многовидом.*

Наслідок 2.3.8. *Якщо $X, Y$ – алгебричні многовиди, їхній добуток як просторів з функціями є також алгебричним многовидом.*

Ситуація здається більш складною для проективних многовидів. В усякому разі, не існує природної взаємно однозначної відповідності між $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ та $\mathbb{P}^{m+n}$. Пізніше ми побачимо, що ці простори дійсно неізоморфні (див. вправу 2.5.5(2)). Проте, ми доведемо, що добуток проективних многовидів є також проективним. (Отже, добуток квазіпроективних многовидів є також квазіпроективним.) Почнемо з випадку проективних просторів, використавше одне давнє спостереження Сегре.

Твердження 2.3.9 (Занурення Сегре). *Покладемо $N = m + n + mn$ і розглянемо точки $\mathbb{P}^N$ як ненульові $(m+1) \times (n+1)$ матриці $(a_{ij})$ (звісно, ототожнюючи матриці $(a_{ij})$ і $(\lambda a_{ij})$ для ненульових $\lambda \in \mathbf{K}$). Зокрема, однорідні координати в $\mathbb{P}^N$ позначимо через $x_{ij}$ ($0 \leqslant i \leqslant m,\ 0 \leqslant j \leqslant n$). Визначимо відображення $\sigma : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$, яке переводить пару $(a, b)$, де $a = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$, $b = (b_0 : b_1 : \dots : b_m)$, у матрицю $a^\top b = (a_i b_j)$. Тоді $\sigma$ є замкненим зануренням, тобто його образ є замкненим в $\mathbb{P}^N$ і $\varphi$ індукує ізоморфізм $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} \varphi$.*

Відображення $\sigma$ зветься *зануренням Сегре*.

Доведення. Нехай $S = \{ x_{ij} x_{kl} - x_{il} x_{kj} \mid 0 \leqslant i,\ k \leqslant m;\ 0 \leqslant j,\ l \leqslant n \}$ і $\mathbb{S} = PV(S) \subset \mathbb{P}^N$ (*многовид Сегре*; якщо треба вказати $m, n$, пишуть $\mathbb{S}(m,n)$).[2] Доведемо, що $\sigma$ є ізоморфізмом $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}$. Дійсно, включення $\operatorname{Im} \sigma \subseteq \mathbb{S}$ є очевидним. Щоб перевірити, що $\sigma$ є морфізмом, і побудувати зворотній морфізм $\varphi$, розглянемо обмеження $\sigma_{kl}$ відображення $\sigma$ на відкриту множиніу $U_{kl} = \mathbb{A}^m_k \times \mathbb{A}^n_l$ (добуток афінних просторів з канонічних афінних покриттів $\mathbb{P}^m$ та $\mathbb{P}^n$). Воно відображає пару $(a, b)$, де $a = (a_0 : \dots : 1 : \dots : a_m)$ ($1$ на $i$-ому місті), $b = (b_0 : \dots : 1 : \dots : b_n)$ ($1$ на $j$-ому місті) в матрицю $a^\top b = (a_i b_j)$, яка має $1$ на $(ij)$-ому місті. Отже, ця матриця належить до $\mathbb{S}_{kl} = \mathbb{S} \cap \mathbb{A}^N_{kl}$, де $\mathbb{A}^N_{kl} = \left\{ a \in \mathbb{P}^N \mid a_{kl} \neq 0 \right\}$ (афінний простір з канонічного афінного покриття $\mathbb{P}^N$). Оскільки координати $\sigma_{kl}(a, b)$ є многочленами від координат $a$ і $b$, $\sigma_{kl}$ є морфізмом $\mathbb{A}^m_k \times \mathbb{A}^n_l \to \mathbb{S}_{kl}$. Тому $\sigma$ – морфізм $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}$.

[2] Очевидно, рівняння для $\mathbb{S}$ означають, що матриці $z \in \mathbb{S}$ – це всі матриці рангу $1$.

З іншого боку, якщо матриця $z = (z_{ij})$ належить до $\mathbb{S}_{kl}$, можна припустити, що $z_{kl} = 1$, звідки $z_{ij} = z_{il}z_{kj}$. Отже, можна визначити морфізм $\varphi_{kl} : \mathbb{S}_{kl} \to \mathbb{A}^m_k \times \mathbb{A}^n_l$, обернений до $\sigma_{kl}$, поклавши

$$\varphi_{kl}(z) = ((z_{0l} : z_{1l} : \dots : z_{ml}), (z_{k0} : z_{k1} : \dots : z_{kn})) .$$

Зауважимо, що це означення дійсне навіть при $z_{kl} \neq 1$, оскільки ми вважаємо всі координати однорідними. Припустимо, що також $z \in \mathbb{S}_{rs}$ для іншої пари $(rs)$. Тоді

$$\varphi_{rs}(z) = ((z_{0s} : z_{1s} : \dots : z_{ms}), (z_{r0} : z_{r1} : \dots : z_{rn})) .$$

Але рівності $z_{il}z_{js} = z_{is}z_{jl}$ і $z_{ki}z_{rj} = z_{kj}z_{ri}$, справедливі на $\mathbb{S}$, показують, що в цьому випадку $\varphi_{rs}(z) = \varphi_{kl}(z)$. Отже, можна визначити морфізм $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, обернений до $\sigma$, склеївши всі $\varphi_{kl}$ (див. лему 2.2.12). □

Наслідок 2.3.10. *Якщо $X$ і $Y$ – проективні (квазіпроективні) многовиди, то $X \times Y$ є також проективним (відповідно, квазіпроективним) многовидом.*

Вправи 2.3.11.

(1) Показати, що многовид Сегре $\mathbb{S}(1,1)$ (ізоморфний до $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) є квадратичною просторовою поверхнею, і зробити нарис $\mathbb{S}(\mathbb{R})$.

(2) Що є образами при зануренні Сегре $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ "прямих" $a \times \mathbb{P}^1$ і $\mathbb{P}^1 \times b$ для фіксованих точок $a, b \in \mathbb{P}^1$?

(3) Нехай $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ та $(y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ – однорідні координати, відповідно, в $\mathbb{P}^m$ та в $\mathbb{P}^n$. Перевірити, що будь-яка замкнена підмножина $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ є множиною спільних нулів множини многочленів $S \subseteq \mathbf{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, де кожний многочлен $F \in S$ є однорідним (окремо) за $x_i$ і за $y_j$.

(4) Нехай $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$ – однорідні координати в $\mathbb{P}^m$, а $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – координати в $\mathbb{A}^n$. Перевірити, що будь-яка замкнена підмножина $\mathbb{P}^m \times \mathbb{A}^n$ є множиною спільних нулів множини многочленів $S \subseteq \mathbf{K}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, де кожний многочлен $F \in S$ є однорідним за $x_i$.

(5) Довести, що образ діагоналі $\Delta = \{ (p, p) \mid p \in \mathbb{P}^n \}$ при зануренні Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}(n,n)$ збігається з множиною $\{ (z_{ij}) \in \mathbb{S}(n,n) \mid z_{ij} = z_{ji} \text{ для всіх } i \neq j \}$ (симетричні матриці рангу 1).

(6) Розглянемо всі одночлени $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_0^{k_0} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ степеня $d$; відомо, що їхня кількість дорівнює $\binom{n+d}{n}$. Покладемо $N = \binom{n+d}{n} - 1$. Позначимо однорідні координати в $\mathbb{P}^N$ через $w_{\mathbf{k}}$, де $\mathbf{k}$ пробігає всі $(n+1)$-ки $(k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ з $\sum_i k_i = d$.

   (a) Перевірити, що правило $\mathbf{a} \mapsto (\mathbf{a}^{\mathbf{k}})$ визначає регулярне відображення $\rho_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$. Це відображення зветься ($d$-кратним) *зануренням Веронезе*.

(b) Довести, що $\operatorname{Im}\rho_d = V(S)$, де $S$ – множина різниць $w_{\mathbf{k}}w_{\mathbf{m}} - w_{\mathbf{r}}w_{\mathbf{s}}$, взятих за всіма $\mathbf{k},\mathbf{m},\mathbf{r},\mathbf{s}$, такими що $k_i + m_i = r_i + s_i$ для всіх $i = 0,\dots,n$. Множина $\mathbb{V}(n,d) = V(S)$ зветься ($n$-вимірним $d$-кратним) *многовидом Веронезе*.

(c) Довести, що $\rho_d$ визначає ізоморфізм $\mathbb{P}^n$ на многовид Веронезе $\mathbb{V}(n,d)$.

(d) Довести, що $X \subset \mathbb{P}^n$ є гіперповерхнею степеня $d$ тоді й лише тоді, коли $\rho_d(X) = \mathbb{V}(n,d) \cap H$, де $H$ – *гіперплощина* (тобто визначається лінійним рівнянням).

(7) Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, $F \in \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$ – однорідний многочлен і $D(F) = \{\, a \in X \mid F(a) \neq 0 \,\}$. Довести, що $D(F)$ – афінний многовид.

*Вказівка*: Спочатку перевірте це, коли $F$ – лінійний, потому скористайтеся зануренням Веронезе.

(8) Перевірити, що $\mathbb{V}(1,2)$ є *конікою* (тобто плоскою квадрикою). Довести, що кожна незвідна проективна коніка ізоморфна $\mathbb{P}^1$.

(9) Покладемо $\mathbf{C} = \mathbf{K}[\,x_0,x_1,x_2\,]/I(C)$, де $C$ – незвідна проективна коніка. Довести, що $\mathbf{C} \not\simeq \mathbf{K}[\,x,y\,]$. (Отже, "проективний аналог" наслідка 1.2.3 не виконується.)

*Вказівка*: Довести, що максимальний ідеал $\langle\, x_0,x_1,x_2 \,\rangle$ в $\mathbf{C}$ не може бути породжений двома елементами.

### 2.4. Відокремлювані та повні многовиди

Використаємо поняття добутку, щоб виділити важливий (можливо, єдиний важливий) клас алгебричних многовидів. В деякому розумінні, він є "алгебричним аналогом" гаусдорфових топологічних просторів.

Означення 2.4.1. Простір з функціями $X$ (зокрема, алгебричний многовид) зветься *відокремлюваним*, якщо діагональ $\Delta_X = \{\,(p,p) \mid p \in X\,\}$ замкнена в $X \times X$.

Зауваження. Можна легко перевірити, що "звичайний" топологічний простір $X$ є гаусдорфовим тоді й лише тоді, коли діагональ замкнена в $X \times X$ відносно добутку топологій. Отже, відокремлюваність є справді послабленим аналогом гаусдорфовості.

З огляду на означення топології на $X \times X$, можна дати наступну "явну версію" цього означення.

Твердження 2.4.2. *Простір з функціями $X$ є відокремлюваним тоді й лише тоді, коли для кожної пари різних точок $p,q \in X$ існують дві відкриті підмножини, $U \ni p$ і $V \ni q$, і функції $a_i \in \mathcal{O}_X(U)$, $b_i \in \mathcal{O}_X(V)$, такі що $\sum_i a_i(p)b_i(q) \neq 0$, але $\sum_i a_i(z)b_i(z) = 0$ для кожної $z \in U \cap V$.*

Доведення очевидне. □

Вправа 2.4.3. Розглянемо простір з функціями $X$, визначений в наступний спосіб:

- Як множина, $X = \mathbb{A}^1 \cup \{ 0' \}$, де $0'$ – новий символ.
- Підмножина $U \subseteq X$ відкрита в $X$ тоді й лише тоді, коли $U \setminus \{ 0' \}$ відкрита в $\mathbb{A}^1$.
- Для кожної функції $f : U \to \mathbf{K}$, де $U \subseteq \mathbb{A}^1$, позначимо $\widetilde{f}$ її продовження на множину $\widetilde{U} = U \cup \{ 0' \}$, таке що $\widetilde{f}(0') = f(0)$.
- Для кожної відкритої підмножини $U \subseteq \mathbb{A}^1$ покладемо $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$ і $\mathcal{O}_X(\widetilde{U}) = \left\{ \widetilde{f} \mid f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U) \right\}$.

Перевірити, що $X$ – це дійсно простір з функціями; більш того, що він є алгебричним многовидом, але не відокремлюваним.

Цей приклад ("афінна пряма з подвоєною точкою") є досить типовим для невідокремлюваних многовидів. Ми обмежимо подальший розгляд лише відокремлюваними многовидами, хоча завжди будемо явно нагадувати умову відокремлюваності. На щастя, невідокремлювані многовиди не можуть зустрітися серед "природних", як покаже наступне твердження.

Твердження 2.4.4. *Нехай $(X, \mathcal{O}_X)$ – відокремлюваний простір з функціями, $Y \subseteq X$. Тоді $Y$ є також відокремлюваним, якщо його розглядати як простір з функціями відносно обмеження з $X$.*

Доведення очевидне. □

Наслідок 2.4.5. *Будь-який квазіпроективний (зокрема, будь-який афінний чи проективний) многовид є відокремлюваним.*

Доведення випливає з твердження 2.4.4 і вправи 2.3.11(5). □

Зазначимо наступну корисну властивість відокремлюваних многовидів.

Твердження 2.4.6. *Нехай $X$ – відокремлюваний алгебричний многовид, $Y, Z \subseteq X$ – його афінні підмноговиди. Тоді $Y \cap Z$ – також афінний многовид.*

Доведення. Як ми знаємо, $Y \times Z$ є афінним многовидом. Але $Y \cap Z \simeq (Y \times Z) \cap \Delta_X$. Цей перетин є замкненим в $Y \times Z$, отже, також є афінним многовидом. □

Тепер ми збираємося встановити важливу властивість проективних многовидів, яка виділяє їх серед усіх квазіпроективних, а саме, їхню *повноту* в розумінні наступного означення.

Означення 2.4.7. Відокремлюваний алгебричний многовид $X$ зветься *повним* якщо для будь-якого алгебричного многовиду $Y$ проекція $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ є замкненим відображенням, тобто підмножина $\mathrm{pr}_Y(Z)$ замкнена для кожної замкненої $Z \subseteq X \times Y$.

Приклад 2.4.8. Проекція $\mathrm{pr} : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $\mathrm{pr}(a,b) = b$, не є замкненою: образом гіперболи $V(xy-1)$ є $D(x) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, яка не замкнена. Отже, афінна пряма не є повною.

З іншого боку, наступний результат є досить очевидним.

Твердження 2.4.9. *Для будь-яких просторів з функціями проекція* $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ *є відкритою.*

Доведення. Достатньо довести, що образ $W = \mathrm{pr}_Y(D(U,V,g))$ відкритий в $Y$ для кожних відкритих $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ і будь-якої $g = \sum_i a_i \otimes b_i$, де $a_i \in \mathcal{O}_X(U)$, $b_i \in \mathcal{O}_Y(V)$. Але цей образ є об'єднанням $\bigcup_{p\in U} W_p$, де всі $W_p = \{ q \in V \mid \sum_i a_i(p)b_i(q) \neq 0 \}$ є відкритими в $Y$. Отже, $W$ є також відкритим. $\square$

Наведемо кілька корисних властивостей повних многовидів.

Твердження 2.4.10. (1) *Будь-який замкнений підмноговид повного многовиду є також повним.*
(2) *Якщо многовиди* $X, Y$ *повні, таким є й* $X \times Y$.
(3) *Алгебричний многовид* $X$ *повний тоді й лише тоді, коли проекція* $\mathrm{pr}_{\mathbb{A}^m} : X \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ *замкнена для кожного* $m$.
(4) *Якщо* $X$ *повний, а* $Y$ *відокремлюваний многовид, то кожне регулярне відображення* $f : X \to Y$ *є замкненим.*
(5) *Якщо квазіпроективний многовид* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *повний, він є замкненим в* $\mathbb{P}^n$ *(отже, проективним).*
(6) *Якщо повний многовид* $X$ *є* зв'язним, *то* $\mathcal{O}_X(X) = \mathbf{K}$, *тобто єдині регулярні функції на всьому* $X$ *– це константи.*

Доведення. Властивості *1* і *2* очевидні.

*3.* Нехай спочатку $Y$ – афінний многовид, замкнена підмножина $\mathbb{A}^m$. Тоді будь-яка замкнена підмножина $Z \subseteq X \times Y$ також замкнена в $X \times \mathbb{A}^m$, отже, $\mathrm{pr}_Y(Z) = \mathrm{pr}_{\mathbb{A}^m}(Z)$ замкнена в $Y$. Далі, для будь-якого многовиду $Y$ існує відкрите покриття $Y = \bigcup_i Y_i$, де $Y_i$ – афінні многовиди. Якщо $Z$ – замкнена підмножина в $X \times Y$, то $Z = \bigcup_i Z_i$, де $Z_i = Z \cap (X \times Y_i)$, і $\mathrm{pr}_Y(Z) \cap Y_i = \mathrm{pr}_Y(Z_i)$. Як ми щойно довели, кожна $\mathrm{pr}_Y(Z_i)$ є замкненою в $Y_i$, а тому $\mathrm{pr}_Y(Z)$ замкнена в $Y$. Отже, відображення $\mathrm{pr}_Y$ замкнене.

*4.* З огляду на (*1*), достатньо довести, що образ $f$ замкнений в $Y$. Позначимо через $\Gamma \subseteq X \times Y$ *графік* $f$: $\Gamma = \{ (p, f(p)) \mid p \in X \}$. Визначимо морфізм $g : X \times Y \to Y \times Y$, поклавши $g(p,q) = (f(p), q)$. Тоді $\Gamma = g^{-1}(\Delta_Y)$, отже, він замкнений в $X \times Y$ (оскільки

$Y$ відокремлюваний). Тому $f(X) = \mathrm{pr}_Y(\Gamma)$ – замкнена підмножина.

*5* – частковий випадок *4*.

*6.* Нехай $f : \mathbf{X} \to \mathbf{K}$ – регулярна функція. Ототожнюючи $\mathbf{K}$ з $\mathbb{A}^1_0 \subset \mathbb{P}^1$, ми можемо розглядати $f$ як морфізм $X \to \mathbb{P}^1$. Отже, $\operatorname{Im} f$ замкнений. Оскільки він не збігається з усім $\mathbb{P}^1$, він є скінченним: $\operatorname{Im} f = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$. Тоді $X = \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(a_i)$. Оскільки всі $f^{-1}(a_i)$ замкнені, а $X$ зв'язний, $m = 1$, тобто $f$ – константа. $\square$

Приклад 2.4.11. Розгляньте регулярне відображення $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, таке що $f(a,b) = (a^2b, ab^2)$. Знайдіть його образ. Чи є він замкненим? відкритим? локально замкненим?

Ми одержимо більше інформації про образи регулярних відображень в розділі 3.1 (теорема 3.1.17).

Теорема 2.4.12. *Кожний проективний алгебричний многовид є повним.*

Доведення. Зважаючи на твердження 2.4.10, ми маємо лише довести, що проекція $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}_{\mathbb{A}^m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ замкнена. Позначимо однорідні координати в $\mathbb{P}^n$ через $\mathbf{x} = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, а координати в $\mathbb{A}^m$ через $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Нехай $Z$ – замкнена підмножина $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$. Вона є множиною спільних нулів множини многочленів $S = \{ F_1, F_2, \dots, F_r \} \subseteq \mathbf{K}[\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,]$, які є однорідними за $x_0, x_1, \dots, x_n$. Точка $q \in \mathbb{A}^m$ належить до $\mathrm{pr}(Z)$ тоді й лише тоді, коли існує точка $p \in \mathbb{P}^n$, така що $(p,q) \in Z$, тобто $F_i(p,q) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, r$. Отже, $q \notin \mathrm{pr}(Z)$ тоді й лише тоді, коли $PV(S_q) = \emptyset$, де $S_q = \{ F_1(\mathbf{x}, q), \dots, F_r(\mathbf{x}, q) \}$. По проективній Теоремі Гільберта про нулі (теорема 2.1.3), це означає, що $I_+^k \subseteq \langle S_q \rangle$ для деякого $k$, тобто кожен одночлен степеня $k$ може бути представлений у вигляді $\sum_{i=1}^r H_i F_i(\mathbf{x}, q)$ для деяких однорідних многочленів $H_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Позначимо через $P_k$ векторний простір всіх однорідних многочленів степеня $k$ з $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$. Остання умова означає, що множина

$$\{ w_i F_i(\mathbf{x}, q) \mid i = 1, \dots, r; \quad w_i \text{ пробігає всі одночлени степеня } k - \deg F_i \}$$

породжує $P_k$, або, що те саме, $\operatorname{rk} M_k = \dim P_k$, де $M_k$ – матриця, рядки якої складаються з коефіцієнтів усіх можливих $w_i F_i$ (записаних у заданному порядку). Позначимо $D = \dim P_k$. Оскільки завжди $\operatorname{rk} M_k \leqslant \dim P_k$, остання умова означає, що принаймні один $D \times D$ мінор $M_k$ – ненульовий. Коефіцієнти матриці $M$ – многочлени від $q$, отже, множина $U_k = \{ q \in \mathbb{A}^m \mid \operatorname{rk} M_k = \dim P_k \}$ відкрита в $\mathbb{A}^m$. Тому множина $U = \bigcup_{k=1}^\infty U_k$ є також відкритою. Але ми бачили, що $U = \mathbb{A}^n \setminus \mathrm{pr}(Z)$, отже, $\mathrm{pr}(Z)$ замкнена. $\square$

Існують приклади повних многовидів $X$, які не є проективними (отже, й не квазіпроективними). Також відомо (теорема Нагати), що кожен алгебричний многовид ізоморфний відкритому підмноговиду деякого повного многовиду.

Вправи 2.4.13. (1) Довести, що коли $X$ є зв'язним повним, а $Y$ – афінним многовидом, то будь-яке відображення $f : X \to Y$ є константою (тобто $\operatorname{Im} f$ складається з єдиної точки).

(2) Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – нескінченний проективний многовид, $H \subseteq \mathbb{P}^n$ – гіперповерхня. Довести, що $X \cap H \neq \emptyset$.

*Вказівка*: Використайте попередню вправу, а також вправу 2.3.11(7).

(3) Розглянемо множину однорідних многочленів степеня $d$ з $n$ змінними. Ототожнюючи $F$ і $\lambda F$ для $\lambda \neq 0$, одержимо проективний простір $P(d,n)$. Довести, що множина $R(d,n)$ класів *звідних* многочленів є замкненою в $P(d,n)$.

(4) Знайти множину рівнянь, які визначають $R(2,n)$.

## 2.5. Раціональні відображення

Тепер ми введемо так звані "*раціональні відображення*" алгебричних многовидів. Насправді, вони є відображеннями *не* многовидів, а їхніх відкритих щільних підмножин.

Означення 2.5.1. (1) Нехай $X, Y$ – алгебричні многовиди. Позначимо через $\widetilde{\operatorname{Mor}}(X,Y)$ множину морфізмів $f : U \to Y$, де $U$ – відкрита підмножина $X$. Два такі морфізми, $f : U \to Y$ та $g : V \to Y$, назвемо *еквівалентними* (позначення: $f \sim g$), якщо $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$. Класи цієї еквівалентності звуться *раціональними відображеннями* з $X$ в $Y$. Множина всіх раціональних відображень з $X$ в $Y$ позначається через $\operatorname{Rat}(X,Y)$.

(2) Раціональне відображення $X \to \mathbf{K}$ зветься *раціональною функцією* на $X$. Множина всіх раціональних функцій на $X$ позначається $\mathbf{K}(X)$.

(3) Кажуть, що раціональне відображення $f \in \operatorname{Rat}(X,Y)$ *визначене* в точці $p \in X$, якщо існує відображення $\widetilde{f} \in \widetilde{\operatorname{Mor}}(X,Y)$ в класі $f$, таке що $\widetilde{f} : U \to Y$ і $p \in U$. Множина всіх точок $p \in X$, таких що $f$ визначене в $p$, зветься *областю визначеності* $f$ і позначається $\operatorname{Dom}(f)$.

Звичайно, $\operatorname{Dom}(f)$ – відкрита щільна підмножина $X$ і $f$ може бути розглянуте як морфізм $\operatorname{Dom}(f) \to Y$. Точки з $\operatorname{Dom}(f)$ також звуться *регулярними точками*, а точки з множини $\operatorname{Ind}(f) = X \setminus \operatorname{Dom}(f)$ – *спеціальними точками* раціонального відображення $f$.

Наступне твердження дає опис раціональних функцій на алгебричному многовиді. Зауважимо спочатку, що коли $U \subseteq X$ – довільна відкрита щільна підмножина, то, очевидно, $\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(U)$; цей ізоморфізм визначається обмеженням функцій.

Твердження 2.5.2. (1) *Якщо* $X$ *– незвідний алгебричний многовид,* $U \subseteq X$ *– відкритий афінний підмноговид і* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,U\,]$*, то* $\mathbf{K}(X)$ *є ізоморфним полю часток кільця* $\mathbf{A}$*.*

(2) *Якщо* $X = \bigcup_{i=1}^{s} X_i$ *– незвідний розклад* $X$*, то* $\mathbf{K}(X) \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathbf{K}(X_i)$*.*

Доведення. *1.* В цьому випадку будь-яка непорожня відкрита підмножина є щільною. Отже, ми можемо припустити, що $X = U$ – афінний многовид з координатною алгеброю $\mathbf{A}$. Якщо $a/b$ – елемент поля часток $\mathbf{Q}$ кільця $\mathbf{A}$, то $f$ визначає раціональну функцію $D(b) \to \mathbf{K}$. Отже, ми одержуємо гомоморфізм $\mathbf{Q} \to \mathbf{K}(X)$. Оскільки $\mathbf{Q}$ – поле, він є мономорфізмом. Розглянемо будь-яку раціональну функцію $f \in \mathbf{K}(X)$. Відкрита множина $\mathrm{Dom}(f)$ містить головну відкриту підмножину $D(g)$ для деякого $g \in \mathbf{A}$. Далі, оскільки $f$ – регулярна функція на $D(g)$, вона має вигляд $a/g^k$ для деяких $a \in \mathbf{A}$, $k \in \mathbb{N}$ (див. вправи 1.6.6). Отже, $f$ належить до образу $\mathbf{Q}$, тобто занурення $\mathbf{Q} \to \mathbf{K}(X)$ є ізоморфізмом.

*2.* Покладемо $U_i = X \setminus \left(\bigcup_{j\neq i} X_j\right)$. Це відкрита непорожня, а тому щільна підмножина в $X_i$, отже, $\mathbf{K}(X_i) = \mathbf{K}(U_i)$. $V = \bigcup_i U_i$ є відкритою щільною підмножиною в $X$, отже, $\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(V)$. Але оскільки $U_i \cap U_j = \emptyset$ для $i \neq j$, то, очевидно, $\mathbf{K}(V) = \prod_i \mathbf{K}(U_i)$. □

Якщо $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ – два раціональні відображення, ми не можемо визначити, взагалі кажучи, їхній добуток $g \circ f$, оскільки весь образ $f$ може належати до множини спеціальних точок $g$. Останнє неможливо, якщо $f$ є *домінантним*, тобто образ $f(\mathrm{Dom}(f))$ щільний в $Y$. Тому ми можемо завжди визначити композиції *домінантних раціональних* відображень. Зокрема, раціональне відображення $f : X \to Y$ зветься *біраціональним*, якщо воно домінантне й існує домінантне раціональне відображення $g : Y \to X$, таке що $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ і $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (як раціональні відображення). Якщо біраціональне відображення $X \to Y$ існує, то многовиди $X$ і $Y$ звуться *біраціонально еквівалентними*. В алгебричній геометрії часто розглядають многовиди скоріше з точністю до біраціональної еквівалентності, ніж з точністю до ізоморфізму. Насправді, $X$ і $Y$ є біраціонально еквівалентними тоді й лише тоді, коли вони містять ізоморфні відкриті щільні підмножини (які можна завжди вибрати навіть афінними).

Твердження 2.5.3. *Алгебричні многовиди* $X$ *і* $Y$ *біраціонально еквівалентні тоді й лише тоді, коли* $\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(Y)$*.*

Доведення. Зважаючи на твердження 2.5.2, ми можемо припустити $X$ і $Y$ афінними й незвідними. Покладемо $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$ і $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\,Y\,]$. Вони є скінченно породженими $\mathbf{K}$-алгебрами: $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,a_1, \dots, a_n\,]$ і $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\,b_1, \dots, b_m\,]$. Якщо $U \subseteq X$ і $V \subseteq Y$ – відкриті щільні підмножини й $U \simeq V$, то $\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(U) \simeq \mathbf{K}(V) \simeq \mathbf{K}(Y)$. Навпаки, нехай $\varphi : \mathbf{K}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}(Y)$ – ізоморфізм, $a'_i = \varphi(a_i)$ і $b'_j = \varphi^{-1}(b_j)$. Ми розглянемо $\mathbf{K}(X)$ ($\mathbf{K}(Y)$) як поле часток $\mathbf{A}$ (відповідно, $\mathbf{B}$) і позначимо через $d$ (відповідно, $c$) спільний знаменник усіх $a'_i$ (відповідно, $b'_j$). Тоді $a'_i$ є регулярними функціями на $V = D(d)$, а $b_j$ – регулярними функціями на $U = D(c)$. Вони визначають регулярні відображення $f : V \to X$ і $g : U \to Y$, відповідно, такі що $f^*(a_i) = a'_i$ і $g^*(b_j) = b'_j$. Отже, $g \circ f = \mathrm{id}$ на $V \cap g^{-1}(U)$, а $f \circ g = \mathrm{id}$ на $U \cap f^{-1}(V)$, тобто, розглянуті як раціональні відображення, $f$ і $g$ є біраціональними. □

Наступний результат є досить простим, але часто корисним.

Твердження 2.5.4. *Будь-який незвідний алгебричний многовид є біраціонально еквівалентним або афінному (проективному) простору, або афінній (проективній) гіперповерхні.*

Доведення. Поле $\mathbf{Q}$ раціональних функцій на незвідному многовиді $X$ є завжди скінченно породженим розширенням $\mathbf{K}$. Згідно з твердженням A.4, існують два можливі випадки:

1) $\mathbf{Q} \simeq \mathbf{K}(\,x_1, \dots, x_n\,)$. Тоді $X$ біраціонально еквівалетний $\mathbb{A}^n$ (і $\mathbb{P}^n$).

2) $\mathbf{Q} = \mathbf{K}(\,\alpha_1, \dots, \alpha_n\,)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ – алгебрично незалежні над $\mathbf{K}$, а $\alpha_n$ – алгебричний над $\mathbf{R} = \mathbf{K}(\,\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\,)$. Більш того, в цьому випадку існує єдиний незвідний многочлен $F$, такий що $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$ (див. лему A.2). Покладемо $Y = V(F) \subset \mathbb{A}^n$. Тоді $I(Y) = I = \langle\, F\,\rangle$ і $\mathbf{K}[\,Y\,] = \mathbf{K}[\,\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\,]$ для $\xi_i = x_i + I$. Оскільки $F$ не може ділити ніякий многочлен від $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, елементи $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ алгебрично незалежні в $\mathbf{K}(Y)$. Отже, $\mathbf{K}(Y) \simeq \mathbf{Q}$, тобто $X$ біраціонально еквівалентний гіперповерхні $Y$. □

Вправи 2.5.5. (1) Многовид $X$ звуть *раціональним*, якщо він є біраціонально еквівалентним афінному (або, що те саме, проективному) простору. Довести що:

(a) Добуток раціональних многовидів є раціональним.
(b) Будь-яка незвідна коніка є раціональною.
(c) Кубіка з вузлом $V(y^2 - x^3 - x^2)$, а також кубіка з вістрям $V(y^2 - x^3)$ – раціональні.
*Вказівка*: Може бути корисним розглянути проективне замикання кубіки з вузлом і другу афінну частину цього замикання.

(2) Довести, що коли $X, Y \subset \mathbb{P}^2$ – плоскі проективні криві, то $X \cap Y \neq \emptyset$. Вивести звідси, що $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \not\simeq \mathbb{P}^2$.

(3) Довести що *квадратичне перетворення Кремони* $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, де $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, є біраціональним. Знайти $\mathrm{Dom}(\varphi)$ і $\mathrm{Dom}(\varphi^{-1})$.

## 2.6. Ґрассманнові многовиди й векторні розшарування

Проективний простір $\mathbb{P}^{n-1}$ можна розглядати як множину всіх одновимірних лінійних підпросторів $\mathbf{K}^n$. Ми збираємося ввести структуру проективного многовиду на множині всіх підпросторів $\mathbf{K}^n$ розмірності $d$ для довільного $d$. Щоб зробити це, ми використаємо так звані *ґрассманнові координати* таких підпросторів (інколи вони також звуться *плюкеровими координатами*). Покладемо $N = \binom{n}{d} - 1$ і визначимо деякий порядок на множині усіх $d$-ок $k_1k_2\dots k_d$ з $1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_d \leqslant n$ (їх існує саме $N+1$).

Означення 2.6.1. Нехай $V$ – $d$-вимірний підпростір $\mathbf{K}^n$ з базисом $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$, де $\mathbf{v}_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$. Ґрассманнові координати $V$, визначені цим базисом, задаються як вектор $(p_{k_1k_2\dots k_d})$, де

$$p_{k_1k_2\dots k_d} = \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_d} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \dots & a_{2k_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{dk_1} & a_{dk_2} & \dots & a_{dk_d} \end{vmatrix}. \tag{2.6.1}$$

Твердження 2.6.2. *Якщо* $(p_{k_1k_2\dots k_d})$ *і* $(p'_{k_1k_2\dots k_d})$ *є ґрассманновими координатами того самого підпростору* $V$, *визначеними двома базисами, існує ненульовий елемент* $\lambda \in \mathbf{K}$, *такий що* $p'_{k_1k_2\dots k_d} = \lambda p_{k_1k_2\dots k_d}$ *для всіх* $d$*-ок* $k_1k_2\dots k_d$.

Доведення. Дійсно, якщо $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ і $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_d$ є базисами, які визначають ці координати, існує обертовна $d \times d$ матриця $A$, така що $A\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d)^\top = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_d)^\top$. Тоді $p'_{k_1k_2\dots k_d} = (\det A) p_{k_1k_2\dots k_d}$ для кожної $d$-ки $k_1k_2\dots k_d$,. □

Отже, якщо ми розглянемо точку проективного простору, відповідну до ґрассманнових координат підпростору $V$, вона не залежить від вибору базиса в $V$, тобто ми одержуємо відображення $\gamma$ з множини $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ всіх підпросторів розмірності $d$ до $\mathbb{P}^N$. Позначимо однорідні координати в $\mathbb{P}^N$ через $x_{k_1k_2\dots k_d}$ ($1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_d \leqslant n$). Наступна теорема показує, що це відображення є ін'єктивним і його образ є проективним многовидом. Зауважимо спочатку, що формула (2.6.1) визначає $p_{k_1k_2\dots k_d}$ для будь-якої $d$-ки $k_1k_2\dots k_d$ з $1 \leqslant k_i \leqslant n$, але кожне з них можна обчислити через ґрассманнові координати й “знакозмінні правила”: $p_{k_1k_2\dots k_d} = 0$, якщо $k_i = k_j$ для деяких $i \neq j$, і $p_{k_1k_2\dots k_d} = -p_{k'_1k'_2\dots k'_d}$, якщо $d$-ку $k'_1k'_2\dots k'_d$ одержано з $k_1k_2\dots k_d$ перестановкою двох елементів.

Теорема 2.6.3. (1) *Якщо* $(p_{k_1k_2\dots k_d})$ *є ґрассманновими координатами підпростору* $V$ *, то* $V$ *збігається з множиною всіх векторів* $\mathbf{v}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *, таких що*

$$\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}a_{k_i}p_{k_1\dots\check{k}_i\dots k_{d+1}}=0 \text{ для всіх } (d+1)\text{-ок} \quad (2.6.2)$$

$$k_1k_2\dots k_{d+1} \text{ з } 1\leqslant k_1<k_2<\dots<k_{d+1}\leqslant n.$$

*Зокрема, різні підпростіри мають різні ґрассманнові координати.*

(2) $\operatorname{Im}\gamma=PV(S)$ *, де* $S$ *– множина всіх рівнянь наступного вигляду:*

$$\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x_{k_1k_2\dots k_{d-1}l_i}x_{l_1\dots\check{l}_i\dots l_{d+1}}=0 \quad (2.6.3)$$

для всіх можливих $1\leqslant k_1<\dots<k_{d-1}\leqslant n$ і $1\leqslant l_1<\dots<l_{d+1}\leqslant n$ .

Доведення. *1*. Якщо ґрассманнові координати були визначені базисом $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_d$ , то $\mathbf{v}\in V$ тоді й лише тоді, коли ранг матриці з рядками $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_d,\mathbf{v}$ дорівнює $d$ . Це означає, що всі її $(d+1)\times(d+1)$-мінори дорівнюють $0$ . Але остання умова збігається з рівняннями (2.6.2).

*2*. Якщо $p=(p_{k_1k_2\dots k_d})$ задаються формулою (2.6.1), то $p_{k_1k_2\dots k_{d-1}l_i}=\sum_{j=1}^{d}A_ja_{jl_i}$ , де

$$A_j=(-1)^{d+j}\begin{vmatrix} a_{1k_1} & \dots & a_{1k_{d-1}}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{(j-1)k_1} & \dots & a_{(j-1)k_{d-1}}\\ a_{(j+1)k_1} & \dots & a_{(j+1)k_{d-1}}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{dk_1} & \dots & a_{dk_{d-1}} \end{vmatrix}$$

не залежить від $i$ . Тому

$$\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}p_{k_1k_2\dots k_{d-1}l_i}p_{l_1\dots\check{l}_i\dots l_{d+1}}=\sum_{j=1}^{d}A_j\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}a_{jl_i}p_{l_1\dots\check{l}_i\dots l_{d+1}}.$$

Але

$$\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}a_{jl_i}p_{l_1\dots\check{l}_i\dots l_{d+1}}=\begin{vmatrix} a_{jl_1} & \dots & a_{jl_{d+1}}\\ a_{1l_1} & \dots & a_{1l_{d+1}}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{dl_1} & \dots & a_{dl_{d+1}} \end{vmatrix}=0,$$

оскільки цей детермінант має два рівні рядки. Отже, $p\in PV(S)$ .

Нехай тепер $p\in PV(S)$ . Зафіксуємо деяку $d$-ку $k_1k_2\dots k_d$ , таку що $p_{k_1k_2\dots k_d}\neq 0$ . Заради простоти, припустимо, що $k_1k_2\dots k_d=$

$12\dots d$, а $p_{12\dots d}=1$. Розглянемо підпростір $V$ з базисом $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,$ $\mathbf{v}_d$, де вектор $\mathbf{v}_k$ має такі координати $a_{ki}$:

$$a_{ki}=\begin{cases}1 & \text{якщо } i=k\leqslant d\,,\\ 0 & \text{якщо } i\neq k\leqslant d\,,\\ (-1)^{d-i}p_{1\dots\check{i}\dots dk} & \text{якщо } k>d\,.\end{cases}$$

Позначимо через $q=(q_{k_1k_2\dots k_d})$ ґрассманнові координати $V$. Очевидно, $q_{12\dots d}=1$ і $q_{1\dots\check{i}\dots dk}=p_{1\dots\check{i}\dots dk}$ для кожного $k$. Доведемо, що $q_{k_1k_2\dots k_d}=p_{k_1k_2\dots k_d}$ для будь- якої $k_1k_2\dots k_d$. Позначимо через $m$ кількість індексів з $k_1k_2\dots k_d$, які більші за $d$, і використаємо індукцію за $m$. Випадок $m\leqslant 1$ було тільки-но розглянуто. Припустимо, що це твердження вірне для всіх $d$-ок з меншим значенням $m$. Знайдемо в $d$-ці $k_1k_2\dots k_d\neq 12\dots d$ деякий індекс $k_j>d$. Тоді, зважаючи на формулу (2.6.3) для $k_1\dots\check{k}_j\dots k_d$ та $12\dots dk_j$,

$$q_{k_1k_2\dots k_d}=(-1)^{d-j}q_{k_1\dots\check{k}_j\dots k_dk_j}q_{12\dots d}=\sum_{i\neq j}(-1)^{i+j}q_{k_1\dots\check{k}_j\dots k_di}q_{1\dots\check{i}\dots dk_j}\,.$$

Очевидно, всі $d$-ки, які зустрічаються в останніх сумах, мають менші значення $m$. Отже, відповідні координати $q$ збігаються з однойменними координатами $p$. Тому й $q_{k_1k_2\dots k_d}=p_{k_1k_2\dots k_d}$, тобто $p=q\in\operatorname{Im}\gamma$. $\square$

Ми завжди ототожнюватимемо $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ з його образом у $\mathbb{P}^N$, отже, розглядатимемо його як проективний многовид (який зветься *ґрассманновим многовидом* або *ґрассманніаном*). З іншого боку, ми ототожнюємо кожну точку ґрассманніана з відповідним підпростором.

Твердження 2.6.4. *Для довільних $d$ і $n$ ґрассманнів многовид $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ є незвідним.*

Доведення. Розглянемо в афінному просторі всіх $d\times n$ матриць відкриту підмножину $U$ матриць рангу $d$. Вона є незвідною, оскільки $\mathbb{A}^{dn}$ незвідний. Але формула (2.6.1) визначає сюр'єктивний морфізм $U\to\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$. Отже, $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ є також незвідним як образ незвідного многовиду при неперервному відображенні. $\square$

Вправи 2.6.5. (1) Нехай $W$ – $m$-вимірний підпростір у $\mathbf{K}^n$. Довести що для кожного $r$ підмножина $\{\,V\in\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)\mid \dim(V+W)\leqslant r\,\}$ є замкненою в $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$. Зокрема, наступні підмножини замкнені:
(a) $\{\,V\in\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)\mid\ V+W\neq\mathbf{K}^n\,\}$,
(b) $\{\,V\in\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)\mid V\cap W\neq\{\,0\,\}\,\}$.
Зауважимо, що при $d+m\geqslant n$ множина (a), а при $d+m\leqslant n$ множина (b) не співпадають з усім ґрассманніаном $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$. Оскільки $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ є незвідним, це означає, що вони "дуже малі": їхні доповнення – відкриті й щільні.

(2) Нехай $d' < d$. Довести що множина $\{ (V, W) \mid W \subset V \}$ є замкненою в $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n) \times \mathbb{G}\mathsf{r}(d',n)$.

(3) *Прапор* типу $(d_1, d_2, \dots, d_m)$, де $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_m < n$ – це башта підпросторів $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset \mathbf{K}^n$, така що $\dim V_i = d_i$ для $i = 1, \dots, m$. Показати, що множину всіх прапорів даного типу можна розглядати як проективний многовид.

Ґрассманнові многовиди тісно пов'язані з *векторними розшаруваннями*.

ОЗНАЧЕННЯ 2.6.6. *Векторним розшаруванням* рангу $d$ на алгебричному многовиді $X$ зветься морфізм $\xi : B \to X$, такий що виконуються наступні умови:

(1) Існує відкрите покриття $X = \bigcup_i U_i$ й ізоморфізми $\varphi_i : U_i \times \mathbf{K}^d \xrightarrow{\sim} \xi^{-1}(U_i)$, такі що $\xi \circ \varphi_i = \mathrm{pr}_X$ на $U_i$.

(2) Для кожної пари $i, j$ існує регулярне відображення $\theta_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(d, \mathbf{K})$, таке що $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(p, v) = (p, \theta_{ij}(p)v)$ для кожної точки $(p, v) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbf{K}^d$.

Дані $\{ U_i, \varphi_i, \theta_{ij} \}$ звуться *тривіалізацією* векторного розшарування $\xi$. (Очевидно, відображення $\theta_{ij}$ може бути однозначно відновлене за $\{ U_i, \varphi_i \}$.)

Найпростіший приклад векторного розшарування – це, звичайно, проекція $\mathrm{pr}_X$ добутку $X \times \mathbf{K}^d$. В подальшому ми розглядатимемо цей добуток як векторне розшарування, не згадуючи явно проекцію. Для векторного розшарування $\xi$ ми розглядатимемо кожен шар $\xi^{-1}(p)$ як $d$-вимірний векторний простір, використовуючи ізоморфізм $\xi^{-1}(p) \simeq \mathbf{K}^d$, індукований $\varphi_i$, де $p \in U_i$. Зауважимо, що вибір іншого $U_j \ni p$ дає ізоморфну структуру векторного простору на $\xi^{-1}(p)$. Звичайно, якщо ми підрозіб'ємо відкриті підмножини $U_i$: $U_i = \bigcup_k V_{ik}$ для деяких відкритих $V_{ik}$, то обмеження $\varphi_i$ і $\theta_{ij}$ на це підрозбиття також задає тривіалізацію $\xi$. Зокрема, маючи справу з кількома векторними розшаруваннями на $X$, ми завжди можемо розглядати їхні тривіалізації зі *спільним* відкритим покриттям.

ОЗНАЧЕННЯ 2.6.7. Для двох векторних розшарувань $\xi : B \to X$ і $\xi' : B' \to X$ рангів, відповідно, $d$ і $d'$, з тривіалізаціями, відповідно, $\{ U_i, \varphi_i \}$ і $\{ U_i, \varphi'_i \}$, *морфізм векторного розшарування* $\xi$ в $\xi'$ визначається як регулярне відображення $f : B \to B'$, таке що $\xi = \xi' \circ f$ і для кожного $i$ існує регулярне відображення $g_i : U_i \to \mathrm{Mat}(d' \times d, \mathbf{K})$, таке що $\varphi_i'^{-1} \circ f \circ \varphi_i(p, v) = (p, g_i(p)v)$ для всіх точок $(p, v) \in U_i \times \mathbf{K}^d$.

Зокрема, якщо $B \subseteq B'$ і занурення $B \to B'$ є морфізмом векторних розшарувань, $\xi$ звуть *підрозшаруванням* $\xi'$.

Можна перевірити, що коли ця умова виконується для *деяких* тривіалізацій, то вона виконується також для *будь-яких* тривіалізацій $\xi$ і $\xi'$. Зокрема, маємо поняття *ізоморфізму* векторних розшарувань. Векторне розшарування, ізоморфне добутку $X \times \mathbf{K}^n$, зветься *тривіальним.* Перша умова з означення показує, що кожне векторне розшарування є "*локально тривіальним* ": його обмеження на кожне $U_i$ з тривіалізіції є насправді тривіальним розшаруванням.

Приклад 2.6.8. Нехай $\mathbb{G} = \mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$. Розглянемо наступну підмножину $\mathbb{B} = \mathbb{B}(d,n) \subseteq \mathbb{G} \times \mathbf{K}^n$: $\mathbb{B} = \{\, (p,v) \mid v \in V_p \,\}$, де $V_p$ позначає $d$-вимірний підпростір $\mathbf{K}^n$, відповідний до точки $p \in \mathbb{G}$. Теорема 2.6.3(1) показує, що $\mathbb{B}$ – замкнена в $\mathbb{G} \times \mathbf{K}^n$, отже, вона є алгебричним (навіть квазіпроективним) многовидом. Позначимо через $\pi = \pi(d,m) : \mathbb{B} \to \mathbb{G}$ обмеження проекції $\mathrm{pr}_{\mathbb{G}}$ на $\mathbb{B}$. Перевіримо, що $\pi^{\cdot}\mathbb{B} \to \mathbb{G}$ є векторним розшаруванням рангу $d$. А саме, для кожної $d$-ки $\mathbf{k} = k_1k_2\dots k_d$ ($1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_d \leqslant n$) покладемо $\mathbb{G}_{\mathbf{k}} = D(x_{\mathbf{k}})$ (канонічне афінне покриття $\mathbb{G}$) і $\mathbb{B}_{\mathbf{k}} = \pi^{-1}(\mathbb{G}_{\mathbf{k}})$. Для кожної точки $p \in \mathbb{G}_{\mathbf{k}}$ позначимо через $\{\, \mathbf{v}_1^p, \mathbf{v}_2^p, \dots, \mathbf{v}_d^p \,\}$ базиси $V_p$, такі що $j$-а координата $\mathbf{v}_i^p$ є $p_{k_1\dots j\dots k_d}$ ($j$ стоїть на $i$-ому місті). (Цей базис збігається, з точністю до множника $p_{\mathbf{k}}$, з побудованим у доведенні теореми 2.6.3(2)). Тоді правило: $\gamma_{\mathbf{k}}(p,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d)) = (p, \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{v}_i^p)$, визначає ізоморфізм $\gamma_{\mathbf{k}} : \mathbb{G}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{K}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\mathbf{k}}$, такий що $\pi \circ \gamma = \mathrm{pr}_{\mathbb{G}}$. Більш того, можна легко бачити, що коли $p \in \mathbb{G}_{\mathbf{k}} \cap \mathbb{G}_{\mathbf{l}}$ і $\{\, \mathbf{u}_1^p, \mathbf{u}_2^p, \dots, \mathbf{u}_d^p \,\}$ — це базис $V_p$, побудований по відношенню до $\mathbb{G}_{\mathbf{l}}$, то $\mathbf{u}_j^p = \sum_{i=1}^d p_{\mathbf{k}}^{-1} p_{l_1\dots k_i \dots l_d} \mathbf{v}_i^p$ ($k_i$ – на $j$-ому місті). Це дає необхідні регулярні відображення $\mathbb{G}_{\mathbf{k}} \cap \mathbb{G}_{\mathbf{l}} \to \mathrm{GL}(d,\mathbf{K})$.

Знову ми часто говоримо про $\mathbb{B}(d,n)$ як про векторне розшарування на $\mathbb{G}\mathsf{r}(d,n)$ без явного згадування про $\gamma(d,n)$.

Векторне розшарування $\pi : \mathbb{B}(d,n) \to \mathbb{G}(d,n)$ зветься *канонічним векторним розшаруванням* на ґрассманніані $\mathbb{G}(d,n)$. Наступні міркування показують його спеціальну роль в теорії векторних розшарувань.

Твердження 2.6.9. *Нехай $\xi : B \to X$ – векторне розшарування рангу $d$ і $f : Y \to X$ – регулярне відображення. Позначимо через $f^*(B)$ підмножину $\{\, (y,b) \mid f(y) = \xi(b) \,\} \subseteq Y \times B$, а через $f^*(\xi)$ – обмеження на $f^*(B)$ проекції $\mathrm{pr}_Y$. Тоді $f^*(\xi) : f^*(B) \to Y$ є також векторним розшаруванням рангу $d$.*

Векторне розшарування $f^*(\xi)$ зветься *оберненим образом* $\xi$ при відображенні $f$.

Доведення. Нехай $\{\, U_i, \varphi_i, \theta_{ij} \,\}$ – тривіалізіція $\xi$. Покладемо $V_i = f^{-1}(U_i)$ і $\psi_i(y,v) = (y, \varphi_i(f(y),v))$ для кожної точки $y \in V_i$. Ця пара належить до $f^*(B)$, оскільки $\xi \circ \varphi_i(f(y),v) = \mathrm{pr}_X(f(y),v) = f(y)$. Нарешті, покладемо $\tau_{ij} = \theta_{ij} \circ f : V_i \cap V_j \to$

$\mathrm{GL}(d, \mathbf{K})$. Можна перевірити, що $\{ V_i, \psi_i, \tau_{ij} \}$ є тривілізацією $f^*(\xi)$ (ми залишаємо це читачеві). $\square$

Якщо $B = X \times \mathbf{K}^d$ – тривіальне векторне розшарування, його обернений образ при $f$ канонічно ізоморфний тривіальному векторному розшаруванню $Y \times \mathbf{K}^d$: треба відобразити точку $(y, p, v)$ з $f^*(B)$ у $(y, v)$ (нагадаємо, що $p = f(y)$). Ми завжди ототожнюємо ці векторні розшарування.

Зауважимо, що $\mathbb{B}(d, n)$ виникло як підрозшарування тривіального розшарування $\mathbb{G} \times \mathbf{K}^n$. Виявляється, що векторні розшарування $\mathbb{B}(d, n)$ насправді є "*універсальними*" прикладами підрозшарувань тривіальних розшарувань.

Теорема 2.6.10. *Припустимо, що $\xi : B \to X$ – підрозшарування тривіального векторного розшарування $X \times \mathbf{K}^n$. Тоді існує єдиний морфізм $f : X \to \mathbb{G}\mathsf{r}(d, n)$, такий що $B = (f \times 1)^{-1}(\mathbb{B}(d, n))$, де $\mathbb{B}(d, n)$ розглядається як підмножина $\mathbb{G}\mathsf{r}(d, n) \times \mathbf{K}^n$.* (Тоді, очевидно, $B \simeq f^*(\mathbb{B}(d, n))$.)

Доведення. Для кожної точки $p \in X$ $\xi^{-1}(p)$ – це $d$-вимірний підпростір у $\mathbf{K}^n$. Позначимо через $f(p)$ відповідну точку $\mathbb{G}\mathsf{r}(d, n)$. Тоді, очевидно, $B = (f \times 1)^{-1}(\mathbb{B}(d, n))$, отже, маємо лише перевірити, що відображення $f : X \to \mathbb{G}\mathsf{r}(d, n)$ є регулярним.

Розглянемо тривіалізіцію $\{ U_i, \varphi_i, \theta_{ij} \}$ розшарування $\xi$. Якщо $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d \}$ – базис $\mathbf{K}^d$, то $\{ \varphi_i(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi_i(\mathbf{e}_d) \}$ – базис $\xi^{-1}(p)$ для кожного $p \in U_i$. Крім того, оскільки відображення $\varphi_i$ регулярне, координати векторів $\varphi_i(\mathbf{e}_j)$ є регулярними функціями на $U_i$. Отже, ґрассманнові координати підпростору $\xi^{-1}(p)$, або координати точки $f(p)$, є регулярними функціями на $U_i$. Тому $f$ дійсно є регулярним. $\square$

## A. Додаток: Степінь трансцендентності

Нагадаємо важливі факти, які стосуються алгебричної залежності й степеня трансцендентності. Надалі $\mathbf{Q} \supseteq \mathbf{K}$ – розширення полів (ми не вважаємо $\mathbf{K}$ обов'язково алгебрично замкненим).

Означення A.1. (1) Множина $S \subseteq \mathbf{Q}$ зветься *алгебрично незалежною* (над $\mathbf{K}$), якщо $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ для будь-яких елементів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in S$ і будь-якого ненульового многочлена $F \in \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$. Інакше $S$ зветься *алгебрично залежною.*

(2) *Степінь трансцендентності* $\mathbf{Q}$ (над $\mathbf{K}$) є, за означенням, максимальною потужністю алгебрично незалежних підмножин $S \subseteq \mathbf{Q}$ (число елементів в $S$, якщо вона скінченна). Вона позначається $\operatorname{tr.deg}(\mathbf{Q}/\mathbf{K})$, або $\operatorname{tr.deg} \mathbf{Q}$, якщо $\mathbf{K}$ фіксоване.

(3) Підмножина $S \subseteq \mathbf{Q}$ зветься *базою трансцендентності* $\mathbf{Q}$ (над $\mathbf{K}$), якщо вона алгебрично незалежна і $\mathbf{Q}$ є алгебричним розширенням $\mathbf{K}(S)$.

(4) $\mathbf{Q}$ зветься *чисто трансцендентним* над $\mathbf{K}$, якщо воно ізоморфне полю раціональних функцій $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)$ для деякого $n$.

Звичайно, $\operatorname{tr.deg}(\mathbf{Q}/\mathbf{K}) = 0$ тоді й лише тоді, коли $\mathbf{Q}$ є алгебричним розширенням $\mathbf{K}$.

Лема A.2. *Припустимо, що множина $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq \mathbf{Q}$ є алгебрично незалежною, а множина $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta\}$ – алгебрично залежною. Тоді:*

(1) *Існує єдиний (з точністю до скалярного множника) незвідний многочлен $F \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$, такий що $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = 0$.*

(2) *Для кожного номера $i = 0, 1, \dots, n$ або $\beta$ – алгебричний над $\mathbf{K}(\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$, або множина $\{\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n, \beta\}$ є алгебрично незалежною, а $\alpha_i$ є алгебричним над $\mathbf{K}(\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n, \beta)$.*

Доведення. *1*. Існування $F$ є очевидним. Нехай $G$ – інший незвідний многочлен, такий що $G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = 0$. Якщо $G \neq \lambda F$ для будь-якого $\lambda \in \mathbf{K}$, вони є співпервинними в $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$, отже, також у $\mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)[x_{n+1}]$. Тому існують два многочлени $A, B \in \mathbf{K}(x_1, \dots, x_n)[x_{n+1}]$, такі що $AF + BG = 1$. Помноживши на спільний знаменник, ми одержимо рівність $CF + DG = H$, де $C, D \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$, а $H \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$. Отже, $H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0$, що неможливо.

*2*. Припустимо, що $\beta$ не є алгебричним над $\mathbf{K}(\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)$. Тоді незвідний многочлен $F$, такий що $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = 0$ містить $x_i$, звідки $\alpha_i$ є алгебричним над $\mathbf{K}(\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n, \beta)$. Припустимо, що множина $\{\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n, \beta\}$ є алгебрично залежною. Тоді $G(\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_n, \beta) = 0$ для деякого незвідного многочлена $G(x_1, \dots, \check{x}_i, \dots, x_{n+1})$, що протирічить (*1*), оскільки $G \neq \lambda F$ для будь-якого $\lambda \in \mathbf{K}$. $\square$

Наслідок A.3. (1) *Якщо $S$ – база трансцендентності $\mathbf{Q}$, а $T$ – будь-яка алгебрично незалежна підмножина, то $\#(T) \leqslant \#(S)$.*

(2) *$\#(S) = \operatorname{tr.deg} \mathbf{Q}$ для будь-якої бази трансцендентності $S$.*

(3) *У башті розширень полів $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{L}$, якщо $S$ є базою трансцендентності $\mathbf{L}$ над $\mathbf{Q}$, а $T$ є базою трансцендентності $\mathbf{Q}$ над $\mathbf{K}$, то $S \cup T$ є базою трансцендентності $\mathbf{L}$ над $\mathbf{K}$.*

(4) $\operatorname{tr.deg}(\mathbf{L}/\mathbf{K}) = \operatorname{tr.deg}(\mathbf{L}/\mathbf{Q}) + \operatorname{tr.deg}(\mathbf{Q}/\mathbf{K})$.

Доведення. Ми розглянемо лише випадок, коли $S$ і $T$ – скінченні множини (інші нам не потрібні). Нехай $S = \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$, $T = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \}$.

*1*. Доведемо (індукцією за $k$), що з точністю до перестановки елементів $S$ множини $S_k = \{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \}$ є також базами трансцендентності. Це є вірним для $S_0 = S$. Припустимо, що це є вірним для $S_k$. Зокрема, $S_k$ є алгебрично незалежною, між тим як $S_k \cup \{ \beta_{k+1} \}$ є алгебрично залежною. Оскільки $\beta_{k+1}$ не є алгебричним над $\mathbf{K}( \beta_1, \ldots, \beta_k )$, з твердження A.2 випливає, що для деякого $i$ $( k < i \leqslant n )$ множина $S' = (S_k \cup \{ \beta_{k+1} \}) \setminus \{ \alpha_i \}$ є алгебрично незалежною, між тим, як $\alpha_i$ є алгебричним над $\mathbf{K}(S')$. Отже, $S'$ є базою трансцендентності $\mathbf{Q}$. Оскільки ми дозволили перестановки, можна припустити, що $i = k+1$, тобто $S' = S_{k+1}$.

Тепер твердження очевидне, оскільки при $m > n$ ми одержимо, що $\beta_{n+1}$ є алгебричним над $\mathbf{K}( \beta_1, \ldots, \beta_n )$, що неможливо.

*2* очевидно випливає з *1*.

*3*. $\mathbf{L}$ є алгебричним над $\mathbf{Q}(S)$, а $\mathbf{Q}$ є алгебричним над $\mathbf{K}(T)$. Отже, $\mathbf{Q}(S)$ і, як наслідок, також $\mathbf{L}$ є алгебричним над $\mathbf{K}(S \cup T)$. З іншого боку, оскільки $T$ є алгебрично незалежним над $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}(T) \simeq \mathbf{K}( x_1, \ldots, x_m )$ і, оскільки $S$ є алгебрично незалежним над $\mathbf{K}(T)$, $\mathbf{K}(S \cup T) \simeq \mathbf{K}(T)( x_1, \ldots, x_n ) \simeq \mathbf{K}( x_1, \ldots, x_{m+n} )$, тобто $S \cup T$ алгебрично незалежна над $\mathbf{K}$.

*4* є очевидним наслідком *3*. $\square$

Ми будемо також використовувати наступний результат.

Твердження A.4. *Нехай $\mathbf{Q}$ – скінченно породжене розширення алгебрично замкненого поля $\mathbf{K}$, $n = \operatorname{tr.deg}(\mathbf{Q}/\mathbf{K})$ і $\mathbf{R} = \mathbf{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Тоді або $\mathbf{Q} \simeq \mathbf{R}$, або $\mathbf{Q} \simeq \mathbf{R}(\alpha)$, де $\alpha$ є алгебричним і сепарабельним над $\mathbf{R}$.*

Доведення. Нехай $\mathbf{Q} = \mathbf{K}( \alpha_1, \ldots, \alpha_m )$. Скористаймося індукцією за $m$. Для $m = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що це виконується для $\mathbf{L} = \mathbf{K}( \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} )$. Покладемо $l = \operatorname{tr.deg}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ і $\mathbf{S} = \mathbf{K}( x_1, \ldots, x_l )$. Тоді можна припустити, що або $\mathbf{L} = \mathbf{S}$, або $\mathbf{L} = \mathbf{S}(\beta)$, де $\beta$ алгебричний і сепарабельний над $\mathbf{S}$. У першому випадку $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\alpha_m)$, у другому $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\beta, \alpha_m)$. Якщо $\alpha_m$ є трансцендентним над $\mathbf{S}$, твердження є очевидним, оскільки $\mathbf{S}(\alpha_m) \simeq \mathbf{R}$. Отже, припустимо що $\alpha_m$ є алгебричним над $\mathbf{S}$ (а тому $l = n$). Тоді існує елемент $\gamma \in \mathbf{Q}$, такий що $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\gamma)$: у першому випадку $\gamma = \alpha_m$, у другому його існування випливає з теореми про примітивний елемент в алгебричному розширенні (оскільки $\beta$ є сепарабельним).

Розглянемо незвідний многочлен $F \in \mathbf{K}[ x_1, \ldots, x_{n+1} ]$, такий що $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \gamma) = 0$. Якщо $\partial F/\partial x_{n+1} \neq 0$, $\gamma$ є сепарабельним над $\mathbf{S} = \mathbf{R}$. Якщо $\partial F/\partial x_i \neq 0$ для деякого $i \leqslant n$, ми можемо замінити $x_i$ на $\gamma$ і навпаки. Припустимо, що $\partial F/\partial x_i = 0$ для всіх $i$. Таке неможливе, якщо $\operatorname{char}\mathbf{K} = 0$. Якщо ж $\operatorname{char}\mathbf{K} = p > 0$, це значить, що насправді $F = G(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n+1}^p)$ для деякого многочлена $G$. Але тоді $F = H^p$, де $H$ одержується з $G$ заміною кожного коефіцієнта на його $p$-ий корінь. Це знову неможливо, оскільки $F$ незвідний. □

Зауваження. Насправді, ми використовували лише факт, що $\mathbf{K}$ є *досконалим*, тобто або $\operatorname{char}\mathbf{K} = 0$, або $\operatorname{char}\mathbf{K} = p > 0$ і рівняння $x^p = a$ має розв'язок для кожного $a \in \mathbf{K}$.

Розділ 3

# Теорія розмірності

## 3.1. Скінченні морфізми

Відправною точкою теорії розмірності алгебричних многовидів є Нормалізаційна лема Нетера (теорема 1.4.3). Оскільки ми збираємося використовувати її для абстрактних многовидів, спочатку введемо відповідні означення.

ОЗНАЧЕННЯ 3.1.1. (1) Розширення кілець $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ зветься *скінченним*, якщо $\mathbf{A}$ є скінченно породженим $\mathbf{B}$-модулем, або, що те саме, $\mathbf{A} = \mathbf{B}[\, b_1, b_2, \dots, b_m \,]$, де всі $b_i$ є цілими над $\mathbf{A}$ (див. вправу 1.4.11(2)).

(2) Морфізм $f : Y \to X$ алгебричних многовидів зветься *скінченним*, якщо кожна точка $p \in X$ має афінний окіл $U$, такий що $f^{-1}(U)$ є також афінним і $\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U))$ є скінченним розширенням $\operatorname{Im} f^*(U)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. (1) Якщо $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ є скінченним розширенням і кільце $\mathbf{B}$ є нетеровим, кільце $\mathbf{A}$ є нетеровим $\mathbf{B}$-модулем за твердженням 1.4.6, отже, воно є також нетеровим кільцем.

(2) Оскільки кожна афінна алгебра є скінченно породженою, в означенні скінченного морфізму можна замінити слова "скінченне розширення" на "ціле розширення."

Наступний результат показує, що в означенні скінченних морфізмів можна вибрати *будь-яке* афінне покриття.

ТЕОРЕМА 3.1.2. *Нехай $f : Y \to X$ – морфізм відокремлюваних алгебричних многовидів. Припустимо, що існує відкрите афінне покриття $X = \bigcup_i X_i$, таке що всі прообрази $Y_i = f^{-1}(X_i)$ є також афінними. Тоді для кожного афінного підмноговиду $X' \subseteq X$ прообраз $f^{-1}(X')$ є також афінним.*

НАСЛІДОК 3.1.3. *Якщо $f : Y \to X$ – скінченний морфізм і $X$ – афінний, $Y$ є також афінним.*

Доведення теореми 3.1.2 залишається читачеві як серія вправ. Ми почнемо з наступного простого зауваження.

ВПРАВА 3.1.4. Якщо $f : Y \to X$ є морфізмом відокремлюваних многовидів, $Y$ є афінним і $X' \subseteq X$ є афінним підмноговидом, то $Y' = f^{-1}(X')$ є також афінним.

*Вказівка*: $Y'$ ізоморфний прообразу діагоналі $\Delta_X$ при відображенні $Y \times X' \to X \times X : (p,q) \mapsto (f(p),q)$.

В ситуації теореми 3.1.2 всі перетини $X'_i = X' \cap X_i$ є афінними (оскільки $X$ є відокремлюваним). Тому їхні прообрази $f^{-1}(X'_i)$ є також афінними (застосуйте вправу 3.1.4 до $Y_i \to X_i$). Отже, ми маємо розглянути лише випадок, коли $X = X'$ є афінним, і довести, що $Y$ є також афінним. Більш того, зменшуючи $X_i$, можна вважати їх *головними відкритими* підмножинами: $X_i = D(g_i)$. Оскільки $X$ є квазікомпактним, можна також припустити, що покриття містить лише скінченну кількість цих підмножин: $X = \bigcup_{i=1}^k D(g_i)$. В наступному ми зберігаємо ці обмеження й позначаємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = \mathcal{O}_Y(Y);\\ &D(g) = \{\, p \in Y \mid g(p) \neq 0 \,\}, \text{ де } g \in \mathbf{A};\\ &d_i = f^*(X)(g_i) \in \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Вправа 3.1.5. Перевірте, що $Y_i = D(d_i)$ і $\langle\, d_1, d_2, \dots, d_k \,\rangle = \mathbf{A}$.

Отже, нам потрібно довести наступне:

Теорема 3.1.6. *Нехай $Y$ – відокремлюваний многовид, $\{\, d_1, d_2, \dots, d_k \,\}$ – множина елементів кільця $\mathbf{A} = \mathcal{O}_Y(Y)$, яка породжує одиничний ідеал. Припустимо, що всі відкриті множини $Y_i = D(d_i)$ є афінними многовидами. Тоді $Y$ є також афінним.*

Надалі ми зберігаємо позначення й припущення теореми 3.1.6 і позначаємо $\mathbf{A}_i = \mathcal{O}_Y(Y_i)$.

Вправа 3.1.7. Доведіть, що для будь-якого $g \in \mathbf{A}$ $\mathcal{O}_Y(D(g)) \simeq \mathbf{A}[\,g^{-1}\,]$, а обмеження $\mathcal{O}^Y_{D(g)}$ збігається з природним гомоморфізмом $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[\,g^{-1}\,]$.
*Вказівка*: Наслідуйте вправу 1.6.6, використовуючи покриття $Y = \bigcup_i Y_i$.

Вправа 3.1.8. Доведіть, що $\mathbf{A}$ є афінною алгеброю.
*Вказівка*: Знайдіть $a_{ij} \in \mathbf{A}$ ($i = 1,\dots,k$, $j = 1,\dots,l_i$), такі що $\mathbf{A}_i = \mathbf{K}[\,a_{ij}/1, 1/d_i\,]$. Тоді знайдіть $h_i$, такі що $\sum_i h_i d_i = 1$, і покажіть, що $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,a_{ij}, h_i, d_i\,]$.

Вправа 3.1.9. Нехай $Z$ – афінний многовид, такий що $\mathbf{K}[\,Z\,] \simeq \mathbf{A}$, $\varphi : Y \to Z$ – морфізм, такий що $\varphi^*(Z)$ є ізоморфізмом. Доведіть, що $\varphi$ є також ізоморфізмом.
*Вказівка*: Перевірте, що обмеження $\varphi$ на $Y_i$ є ізоморфізмом $Y_i \to D(\varphi^*(d_i))$.

Цим завершується доведення теорем 3.1.6 та 3.1.2.

Вправи 3.1.10. Доведіть, що:

(1) Кожне замкнене занурення є скінченним морфізмом.
(2) Якщо $f_1 : Y_1 \to X_1$ і $f_2 : Y_2 \to X_2$ є скінченними морфізмами, то $f_1 \times f_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ є також скінченним морфізмом.
(3) Якщо $f : Y \to X$ і $g : Z \to Y$ є скінченними морфізмами, то $f \circ g : Z \to X$ є також скінченним морфізмом.
(4) Якщо $f : Y \to X$ є скінченним морфізмом і $Z$ є підмноговидом $X$, то індуковане відображення $f^{-1}(Z) \to Z$ є також скінченним морфізмом.

*Вказівка*: Спершу доведіть це твердження, коли $X$ є афінним, а $Z$ є головною відкритою підмножиною в $X$.

Для афінних многовидів скінченність завжди можна визначати глобально.

Твердження 3.1.11. *Морфізм афінного многовиду $f : Y \to X$ є скінченним тоді й лише тоді, коли $\mathbf{K}[\,Y\,]$ є цілим над $\operatorname{Im} f^*(X)$.*

Доведення. Замінюючи $X$ на $\overline{\operatorname{Im} f}$, ми можемо припустити, що $f$ – домінантне (тобто, $\operatorname{Im} f$ є щільним), отже, $f^*(X)$ є мономорфізмом (див. вправу 1.5.11(8b)). Ототожнимо $\mathbf{K}[\,X\,]$ з його образом $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\,Y\,]$. Існує відкрите афінне покриття $X = \bigcup_i U_i$, таке що для кожного $i$ $V_i = f^{-1}(U_i)$ є також афінним і $\mathbf{K}[\,V_i\,]$ є скінченно породженим модулем над $\operatorname{Im} f^*(U_i)$. Внаслідок вправи 3.1.10(4), можна припустити, що всі $U_i$ є головними відкритими підмножинами: $U_i = D(g_i)$ для деяких $g_i \in \mathbf{A}$; більш того, оскільки $X$ є квазікомпактним, є лише скінченна кількість цих підмножин. Очевидно, $f^{-1}(D(g_i)) = D(f^*(g_i))$ є також головною відкритою підмножиною в $Y$ (визначеною тим самим $g_i$, але розглянутим як елемент $\mathbf{B}$). Отже, $\mathcal{O}_X(U_i) = \mathbf{A}[g_i^{-1}]$ і $\mathcal{O}_U(V_i) = \mathbf{B}[g_i^{-1}]$. Нехай $\{\, b_{ij}/g_i^k \,\}$ – множина твірних $\mathbf{B}[g_i^{-1}]$ як $\mathbf{A}[g_i^{-1}]$-модуля (звичайно, ми можемо припустити, що степінь $k$ – спільний). Ми твердимо, що $\{\, b_{ij} \,\}$ є множиною твірних $\mathbf{B}$ як $\mathbf{A}$-модуля.

Дійсно, нехай $b \in \mathbf{B}$. Тоді, в $\mathbf{B}[g_i^{-1}]$, $b/1 = \sum_j a_{ij} b_{ij}/g_i^l$ для деяких $a_{ij} \in \mathbf{A}$ і деякого цілого $l$, або, що те саме, в $\mathbf{B}$ $g_i^r b = \sum_j a_{ij} b_{ij}$ для деякого $r$. Оскільки $\bigcup_i D(g_i) = X$, існують такі $h_i \in \mathbf{A}$, що $\sum_i h_i g_i^r = 1$. Отже, $b = \sum_i h_i g_i^r b = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$. □

Головною рисою скінченних морфізмів, яка частково пояснює їхню назву, є наступна властивість.

Теорема 3.1.12. *Нехай $f : Y \to X$ – скінченний морфізм алгебричних многовидів. Тоді він є замкненим і для кожного $p \in X$ шар $f^{-1}(p)$ є скінченним.*

Доведення. Внаслідок вправ 3.1.10, ми можемо припустити, що $f$ – домінантний, тобто $\overline{\operatorname{Im} f} = X$, і маємо показати, що для кожної точки $p \in X$ її прообраз $f^{-1}(p)$ є скінченним і непорожнім. Більш того, ми можемо припустити, що $X$ і $Y$ – афінні, з координатними алгебрами, відповідно, $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$, і ототожнити $\mathbf{A}$ з $\operatorname{Im} f^*(X) \subseteq \mathbf{B}$. Тоді $\mathbf{B}$ є скінченно породженим $\mathbf{A}$-модулем. Розглянемо дві точки, $p \in X$, $q \in Y$, і відповідні максимальні ідеали, $\mathfrak{m}_p \subset \mathbf{A}$ і $\mathfrak{m}_q \subset \mathbf{B}$ (див. твердження 1.5.3). Очевидно, $p = f(q)$ тоді й лише тоді, коли $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathfrak{m}_q$. Тому, теорема 3.1.12 є спеціальним випадком наступного результату з коммутативної алгебри.

ЛЕМА 3.1.13. *Нехай $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ – скінченне розширення нетерового кільця. Тоді для кожного максимального ідеала $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$ множина $M = \{\, \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} \mathbf{B} \mid \mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{m} \,\}$ є непорожньою і скінченною.*[1]

ДОВЕДЕННЯ. Спершу ми доведемо, що $M \neq \emptyset$. Беручи до уваги наслідок 1.3.7, достатньо показати, що $\mathfrak{m}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}$. Нехай $\mathbf{B} = \langle\, b_1, b_2, \dots, b_m \,\rangle$ як $\mathbf{A}$-модуль. Припустимо, що $\mathfrak{m}\mathbf{B} = \mathbf{B}$. Тоді для кожного індекса $j$ $b_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} b_i$ з $c_{ij} \in \mathfrak{m}$. Ці рівняння можна переписати в матричній формі, як $(E - C)\mathbf{b} = 0$, де $E$ – одинична $n \times n$ матриця, $C = (c_{ij})$ і $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top$. Помноживши це матричне рівняння на приєднану матрицю до $(E - C)$, одержимо, що $\det(E - C) b_i = 0$ для всіх $i$, звідки $\det(E - C) = 0$. Але останній визначник має, очевидно, вигляд $1 + a$ з $a \in \mathfrak{m}$, що неможливе, оскільки $1 \notin \mathfrak{m}$.

Тепер ми доведемо, що $M$ скінченна. Використаємо наступну лему.

ЛЕМА 3.1.14. *Нехай $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ – ціле розширення кілець, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ – первинні ідеали з $\mathbf{B}$. Тоді $\mathfrak{q} \cap \mathbf{A} \subset \mathfrak{p} \cap \mathbf{A}$.*

ДОВЕДЕННЯ. Замінюючи $\mathbf{B}$ на $\mathbf{B}/\mathfrak{q}$ і $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}/(\mathfrak{q} \cap \mathbf{A})$, можна припустити, що $\mathfrak{q} = \{\, 0 \,\}$, а кільця $\mathbf{B}$ й $\mathbf{A}$ є цілими. Тоді ми маємо показати, що $\mathfrak{p} \cap \mathbf{A} \neq \{\, 0 \,\}$. Візьмемо будь-який ненульовий елемент $a \in \mathfrak{p}$ і розглянемо рівняння $a^m + b_1 a^{m-1} + \dots + b_m$ з $b_i \in \mathbf{A}$ найменшого можливого степеня. Тоді $b_m \neq 0$ і $b_m \in \mathfrak{p} \cap \mathbf{A}$. $\square$

Оскільки $\mathfrak{m}$ є максимальним, $\mathfrak{p} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{m}$ для кожного первинного ідеала $\mathfrak{p} \subset \mathbf{B}$, який містить $\mathfrak{m}$. Візьмемо максимальний ідеал $\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{p}$. Тоді також $\mathfrak{n} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{m}$, отже, $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$, тобто всі первинні ідеали з $\mathbf{B}$, які містять $\mathfrak{m}$, є максимальними. Тому максимальні ідеали, що містять $\mathfrak{m}$ є як раз мінімальними серед первинних ідеалів, що містять $\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{B}}$, або, що те саме, первинними компонентами $\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{B}}$ (див. наслідок 1.5.9 і вправу 1.5.10). Отже, існує лише скінченна кількість таких ідеалів. $\square$

$\square$

ВПРАВА 3.1.15. Доведіть, що коли $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ – ціле розширення кілець і $\mathfrak{m} \subset \mathbf{B}$ – максимальний ідеал, існує максимальний ідеал $\mathfrak{n} \subset \mathbf{A}$, такий що $\mathfrak{n} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{m}$.

[1] Ця лема є дійсною і для не-нетерових кілець, хоча другу частина доведення треба змінити.

*Вказівка*: Припустіть, що $\mathfrak{m}\mathbf{B} = \mathbf{B}$, і доведіть, що тоді $\mathfrak{m}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'$ для підкільця $\mathbf{B}'$, яке є скінченно породженим як $\mathbf{A}$-модуль.

Вправа 3.1.16. Нехай $f : Y \to X$ – скінченний морфізм алгебричних многовидів. Доведіть, що:

(1) $X$ відокремлюваний тоді й лише тоді, коли $Y$ відокремлюваний.

*Вказівка* (до частини "лише тоді"): Нехай $X$ – відокремлюваний, $p \neq q$ – дві точки $Y$. Доведіть, що або $f(p) \neq f(q)$, або вони обидві належать до афінної відкритої підмножини $V \subseteq Y$. Потому використайте відокремлюваність афінних многовидів.

(2) $X$ повний тоді й лише тоді, коли $Y$ повний.

Теорема 3.1.12 дозволяє, зокрема, уточнити структуру образу регулярного відображення. Нагадаємо, що підмножина $Z$ топологічного простору $X$ зветься *конструктивною*, якщо вона є скінченним об'єднанням локально замкнених підмножин. Наприклад, конструктивна підмножина афінного (або проективного) простору є скінченним об'єднанням підмноговидів, або, що те саме, підмножиною, яка може бути визначеною системою (скінченною) многочленних рівнянь та нерівностей.

Теорема 3.1.17 (Теорема Шеваллє). *Якщо $f : Y \to X$ – морфізм алгебричних многовидів і $Z \subseteq Y$ – конструктивна підмножина, то $f(Z)$ є також конструктивною. (Зокрема, $\operatorname{Im} f$ – конструктивна підмножина.)*

Доведення. Оскільки будь-яка локально замкнена підмножина алгебричного многовиду є також алгебричним многовидом (див. наслідок 2.2.7), достатньо довести, що $f(Y)$ є конструктивною. Більш того, можна припустити, що $Y$ і $X$ – афінні й незвідні. Ми використаємо нетерову індукцію. Твердження тривіальне, якщо $Y = \emptyset$. Припустимо, що воно справедливе для всіх власних замкнених підмножин $Y$. Замінюючи $X$ на $\overline{\operatorname{Im} f}$, можна припустити, що $f$ домінантне, тобто $f^*$ ін'єктивне, й ототожнити $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$ з його образом в $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\,Y\,]$ при відображенні $f^*$. Покладемо також $\mathbf{R} = \mathbf{K}(X)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{K}(Y)$ і $d = \operatorname{tr.deg}(\mathbf{Q}/\mathbf{R})$.

Доведемо спочатку, що $\operatorname{Im} f$ містить відкриту непорожню підмножину $X$. Виберемо базу трансцендентності $\{\,b_1, b_2, \dots, b_d\,\}$ поля $\mathbf{Q}$ над $\mathbf{R}$. Звичайно, можна припустити, що $b_i \in \mathbf{B}$. Нехай $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\,b_1, b_2, \dots, b_d, c_1, c_2, \dots, c_r\,]$. Всі $c_i$ є алгебричними над $\mathbf{R}$, отже, задовольняють рівняння $a_{i0}c_i^{m_i} + a_{i1}c_i^{m_i-1} + \dots + a_{im_i} = 0$ з $a_{ij} \in \mathbf{A}[\,b_1, \dots, b_d\,]$ і $a_{i0} \neq 0$. Нехай $g = \prod_i a_{i0}$. Тоді $\mathbf{B}[\,g^{-1}\,]$ є скінченним розширенням $\mathbf{A}[\,g^{-1}\,][\,b_1, \dots, b_d\,]$. Розглянемо многовид $X \times \mathbb{A}^d$ і ототожнимо його координатну алгебру з $\mathbf{A}[\,b_1, \dots, b_d\,] \subseteq \mathbf{B}$. Занурення $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[\,b_1, \dots, b_d\,]$ відповідає проекції $\operatorname{pr}_X : X \times \mathbb{A}^d \to X$, отже, $f$ розкладається в добуток $Y \xrightarrow{\varphi} X \times \mathbb{A}^d \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X$, де $\varphi^*$ – занурення $\mathbf{A}[\, b_1, \dots, b_d \,]$ в $\mathbf{B}$. Обмеження $\varphi$ на $\varphi^{-1}(D(g))$ є скінченним відображенням, отже, $\operatorname{Im} \varphi \supseteq D(g)$. Оскільки $\mathrm{pr}_X$ – відкрите відображення (див. твердження 2.4.9), $\operatorname{Im} f$ містить відкриту непорожню підмножину $U = \mathrm{pr}_X(D(g))$.

Тепер покладемо $X' = X \setminus U$ і $Y' = f^{-1}(X')$. Вони є замкненими, відповідно, в $X$ і $Y$. Нехай $f' : Y' \to X'$ – обмеження $f$ на $Y'$. Воно є також регулярним відображенням. За індуктивним припущенням, $\operatorname{Im} f'$ – конструктивна підмножина $X'$ (отже, $X$). Тому $\operatorname{Im} f = U \cup \operatorname{Im} f'$ є також конструктивною. $\square$

Вправи 3.1.18. Нехай $o = (c_0 : c_1 : \dots : c_n)$ – точка проективного простору $\mathbb{P}^n$, $L = PV(\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i)$ – гіперплощина в $\mathbb{P}^n$, така що $o \notin L$. Для кожної точки $p = (a_0 : a_1 : \dots : a_n) \neq o$ позначимо через $\overline{op}$ *проективну пряму*, яка проходить через $o$ і $p$, тобто множину всіх точок $\mathbb{P}^n$, що мають вигляд

$$(\xi c_0 + \eta a_0 : \xi c_1 + \eta a_1 : \dots : \xi c_n + \eta a_n),$$

де $(\xi : \eta) \in \mathbb{P}^1$.

(1) Доведіть, що $L \cap \overline{op}$ складається з єдиної точки, яку позначають $\pi(p)$ і звуть *проекцією* $p$ на $L$ *з центру* $o$.
(2) Перевірити, що $\pi : \mathbb{P}^n \setminus \{\, o \,\} \to L$ – регулярне відображення ("*центральна проекція*").
(3) Нехай $X \subset \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, такий що $o \notin X$. Доведіть, що обмеження $\pi|_X$ є скінченним відображенням.
(4) ("Проективна Нормалізаційна лема Нетера.") Виведіть, що для кожного проективного многовиду $X$ існує скінченне сюр'єктивне відображення $X \to \mathbb{P}^d$ для деякого $d$.

*Вказівка*: Використайте лінійний автоморфізм $\mathbb{P}^n$, щоб звести задачу до випадку, коли $o = (1 : 0 : \dots : 0)$ і $L = PV(x_0)$.

Вправа 3.1.19. (1) Нехай $L_0, L_1, \dots, L_m \in \mathbf{K}[\, x_0, x_1, \dots, x_n \,]$ – лінійні форми, $H = PV\,(L_0, L_1, \dots, L_m)$ і $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, такий що $X \cap H = \emptyset$. Доведіть, що відображення $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$, таке що $\varphi(p) = (L_0(p) : \dots : L_m(p))$ є скінченним.

*Вказівка*: Використайте лінійний автоморфізм $\mathbb{P}^n$, щоб звести задачу до випадку, коли $L_i = x_i$; після цього використайте вправу 3.1.18 й індукцію.

(2) Нехай $F_0, F_1, \dots, F_m \in \mathbf{K}[\, x_0, x_1, \dots, x_n \,]$ – однорідні многочлени степеня $d > 0$, а $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, такий що $X \cap PV\,(F_0, F_1, \dots, F_m) = \emptyset$. Доведіть, що відображення $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$, таке що $\varphi(p) = (F_0(p) : \dots : F_m(p))$ є скінченним.

*Вказівка*: Використайте (1) і занурення Веронезе (вправа 2.3.11(6)).

## 3.2. Розмірності

Означення 3.2.1. Нехай $X$ – нетеровий топологічний простір (наприклад, алгебричний многовид). *Комбінаторна розмірність* $X$ визначається як верхня межа довжин $l$ ланцюжків його незвідних замкнених підмножин $X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_l$. Цю розмірність позначимо $\mathrm{c.}\dim X$. Покладемо також $\mathrm{c.}\dim \emptyset = -1$.

Приймаючи до уваги відповідність між незвідними підмножинами й первинними ідеалами (див. наслідок 1.5.7), ми бачимо, що комбінаторну розмірність *афінного* многовиду можна визначити "чисто алгебрично."

Означення 3.2.2. Нехай $\mathbf{A}$ – кільце.

(1) Множина всіх первинних ідеалів кільця $\mathbf{A}$ зветься його *спектром* і позначається $\operatorname{spec} \mathbf{A}$.

(2) *Висота* $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$ первинного ідеала $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} \mathbf{A}$ є, за означенням, верхньою межею довжин $l$ ланцюжків первинних ідеалів $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_l = \mathfrak{p}$.

(3) *Круллева розмірність* $\mathrm{K.}\dim \mathbf{A}$ кільця $\mathbf{A}$ визначається як $\sup \{ \operatorname{ht} \mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{spec} \mathbf{A} \}$.

Твердження 3.2.3. *Якщо $X$ є афінним алгебричним многовидом, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X]$, то $\mathrm{c.}\dim X = \mathrm{K.}\dim \mathbf{A}$.*

Ми збираємося дати еквівалентні означення цім розмірностям. Спершу відзначимо наступний простий результат.

Вправи 3.2.4. Доведіть, що для будь-якого нетерового топологічного простору $X$:

(1) $\mathrm{c.}\dim X = \sup \{ \mathrm{c.}\dim X_i \mid X_i - \text{незвідна компонента } X \}$.

(2) Якщо $X = \bigcup_i U_i$ – відкрите покриття $X$, то $\mathrm{c.}\dim X = \sup \{ \mathrm{c.}\dim U_i \}$.

Наступна теорема уточнює поняття розмірності для алгебричних многовидів.

Теорема 3.2.5. *Нехай $X$ – алгебричний многовид.*

(1) *Якщо $X$ – афінний (проективний), $\mathrm{c.}\dim X$ збігається з таким цілим $d$, що існує скінченний домінантний морфізм $X \to \mathbb{A}^d$ (відповідно, $X \to \mathbb{P}^d$).*

(2) *Якщо $X$ – незвідний, то $\mathrm{c.}\dim X = \operatorname{tr.deg}(\mathbf{K}(X)/\mathbf{K})$.*

Комбінаторна розмірність алгебричного многовиду $X$ зветься його *розмірністю* і позначається $\dim X$.

Доведення. Якщо $X = \bigcup_i X_i$ – незвідний розклад $X$, $Y$ є незвідним і $f : X \to Y$ є скінченним домінантним морфізмом, то, за теоремою 3.1.12, $Y = \operatorname{Im} f = \bigcup_i f(X_i)$ і всі $f(X_i)$ замкнені, отже, $f(X_i) = Y$ для деякого $i$. Внаслідок вправ 3.1.10, обмеження $f$ на $X_i$ також скінченне. Отже, маємо лише довести твердження *1* для незвідних многовидів. Внаслідок вправ 3.2.4, можна навіть припустити, що $X$ афінний. Тоді, якщо $X \to \mathbb{A}^d$ – скінченний домінантний морфізм, $\mathbf{K}[\,X\,]$ є цілим над $\mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_d\,]$, тому $\mathbf{K}(X)$ є алгебричним над $\mathbf{K}(\,x_1, \dots, x_d\,)$ і $\operatorname{tr.deg}(\mathbf{K}(X)/\mathbf{K}) = d$. Тепер теорема 3.2.5 випливає з Нормалізаційної леми Нетера (або з її проективного аналогу, див. вправу 3.1.18(4)) і двох наступних тверджень:

Теорема 3.2.6. $\mathrm{K.}\dim \mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,] = n$.

Теорема 3.2.7. *Якщо* $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ *– скінченне розширення нетерових кілець, то* $\mathrm{K.}\dim \mathbf{A} = \mathrm{K.}\dim \mathbf{B}$.[2]

Доведення теореми 3.2.7. Воно є наслідком наступного результату.

Теорема 3.2.8 (Принцип підйому). *Нехай* $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ *– скінченне розширення нетерових кілець,* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{B}$ *– первинний ідеал. Тоді існує первинний ідеал* $\mathfrak{P} \subset \mathbf{A}$*, такий що* $\mathfrak{P} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}$.

Дійсно, спершу відзначимо простий наслідок теореми 3.2.8.

Наслідок 3.2.9. *Нехай* $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ *– скінченне розширення нетерових кілець,* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \subset \mathbf{B}$ *– первинні ідеали й* $\mathfrak{Q} \subset \mathbf{A}$ *– такий первинний ідеал, що* $\mathfrak{Q} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{q}$*. Тоді існує первинний ідеал* $\mathfrak{P} \subset \mathbf{A}$*, такий що* $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$ *і* $\mathfrak{P} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}$.

Доведення. Очевидно, $\mathbf{B}/\mathfrak{q}$ можна розглядати як підкільце $\mathbf{A}/\mathfrak{Q}$. Вони обидва також нетерові і розширення $\mathbf{A}/\mathfrak{Q} \supseteq \mathbf{B}/\mathfrak{q}$ є скінченним. Отже, за теоремою 3.2.8, існує первинний ідеал $\overline{\mathfrak{P}} \subset \mathbf{A}/\mathfrak{Q}$, такий що $\overline{\mathfrak{P}} \cap \mathbf{B}/\mathfrak{q} = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Тоді $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ для деякого первинного ідеала $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{P} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}$. $\square$

Тепер очевидна індукція показує, що коли існує ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_l$ в $\mathbf{B}$, існує також ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_l$ в $\mathbf{A}$, такий що $\mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{p}_i$, звідки $\mathrm{K.}\dim \mathbf{A} \geqslant \mathrm{K.}\dim \mathbf{B}$. З іншого боку, з леми 3.1.14 випливає, що будь-який ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_l$ в $\mathbf{A}$ породжує ланцюжок первинних ідеалів в $\mathbf{B}$: $\mathfrak{P}_0 \cap \mathbf{B} \subset \mathfrak{P}_1 \cap \mathbf{B} \subset \dots \subset \mathfrak{P}_l \cap \mathbf{B}$ (див. лему 3.1.14), отже, $\mathrm{K.}\dim \mathbf{B} \geqslant \mathrm{K.}\dim \mathbf{A}$. $\square$

$\square$

Доведення теореми 3.2.6. Розглянемо максимальний ідеал з $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,] = \mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,]$. Він збігається з $\mathfrak{m}_p$ для деякої точки $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ (див. твердження 1.5.3). Звичайно, $\mathfrak{m}_p = \langle\, x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\,\rangle$. Для кожного $k \leqslant n$ покладемо $\mathfrak{p}_k = \langle\, x_1 -$

[2] Це вірне також для довільних цілих розширень нетерових кілець.

$a_1, \dots, x_k - a_k \rangle$ (зокрема, $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ і $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}_p$). Очевидно, $\mathbf{K}[\mathbf{x}]/\mathfrak{p}_k \simeq \mathbf{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Оскільки всі ці фактор-кільця є цілими, ідеали $\mathfrak{p}_k$ – первинні, звідки $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{K}[\mathbf{x}] \geqslant \mathrm{ht}\,\mathfrak{m}_p \geqslant n$. Тепер теорема 3.2.6 випливає з наступного результату.

Твердження 3.2.10. *Якщо первинний ідеал $\mathfrak{p}$ нетерового кільця $\mathbf{A}$ породжений $n$ елементами, то* $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leqslant n$.

У свою чергу, твердження 3.2.10 є індуктивним наслідком так званої "*Теорема Крулля про головний ідеал*":

Теорема 3.2.11 (Теорема Крулля про головний ідеал). *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нетерове кільце, елемент $a \in \mathbf{A}$ – ані обертовний, ані дільник нуля і $\mathfrak{p}$ – первинний ідеал, який є мінімільним серед первинних ідеалів, що містять $a$. Тоді* $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1$.

□

Ми доведемо Принцип підйому і Теорему Крулля (так само, як твердження 3.2.10) в наступному розділі в контексті вивчення так званих *локальних кілець*.

Вправа 3.2.12. Доведіть, що ґрассманнів многовид $\mathbb{G}\mathsf{r}(d, n)$ є раціональним многовидом розмірності $d(n - d)$.
*Вказівка*: Розгляньте відкриту підмножину: $p_{12\dots d} \neq 0$.

### 3.3. Локальні кільця

Означення 3.3.1. Кільце $\mathbf{A}$ зветься *локальним*, якщо воно має єдиний максимальний ідеал $\mathfrak{m}$. Поле $\mathbf{k} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$ зветься *полем лишків* локального кільця $\mathbf{A}$.

Ясно, що кільце $\mathbf{A}$ є локальним тоді й лише тоді, коли множина всіх його необертовних елементів є ідеалом (тоді вона є як раз єдиним максимальним ідеалом в $\mathbf{A}$).
Головним джерелом локальних кілець в алгебричній геометрії є *стебла* пучків регулярних функцій. Нагадаємо відповідне означення.

Означення 3.3.2. Нехай $\mathcal{F}$ – пучок на топологічному просторі $X$, $p \in X$. *Стебло* $\mathcal{F}_p$ пучка $\mathcal{F}$ в точці $p$ є, за означенням, *прямою границею* $\varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$. Іншими словами, $\mathcal{F}_p$ визначається, як множина класів еквівалентності $\bigcup_{U \ni p} \mathcal{F}(U)$ при наступному відношенні еквівалентності:

$$a \sim b, \text{ де } a \in \mathcal{F}(U), b \in \mathcal{F}(V), \text{ тоді й лише тоді, коли існує } W \subseteq U \cap V, \text{ така що } \mathcal{F}^U_W(a) = \mathcal{F}^V_W(b).$$

Природне відображення $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$, де $p \in U$, яке перетворює елемент з $\mathcal{F}(U)$ в його клас у $\mathcal{F}_p$, позначається через $\mathcal{F}^U_p$.

Якщо $\mathcal{F}$ – пучок груп, або кілець, або алгебр, то стебло $\mathcal{F}_p$ є також групою, або кільцем, або алгеброю. Наприклад, якщо $(X, \mathcal{O}_X)$ – простір з функціями над полем $\mathbf{K}$, стебла $\mathcal{O}_{X,p}$ є також $\mathbf{K}$-алгебрами.

Твердження 3.3.3. *Для кожної точки $p$ простору з функціями $X$ стебло $\mathcal{O}_{X,p}$ є локальною алгеброю, максимальний ідеал якої збігається зі множиною $\mathfrak{m}_{X,p} = \{\, \mathcal{O}_p^U(f) \mid p \in U,\ f(p) = 0 \,\}$.*

Доведення. Очевидно, що $\mathfrak{m}_{X,p}$ є власним ідеалом $\mathcal{O}_{X,p}$. З іншого боку, якщо $f \in \mathcal{O}_X(U)$ і $f(p) \neq 0$, то $V = \{\, v \in U \mid f(v) \neq 0 \,\}$ відкрита й містить $p$. Покладемо $f' = \mathcal{O}_V^U(f)$. За означенням простору з функціями, $1/f' \in \mathcal{O}_X(V)$. Очевидно, $\mathcal{O}_p^U(f) = \mathcal{O}_p^V(f')$, отже, $\mathcal{O}_p^V(1/f')$ є оберненим до цього елемента в $\mathcal{O}_{X,p}$. Тому всі елементи, які не належать до $\mathfrak{m}_{X,p}$, обертовні й $\mathfrak{m}_{X,p}$ – єдиний максимальний ідеал в $\mathcal{O}_{X,p}$. □

Вправа 3.3.4. Нехай $X, Y$ – алгебричні многовиди, $p \in X$, $q \in Y$. Показати, що $\mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathcal{O}_{Y,q}$ тоді й лише тоді, коли існують ізоморфні відкриті підмножини $U \ni p$ і $V \ni q$, відповідно, в $X$ і $Y$. (Зокрема, якщо $X, Y$ незвідні, вони є бiраціонально еквівалентними.)

Існує природна процедура, яка зветься *локалізацією*, для одержання локальних кілець. Перед тим, як ввести її, розглянемо деякі властивості ідеалів в кільцях часток.

Позначення 3.3.5. Нехай $\mathbf{A}$ – кільце, $S \subseteq \mathbf{A}$ – мультиплікативна підмножина і $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\, S^{-1} \,]$.

(1) Для кожного ідеала $I \subseteq \mathbf{A}$ покладемо $I[\, S^{-1} \,] = I\mathbf{B} = \{\, a/s \mid a \in I,\ s \in S \,\} \subseteq \mathbf{B}$.
(2) Для кожного ідеала $J \subseteq \mathbf{B}$ покладемо $J \cap \mathbf{A} = \{\, a \in \mathbf{A} \mid a/1 \in J \,\}$ (якщо $S$ не містить дільників нуля і ми ототожнюємо $a \in \mathbf{A}$ з $a/1 \in \mathbf{B}$, це дійсно перетин $J$ і $\mathbf{A}$).

Твердження 3.3.6. *Нехай $\mathbf{A}$ – кільце, $S \subseteq \mathbf{A}$ – мультиплікативна підмножина і $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\, S^{-1} \,]$.*

(1) $J = (J \cap \mathbf{A})[S^{-1}]$ *для кожного ідеала* $J \subseteq \mathbf{B}$.
(2) $I[\, S^{-1} \,] \cap \mathbf{A} = \{\, a \in \mathbf{A} \mid sa \in I$ для деякого $s \in S \,\}$ *для кожного ідеала $I \subseteq \mathbf{A}$. Зокрема, якщо $I$ первинний і $I \cap S = \emptyset$, то $I = I[\, S^{-1} \,] \cap \mathbf{A}$.*

Доведення. *1.* Якщо $a/s \in J$, $(a \in \mathbf{A}, s \in S)$ то $a/1 = (a/s)(s/1) \in J$, звідки $a \in J \cap \mathbf{A}$ і $a/s \in (J \cap \mathbf{A})[\, S^{-1} \,]$. Отже, $J \subseteq (J \cap \mathbf{A})[\, S^{-1} \,]$. Обернене включення очевидне.

*2.* Якщо $a/1 = b/s$, де $b \in I,\ s \in S$, то $ra = rsb \in I$ для деякого $r \in S$ і також $rs \in S$. З іншого боку, якщо $as \in I$ і $s \in S$, то $a/1 = as/s \in I[\, S^{-1} \,] \cap \mathbf{A}$. Твердження, яке стосується первинного ідеала, тепер очевидне. □

Наслідок 3.3.7. *Якщо кільце* $\mathbf{A}$ *нетерове, кільце часток* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$ *є також нетеровим.*

Доведення. Нехай $J$ – ідеал $\mathbf{B}$, $I = J \cap \mathbf{A}$ і $\{\,a_1, a_2, \dots, a_m\,\}$ – породжуюча множина для $I$. Тоді, очевидно, $\{\,a_1/1, a_2/1, \dots, a_m/1\,\}$ – породжуюча множина для $I[\,S^{-1}\,] = J$. $\square$

Якщо $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$, де $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ – первинний ідеал, кільце часток $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$ позначається $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ і зветься *локалізацією* $\mathbf{A}$ за первинним ідеалом $\mathfrak{p}$. Наступний результат частково пояснює цей вираз.

Наслідок 3.3.8. *Якщо* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ *– первинний ідеал, то первинні ідеали* $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ *мають вигляд* $\mathfrak{q}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$*, де* $\mathfrak{q}$ *пробігає первинні ідеали* $\mathbf{A}$*, які містяться в* $\mathfrak{p}$*. Зокрема,* $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ *– єдиний максимальний ідеал кільця* $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$*, отже, це кільце локальне.*

Стебла структурного пучка алгебричного многовиду можна завжди одержати, використовуючи локалізацію. А саме, якщо $U$ – афінний окіл точки $p$ алгебричного многовиду $X$, то, звичайно, $\mathcal{O}_{U,p} = \mathcal{O}_{X,p}$ (якщо розглядати $U$ як відкритий підмноговид $X$). Отже ми маємо лише підрахувати стебла $\mathcal{O}_{X,p}$ для *афінного* $X$.

Твердження 3.3.9. *Нехай* $X$ *– афінний многовид,* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$, $p \in X$ *і* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$*. Тоді* $\mathcal{O}_{X,p} = \mathbf{A}_\mathfrak{m}$.

Доведення. Оскільки головні відкриті підмножини утворюють базу топології Зариського, кожен елемент з $\mathcal{O}_{X,p}$ має вигляд $\mathcal{O}_p^U(f)$ для деякого $U = D(g)$, де $g(p) \neq 0$ (або, що те саме, $g \notin \mathfrak{m}$) і $f \in \mathcal{O}_X(U) = \mathbf{A}[\,g^{-1}\,]$ (див. вправу 1.6.6). Отже, $f = (a/g^k)|_U$, де $a \in \mathbf{A}$. Оскільки $D(g) = D(g^k)$, можна покласти $k = 1$. Припустимо, що $\mathcal{O}_p^U(f) = \mathcal{O}_p^V(f')$, де $V = D(h)$, $h(p) \neq 0$ і $f' = (b/h)|_V$. Тоді існує головна відкрита $W = D(r) \subseteq U \cap V = D(gh)$, така що $r(p) \neq 0$ і $f|_W = f'|_W$. За Теоремою Гільберта про нулі, $r^d = sgh$ для деякого цілого $d$ і деякого $s \in \mathbf{A}$, і знову можна покласти $d = 1$. Тоді, на $W$, $f = sah/r = sbg/r$. Ця рівність в кільці $\mathcal{O}_X(W) = \mathbf{A}[\,r^{-1}\,]$ означає, що $r^l sah = r^l sbg$ в $\mathbf{A}$. Оскільки $r^l s \notin \mathfrak{m}$, маємо, що $a/g = b/h$ в $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Тому, покладаючи $\varphi(\mathcal{O}_p^U(f)) = a/g$ як вище, одержуємо гомоморфізм $\varphi : \mathcal{O}_{X,p} \to \mathbf{A}_\mathfrak{m}$.

З іншого боку, будь-який елемент $a/s \in \mathbf{A}_\mathfrak{m}$, де $a, s \in \mathbf{A}$, $s \notin \mathfrak{m}$, можна розглянути як функцію на $U = D(s) \ni p$; отже, визначений його образ $\mathcal{O}_p^U(a/s)$ в $\mathcal{O}_{X,p}$. Очевидно, це дає гомоморфізм $\mathbf{A}_\mathfrak{m} \to \mathcal{O}_{X,p}$, обернений до $\varphi$. $\square$

Вправа 3.3.10. (1) Нехай $C = V(y^2 - x^3)$ – кубіка з вістрям, $p = (0,0)$. Показати, що $\mathcal{O}_{C,p}$ ізоморфне підалгебрі $\mathbf{K}(t)$, яка складається з часток $r(t) = f(t)/g(t)$, таких що $g(0) \neq 0$ і $r'_t(0) = 0$.

*Вказівка:* Використайте вправу 1.2.4(6).

(2) Нехай $X = V(xy) \subset \mathbb{A}^2$, $p = (0,0)$. Доведіть, що $\mathcal{O}_{X,p}$ ізоморфне підкільцю $\mathbf{K}[\,x\,] \times \mathbf{K}[\,y\,]$, яке складається з усіх пар $(f(x), g(y))$, таких що $f(0) = g(0)$.

(3) Описати $\mathcal{O}_{X,p}$, де $p$ – початок координат, а $X$ – один з наступних многовидів:
 (a) $V(xy(x-y)) \subset \mathbb{A}^2$;
 (b) Об'єднання трьох координатних осей в $\mathbb{A}^3$.
 Чи ізоморфні ці дві алгебри?

Ми використаємо локалізацію для доведення принципу підйому і Теореми Крулля про головний ідеал. Спочатку встановимо наступну важливу властивість модулів над локальними кільцями.

Лема 3.3.11 (Лема Накаями). *Припустимо, що* $\mathbf{A}$ *– локальне кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$, *а* $M$ *– скінченно породжений* $\mathbf{A}$*-модуль, такий що* $\mathfrak{m}M = 0$. *Тоді* $M = 0$.

Доведення. Нехай $M = \langle\, u_1, u_2, \dots, u_m \,\rangle$. Доведемо, що також $M = \langle\, u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \,\rangle$. Тоді поступово ми одержимо, що $M$ породжений порожньою множиною, тобто $M = 0$.

Дійсно, оскільки $\mathfrak{m}M = M$, існують елементи $a_i \in \mathfrak{m}$, такі що $u_m = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$, або $(1 - a_m)u_m = \sum_{i=1}^{m-1} a_i u_i$. Але $1 - a_m \notin \mathfrak{m}$, отже, він є обертовним і $u_m \in \langle\, u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \,\rangle$. Тому $M = \langle\, u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \,\rangle$. □

Наступний наслідок також часто зветься "Лема Накаями."

Наслідок 3.3.12. *Припустимо, що* $\mathbf{A}$ *– локальне кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$, *а* $M$ *– скінченно породжений* $\mathbf{A}$*-модуль. Якщо* $N \subseteq M$ *– підмодуль, такий що* $N + \mathfrak{m}M = M$, *то* $N = M$.

Доведення. Досить лише застосувати лему 3.3.11 до фактормодуля $M/N$. □

Для скінченно породженого $\mathbf{A}$-модуля $M$ позначимо $\#_{\mathbf{A}}(M)$ найменше можливе число елементів в породжуючих множинах $M$ (воно зветься *числом твірних* модуля $M$).

Наслідок 3.3.13. *Припустимо, що* $\mathbf{A}$ *– локальне кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$ *і полем лишків* $\mathbf{k}$. *Тоді для кожного скінченно породженого* $\mathbf{A}$*-модуля* $M$ $\#_{\mathbf{A}}(M) = \dim_{\mathbf{k}} M/\mathfrak{m}M$.

Доведення. Дійсно, як випливає з наслідку 3.3.12, $M = \langle\, u_1, u_2, \dots, u_m \,\rangle$ тоді й лише тоді, коли $M/\mathfrak{m}M = \langle\, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_m \,\rangle$, де $\overline{u}_i = u_i + \mathfrak{m}M$. □

Нехай тепер $\mathbf{A}$ – нетерове кільце, $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ – первинний ідеал. Розглянемо локалізацію $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$. Як випливає з наслідків 3.3.7 і 3.3.8, вона є локальним і нетеровим кільцем з максимальним ідеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathbf{B}$. Покладемо

$$\mathfrak{p}^{(k)} = \mathfrak{m}^k \cap \mathbf{A} = \{\, a \in \mathbf{A} \mid sa \in \mathfrak{p}^k \text{ для деякого } s \notin \mathfrak{p} \,\}$$

(див. твердження 3.3.6). Ідеал $\mathfrak{p}^{(k)}$ зветься $k$-им *символічним степенем* $\mathfrak{p}$. Він містить $\mathfrak{p}^k$ і $\mathfrak{m}^k = \mathfrak{p}^{(k)}\mathbf{B}$ за твердженням 3.3.6. Наступний результат є безпосереднім наслідком цієї рівності й леми Накаями.

НАСЛІДОК 3.3.14. *Нехай* $\mathfrak{p}$ *– первинний ідеал нетерового кільця* $\mathbf{A}$. $\mathfrak{p}^{(k)} = \mathfrak{p}^{(k+1)}$ *для деякого* $k$ *тоді й лише тоді, коли* $\mathfrak{p}$ *є мінімальним.*

ДОВЕДЕННЯ. За лемою Накаями, $\mathfrak{p}^{(k)} = \mathfrak{p}^{(k+1)}$ тоді й лише тоді, коли $(\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p})^k = \{0\}$, тобто $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p} = \sqrt{0}$ в $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Це означає, що $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ – мінімальний первинний в $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$, або, за твердженням 3.3.6, $\mathfrak{p}$ – мінімальний первинний в $\mathbf{A}$. □

ВПРАВА 3.3.15. Нехай $X = V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X]$, $\overline{f}$ позначає клас многочлена $f$ в $\mathbf{A}$ і $\mathfrak{p} = I(Y) \subset \mathbf{A}$, де $Y \subset X$ – $y$-вісь. Доведіть, що $\overline{x} \in \mathfrak{p}^{(2)}$, але $\overline{x} \notin \mathfrak{p}^2$. Перевірити, що також $z \notin \mathfrak{p}^{(2)}$; отже $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^{(2)} \supset \mathfrak{p}^2$.

Нам потрібний також наступний простий, але важливий результат.

ЛЕМА 3.3.16. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нетерове кільце з єдиним первинним ідеалом* $\mathfrak{m}$. *Тоді* $\mathbf{A}$ *є* артіновим кільцем, *тобто кожний* спадний *ланцюжок ідеалів* $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$ *стабілізується.*

ДОВЕДЕННЯ. Внаслідок вправи 1.5.10, $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$, отже, він є нільпотентним: $\mathfrak{m}^m = 0$. Розглянемо ланцюжок ідеалів $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{m}^m = 0$. Всі фактор-модулі $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ можна розглядати як векторні простори над полем лишків $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$, які є скінченно вимірними, оскільки всі ідеали є скінченно породженими. Отже, для кожного $j$ існує такий номер $k$, що $I_k \cap \mathfrak{m}^j + \mathfrak{m}^{j+1} = I_l \cap \mathfrak{m}^j + \mathfrak{m}^{j+1}$ для всіх $l > k$. Оскільки $\mathfrak{m}^j = 0$ для $j \geqslant m$, можна навіть вибрати спільне значення $k$ для всіх $j$. Покажемо, що $I_l = I_k$ для всіх $l > k$. Дійсно, інакше існує найбільше значення $j$, таке що $I_k \cap \mathfrak{m}^j \nsubseteq I_l$. Нехай $a \in I_k \cap \mathfrak{m}^j \setminus I_l$. Існують $b \in I_l$ і $c \in \mathfrak{m}^{j+1}$, такі що $a = b + c$, звідки $c = a - b \in I_k \cap \mathfrak{m}^{j+1} \setminus I_l$, що протирічить вибору $j$. □

Тепер повернемося до наших доведень. Ми завжди дотримуємося позначень відповідних теорем.

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 3.2.8. Розглянемо мультиплікативну підмножину $S = \mathbf{B} \setminus \mathfrak{p}$ і кільця часток $\mathbf{A}_\mathfrak{p} = \mathbf{A}[S^{-1}] \supseteq \mathbf{B}_\mathfrak{p} = \mathbf{B}[S^{-1}]$. Вони є також нетеровими (див. наслідок 3.3.7), $\mathbf{B}_\mathfrak{p}$ локальне з максимальним ідеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}\mathbf{B}_\mathfrak{p}$ (див. наслідок 3.3.8) і це розширення є, очевидно, скінченним. Отже, за лемою 3.1.13, існує максимальний ідеал $\mathfrak{M} \subset \mathbf{A}_\mathfrak{p}$, такий що $\mathfrak{M} \cap \mathbf{B}_\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Тоді можна покласти $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cap \mathbf{A}$. □

Доведення теореми 3.2.11. Оскільки нас цікавлять лише первинні ідеали $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, можна замінити $\mathbf{A}$ на його *локалізацію* $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ (див. наслідок 3.3.8). Отже, надалі припустимо, що кільце $\mathbf{A}$ *локальне* з єдиним максимальним ідеалом $\mathfrak{p}$ і $a \notin \mathfrak{q}$ для кожного первинного ідеала $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Замінюючи $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}/\sqrt{0}$, можна припустити, що $\mathbf{A}$ *редуковане* (не містить нільпотентів) або, що те саме, $\{0\}$ – радикальний ідеал. Розглянемо його первинний розклад (див. наслідок 1.5.9 і вправу 1.5.10): $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$. Тоді $\prod_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i = \{0\}$, отже, $\mathfrak{p}$ містить один з $\mathfrak{p}_i$, але $a \notin \mathfrak{p}_i$, оскільки всі елементи з $\mathfrak{p}_i$ – дільники нуля. Тому $\operatorname{ht}\mathfrak{p} > 0$. Припустимо, що $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, де $\mathfrak{q}$ – первинний ідеал. Розглянемо фактор-кільце $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$. Воно має єдиний первинний ідеал $\mathfrak{p}/a\mathbf{A}$, отже, є артіновим за лемою 3.3.16. Це означає, що будь-який спадний ланцюжок ідеалів $\mathbf{A}$, які містять $a$, стабілізується. Зокрема, це вірне для ланцюжка, що складається з ідеалів $a\mathbf{A} + \mathfrak{q}^{(k)}$. Отже, існує ціле $k$, таке що $a\mathbf{A} + \mathfrak{q}^{(k)} = a\mathbf{A} + \mathfrak{q}^{(k+1)}$. Беручи довільний $b \in \mathfrak{q}^{(k)}$, одержимо, що $b = ac + d$ для деяких $c \in \mathbf{A}, d \in \mathfrak{q}^{(k+1)}$, звідки $ac \in \mathfrak{q}^{(k)}$ і $sac \in \mathfrak{q}^k$ для деякого $s \notin \mathfrak{q}$ за твердженням 3.3.6(2). Але $sa \notin \mathfrak{q}$, отже, також $c \in \mathfrak{q}^{(k)}$ і $\mathfrak{q}^{(k)} = a\mathfrak{q}^{(k)} + \mathfrak{q}^{(k+1)}$. За наслідком 3.3.12, $\mathfrak{q}^{(k)} = \mathfrak{q}^{(k+1)}$ (оскільки $a \in \mathfrak{p}$), отже, $\mathfrak{q}$ є мінімальним за наслідком 3.3.14 і $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$. □

Наступний наслідок Теореми Крулля про головний ідеал уточнює твердження 3.2.10.

Наслідок 3.3.17. *Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ – елементи нетерового кільця $\mathbf{A}$, $\mathfrak{p}$ – мінімальний серед первинних ідеалів $\mathbf{A}$, які містять $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$. Тоді $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leqslant m$.*

У доведенні цього наслідку ми використаємо деякі допоміжні результати.

Лема 3.3.18. *Нехай $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_m$ – первинні ідеали кільця $\mathbf{A}$, $I$ – ідеал $\mathbf{A}$, такий що $I \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ для всіх $i$. Тоді $I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$.*

Доведення. Використаємо індукцію за $m$. Випадок $m = 1$ тривіальний. Припустимо, що лема вірна для $m-1$ первинних ідеалів. Можна вважати, що $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ для $i \neq j$. Тоді $I\mathfrak{p}_m \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ при $i < m$, отже, $I\mathfrak{p}_m \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathfrak{p}_i$. Нехай $a \in I\mathfrak{p}_m$ і $a \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathfrak{p}_i$. З іншого боку, $I\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{m-1} \nsubseteq \mathfrak{p}_m$. Виберемо $b \in I\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{m-1}$ і $b \notin \mathfrak{p}_m$. Тоді $a + b \in I$ і $a + b \notin \mathfrak{p}_i$ для всіх $i$, тобто $a + b \notin\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$. □

Наслідок 3.3.19. *Нехай $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_m$ – первинні ідеали нетерового кільця $\mathbf{A}$ і $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_l$ – ланцюжок первинних ідеалів $\mathbf{A}$, такий що $\mathfrak{p}_0 \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ для всіх $i$. Тоді існує ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}'_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}'_{l-1} \supset \mathfrak{p}_l$, такий що $\mathfrak{p}'_j \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ для всіх $i, j$.*

Доведення. Можна припустити, що $\mathfrak{p}_l \subseteq \mathfrak{q}_i$ для всіх $i$. Замінивши $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}/\mathfrak{p}_l$, вважатимемо, що $\mathfrak{p}_l = \{0\}$. Використовуючи індукцію за $l$, можна також припустити, що $\mathfrak{p}_{l-2} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ для всіх $i$, отже, існує $a \in \mathfrak{p}_{l-2}$, $a \notin \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$. Нехай $\mathfrak{p}'_{l-1}$ – мінімальний первинний ідеал, який міститься в $\mathfrak{p}_{l-2}$ і містить $a$. Оскільки $\operatorname{ht} \mathfrak{p}'_{l-1} = 1$, $\mathfrak{p}'_{l-1} \neq \mathfrak{p}_{l-2}$, і ми одержуємо необхідний ланцюжок. $\square$

Доведення наслідку 3.3.17. Використаємо індукцію за $m$. Випадок $m = 1$ випливає з Теореми Крулля про головний ідеал. Нехай $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k$ – всі мінімальні первинні ідеали, які містять $I = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \rangle$ (первинні компоненти $\sqrt{I}$). Якщо $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$ для деякого $i$, то $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \leqslant m-1$. Припустимо, що $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i$. Розглянемо будь-який ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_l$, $l > 1$. За наслідком 3.3.19, припускаємо, що $\mathfrak{p}_{l-1} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ для всіх $i$. Покладемо $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/I$, $\overline{a} = a + I \in \overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i/I$ і $\overline{\mathfrak{p}}_i = (\mathfrak{p}_i + I)/I$. Тоді $\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{p}}_0$ є мінімальним серед первинних ідеалів $\overline{\mathbf{A}}$, що містять $\overline{a}_m$, отже, $\operatorname{ht} \overline{\mathfrak{p}} \leqslant 1$. Оскільки $\overline{\mathfrak{q}}_i$ – всі мінімальні первинні ідеали $\overline{\mathbf{A}}$ і $\overline{\mathfrak{p}}_{l-1} \not\subseteq \overline{\mathfrak{q}}_i$, $\overline{\mathfrak{p}}$ – мінімальний серед первинних ідеалів $\overline{\mathbf{A}}$, що містять $\overline{\mathfrak{p}}_{l-1}$. Тому $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}$ є мінімальним серед первинних ідеалів в $\mathbf{A}/\mathfrak{p}_{l-1}$, які містять всі класи $a_i + \mathfrak{p}_{l-1}$ ($i = 1, \ldots, m-1$). За індуктивним припущенням, $\operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1} \leqslant m-1$, тобто $l-1 \leqslant m-1$ і $l \leqslant m$. $\square$

Наслідок 3.3.20. $\operatorname{ht} \mathfrak{p} < \infty$ *для кожного первинного ідеала нетерового кільця* $\mathbf{A}$. *Зокрема, будь-який спадний ланцюжок первинних ідеалів нетерового кільця стабілізується.*

(Отже, будь-який *зростаючий* ланцюжок незвідних замкнених підмножин алгебричного многовиду також стабілізується.)

Наслідок 3.3.21. $\mathrm{K.}\dim \mathbf{A} < \infty$ *для будь-якого локального нетерового кільця* $\mathbf{A}$.

Вправи 3.3.22.
(1) Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – елементи нетерового кільця $\mathbf{A}$. Покладемо $I_k = \sqrt{\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle}$ для $k \leqslant m$, зокрема, $I_0 = \sqrt{0}$. Припустимо, що $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle \neq \mathbf{A}$. Доведіть, що $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = m$ для кожного мінімального первинного ідеала $\mathfrak{p}$, який містить $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$, тоді й лише тоді, коли для кожного $k = 1, \ldots, m$ клас $a_k + I_{k-1}$ не є дільником нуля в $\mathbf{A}/I_{k-1}$.
(2) Нехай $\mathfrak{p}$ – первинний ідеал нетерового кільця, $h = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$. Доведіть, що існують елементи $a_1, a_2, \ldots, a_h \in \mathfrak{p}$, такі що $\mathfrak{p}$ є мінімальним серед первинних ідеалів, які містять $\langle a_1, a_2, \ldots, a_h \rangle$ і, більш того, $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = h$ для кожного первинного ідеала $\mathfrak{q}$, який є мінімальним серед тих, що містять $\langle a_1, a_2, \ldots, a_h \rangle$.

Існує важливий випадок, коли Теорема Крулля про головний ідеал може бути обернута. Нагадаємо деякі означення.

Означення 3.3.23. Нехай $\mathbf{A}$ – ціле кільце.

(1) Ненульовий необертовний елемент $a \in \mathbf{A}$ зветься *незвідним*, якщо, як тільки $a = bc$ для деяких $b, c \in \mathbf{A}$, або $b$, або $c$ є обертовним.

(2) Кільце $\mathbf{A}$ зветься *факторіальним*, якщо кожний ненульовий необертовний елемент з $\mathbf{A}$ є добутком незвідних елементів, а з $a_1 a_2 \dots a_l = b_1 b_2 \dots b_m$, де всі елементи $a_i$ і $b_j$ є незвідними, випливає, що $l = m$ й існує перестановка $\sigma$, така що $b_i = u_i a_{\sigma(i)}$ для деяких обертовних елементів $u_i$ і для всіх $i = 1, \dots, m$.[3]

Найбільш відомі приклади факторіальних кілець – кільця многочленів $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ і кільце цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Твердження 3.3.24. *Припустимо, що* $\mathbf{A}$ *– факторіальне кільце і* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ *– первинний ідеал висоти* $1$. *Тоді* $\mathfrak{p}$ *є головним ідеалом:* $\mathfrak{p} = \langle a \rangle$ *для деякого незвідного елемента* $a$.

Доведення. Оскільки $\mathfrak{p}$ первинний, він містить незвідний елемент $a$. Але у факторіальному кільці головний ідеал $\langle a \rangle$, породжений незвідним елементом, є первинним. Оскільки $\mathfrak{p} \supseteq \langle a \rangle \supset \{0\}$ і $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$, $\mathfrak{p} = \langle a \rangle$. □

Вправи 3.3.25. (1) Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – замкнений підмноговид, такий що всі його незвідні компоненти мають розмірність $n-1$. Доведіть, що $X$ є гіперповерхнею в $\mathbb{A}^n$.

(2) Доведіть, що нетерове кільце $\mathbf{A}$ є факторіальним тоді й лише тоді, коли кожний первинний ідеал $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ висоти $1$ є головним.

*Вказівка*: Достатньо довести, що для будь-якого незвідного елемента $a \in \mathbf{A}$ ідеал $\langle a \rangle$ є первинним.

## 3.4. Нормальні многовиди

Щоб одержати більше інформації про розмірності алгебричних многовидів, спершу розглянемо спеціальний клас кілець і многовидів, який є важливим у багатьох питаннях.

Означення 3.4.1. (1) Ціле кільце $\mathbf{A}$ з полем часток $\mathbf{Q}$ зветься *нормальним* (або *цілозамкненим*), якщо всі елементи з $\mathbf{Q}$, які є цілими над $\mathbf{A}$, належать до $\mathbf{A}$.

(2) Незвідний алгебричний многовид $X$ зветься *нормальним*, якщо всі локальні кільця $\mathcal{O}_{X,p}$ ($p \in X$) нормальні.

Спочатку встановимо, що для афінних многовидів ці два означення збігаються.

[3] Зауважимо, що коли кільце $\mathbf{A}$ *нетерове*, кожний ненульовий необертовний елемент $\mathbf{A}$ *є* добутком незвідних елементів, отже питання виникає лише стосовно *єдиності* такого розкладу.

Твердження 3.4.2. (1) *Якщо кільце* $\mathbf{A}$ *нормальне, то кільце часток* $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$ *для будь-якої мультиплікативної підмножини* $S \subset \mathbf{A}$ *також є нормальним.*

(2) *Нетерове ціле кільце* $\mathbf{A}$ *є нормальним тоді й лише тоді, коли всі його локалізації* $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ *, де* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} \mathbf{A}$ *, нормальні.*

Доведення. *1.* Ототожнимо $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$ з підкільцем $\{\,a/s \mid s \in S\,\}$ поля $\mathbf{Q}$. Припустимо, що $r \in \mathbf{Q}$ цілий над $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$, тобто $r^m + c_1 r^{m-1} + \dots + c_m = 0$ з $c_i = a_i/s$ ($a_i \in \mathbf{A}$, $s \in S$; очевидно, для всіх $c_i$ можна вибрати спільний знаменник). Тоді $(sr)^m + a_1(sr)^{m-1} + sa_2(sr)^{m-2} \dots + s^{m-1}a_m = 0$, звідки $sr \in \mathbf{A}$ і $r = sr/s \in \mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$.

*2.* Нехай $r \in \mathbf{Q}$ цілий над $\mathbf{A}$. Тоді він є цілим над всіма $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ для $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} \mathbf{A}$, звідки $r \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} \mathbf{A}} \mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$. Отже наступна лема завершує доведення:

Лема 3.4.3. $\mathbf{A} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} \mathbf{A}} \mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ *для довільного цілого нетерового кільця* $\mathbf{A}$ *.*

Доведення. Нехай $r \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} \mathbf{A}} \mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$. Покладемо $I = \{\,a \in \mathbf{A} \mid ar \in \mathbf{A}\,\}$. Це ідеал в $\mathbf{A}$ й $I \not\subseteq \mathfrak{m}$ для кожного максимального ідеала $\mathfrak{m} \subset \mathbf{A}$ (оскільки $r \in \mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ може бути записаним як $r = b/a$ з $a \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{m}$, $b \in \mathbf{A}$, звідки $a \in I \setminus \mathfrak{m}$). Тому, $I = \mathbf{A}$, отже, $1 \in I$ і $r = 1r \in \mathbf{A}$. □

□

Важливим прикладом нормальних кілець є факторіальні, як показує наступний результат.

Твердження 3.4.4. *Будь-яке факторіальне кільце є нормальним.*

Зокрема, кільця многочленів $\mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,]$ є нормальними, тому афінні (і проективні) простори є нормальними многовидами.

Доведення. Нехай $\mathbf{Q}$ – поле часток факторіального кільця $\mathbf{A}$ і $q = a/b \in \mathbf{Q}$ ($a, b \in \mathbf{A}$) – цілий над $\mathbf{A}$: $q^m + c_1 q^{m-1} + \dots + c_m = 0$, де $c_i \in \mathbf{A}$. Припустимо, що $a$ і $b$ не мають спільних дільників (за винятком обертовних елементів). Але $a^m + c_1 a^{m-1} b + \dots + b^m c_m = 0$, отже, $a^m$ ділиться на $b$, що неможливо, якщо $b$ не є обертовним. Отже, $1/b \in \mathbf{A}$, а тому й $q \in \mathbf{A}$. □

Нехай $\mathbf{L}$ – скінченне розширення поля $\mathbf{Q}$. Якщо $a \in \mathbf{L}$, позначимо через $\mu_a(x)$ *мінімальний многочлен* $a$ над $\mathbf{Q}$, тобто многочлен з $\mathbf{Q}[\,x\,]$ зі старшим коефіцієнтом 1 найменшого можливого степеня, такий що $\mu_a(a) = 0$. Добре відомо, що такий многочлен завжди незвідний і єдиний.

Надалі ми зватимемо многочлени зі старшим коефіцієнтом 1 *унітальними многочленами*.

Лема 3.4.5. *Якщо* $\mathbf{A}$ *– нормальне кільце з полем часток* $\mathbf{Q}$ *і* $a$ *– елемент скінченного розширення* $\mathbf{L}$ *поля* $\mathbf{Q}$ *, який є цілим над* $\mathbf{A}$ *, то* $\mu_a(x) \in \mathbf{A}[\,x\,]$ *.*

Доведення. Розглянемо розширення $\mathbf{L}' \supseteq \mathbf{L}$, таке що $\mu_a(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$ для деяких $a_i \in \mathbf{L}'$. Оскільки $\mu_a(x)$ незвідний, $\mathbf{Q}(a_i) \simeq \mathbf{Q}(a)$ і цей ізоморфізм є тотожнім на $\mathbf{Q}$. Отже, кожний $a_i$ є також цілим над $\mathbf{A}$. Але коефіцієнти $\mu_a(x)$ – це многочлени від $a_i$ з цілими коефіцієнтами ("елементарні симетричні многочлени"), отже, вони також цілі над $\mathbf{A}$ (див. наслідок 1.4.9). Оскільки $\mathbf{A}$ нормальне, вони належать до $\mathbf{A}$. □

Наслідок 3.4.6 (Лема Гауса). *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нормальне кільце з полем часток* $\mathbf{Q}$ *,* $f \in \mathbf{A}[\,x\,]$ *– унітальний многочлен і* $f = gh$ *, де* $g \in \mathbf{Q}[\,x\,]$ *також унітальний. Тоді* $g \in \mathbf{A}[\,x\,]$.

Доведення. Звичайно, достатньо довести це твердження для *незвідного* $g$. Розглянемо будь-який його корінь $a$ в деякому розширенні $\mathbf{Q}$. Оскільки $f(a) = 0$, $a$ цілий над $\mathbf{A}$. Але $g(x) = \mu_a(x)$ (оскільки $g$ незвідний), отже, $g \in \mathbf{A}[\,x\,]$ за лемою 3.4.5. □

Нам ще потрібна наступна версія твердження 1.4.8.

Лема 3.4.7. *Нехай* $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ *– розширення кілець,* $M \subseteq \mathbf{A}$ *– скінченно породжений* $\mathbf{B}$*-підмодуль, такий що* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M) = \{\,0\,\}$ *і* $aM \subseteq IM$ *, де* $I$ *– ідеал з* $\mathbf{B}$ *. Тоді:*

(1) *Існують елементи* $b_1, b_2, \dots, b_m \in I$ *, такі що* $f(a) = 0$ *, де* $f(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0$ *.*
(2) *Якщо* $I$ *– первинний ідеал, а* $\mathbf{B}$ *є нормальним, всі коефіцієнти* $\mu_a(x)$ *належать до* $I$ *.*

Доведення. Доведення *1* є незначною модифікацією доведення твердження 1.4.8 (імплікація $4 \Rightarrow 1$). А саме, якщо $M = \langle\, u_1, u_2, \dots, u_m \,\rangle$ як $\mathbf{B}$-модуль, існують елементи $c_{ij} \in I$, такі що $au_j = \sum_i c_{ij}u_i$, звідки $\det(aE - C) = 0$, де $C = (c_{ij})$. Отже, можна покласти $f(x) = \det(xE - C)$.

*2.* Маємо $f(x) = \mu_a(x)g(x)$, де $f(x)$ – многочлен, побудованний вище, і всі многочлени є унітальними. З леми Гауса випливає, що $\mu_a(x)$ і $g(x)$ належать до $\mathbf{B}[\,x\,]$. За модулем $I$ ця рівність дає: $x^m \equiv \mu_a(x)g(x) \pmod{I}$. Оскільки $\mathbf{B}/I$ ціле, звідси одержуємо, що $\mu_a(x) \equiv x^d \pmod{I}$, де $d = \deg \mu_a$. □

Дамо характеризацію нормальних кілець, використовуючи їхні локалізації за *первинними ідеалами висоти* 1. Спершу доведемо деякі прості, але корисні факти, що стосуються так званих *кілець дискретної оцінки*.

Означення 3.4.8. *Кільцем дискретної оцінки* зветься ціле локальне кільце головних ідеалів, яке не є полем.

Теорема 3.4.9. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– локальне ціле нетерове кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m} \neq \{0\}$, $\mathbf{Q}$ *– його поле часток. Наступні умови рівносильні:*

(1) $\mathbf{A}$ *є нормальним кільцем круллевої розмірності 1.*
(2) $\mathbf{A}$ *є кільцем дискретної оцінки.*
(3) $\mathfrak{m}$ *є головним ідеалом.*
(4) $\mathbf{A}$ *нормальне й існує елемент* $r \in \mathbf{Q}$, *такий що* $r \notin \mathbf{A}$ *але* $r\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$.

*В цьому випадку всі власні ненульові ідеали* $\mathbf{A}$ *– це* $\mathfrak{m}^k$, *де* $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. *2⇒1*: Оскільки $\mathbf{A}$ – кільце головних ідеалів, воно є факторіальним, отже, нормальним. Оскільки $\mathfrak{m}$ головний, $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = 1$ за Теоремою Крулля про головний ідеал.

*3⇒2*: Нехай $\mathfrak{m} = t\mathbf{A}$ для деякого $t$. Тоді $\mathfrak{m}^k = t^k\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$ як $\mathbf{A}$-модуль, отже, $\mathfrak{m}^{k+1}$ – єдиний максимальний підмодуль в $\mathfrak{m}^k$. Нехай $I$ – довільний ненульовий власний ідеал в $\mathbf{A}$. Тоді $I \subseteq \mathfrak{m}$ і якщо $I \subseteq \mathfrak{m}^k$, то або $I \subseteq \mathfrak{m}^{k+1}$, або $I = \mathfrak{m}^k$. Оскільки $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = 1$, $\mathfrak{m} = \sqrt{I}$, отже, $\mathfrak{m}^k \subseteq I$ для деякого $k$, звідки $I \nsubseteq \mathfrak{m}^{k+1}$. Тому існує $k$, таке що $I = \mathfrak{m}^k = \langle t^k \rangle$.

*4⇒3*: Якщо $r\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, то $r$ є цілим над $\mathbf{A}$, тому $r \in \mathbf{A}$. Отже, $r\mathfrak{m} = \mathbf{A}$, тобто $\mathfrak{m} = r^{-1}\mathbf{A}$.

*1⇒4*: Нехай $a$ – ненульовий елемент з $\mathfrak{m}$. Оскільки $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = 1$, $\mathfrak{m}$ – єдиний мінімальний первинний ідеал, що містить $a$, тому $\mathfrak{m} = \sqrt{\langle a \rangle}$ і $\mathfrak{m}^k \subseteq \langle a \rangle$ для деякого $k$. Виберемо мінімальне можливе $k$ й елемент $b \in \mathfrak{m}^{k-1} \setminus \langle a \rangle$. Покладемо $r = b/a$. Тоді $r \notin \mathbf{A}$, але $b\mathfrak{m} \subseteq a\mathbf{A}$, тобто $r\mathfrak{m} \subseteq \mathbf{A}$. □

Теорема 3.4.10. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– ціле нетерове кільце, яке не є полем,* $P = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}\,\mathbf{A} \mid \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1\}$ *і* $\mathbf{Q}$ *– поле часток* $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ *є нормальним тоді й лише тоді, коли* $\mathbf{A} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p}$ *і кожне* $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$, *де* $\mathfrak{p} \in P$, *є кільцем дискретної оцінки.*

Доведення. Припустимо, що всі $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p} \in P$) є кільцями дискретної оцінки й $\mathbf{A} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Якщо $r \in \mathbf{Q}$ є цілим над $\mathbf{A}$, він є цілим над кожним $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$, отже, $r \in \mathbf{A}_\mathfrak{p}$ для кожного $\mathfrak{p} \in P$, оскільки $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ нормальне. Тому $r \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p} = \mathbf{A}$.

Припустимо тепер, що $\mathbf{A}$ нормальне. Тоді всі $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ є також нормальними, отже, якщо $\mathfrak{p} \in P$, вони є кільцями дискретної оцінки за теоремою 3.4.9. Нехай $r \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p}$, але $r \notin \mathbf{A}$. Покладемо $I = \{a \in \mathbf{A} \mid ar \in \mathbf{A}\}$. Це власний ідеал у $\mathbf{A}$ і $I \nsubseteq \mathfrak{p}$ для кожного $\mathfrak{p} \in P$. Нехай $\mathfrak{m}$ – мінімальний первинний ідеал, який містить $I$. Тоді $r \notin \mathbf{A}_\mathfrak{m}$ і $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}_\mathfrak{m} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} > 1$. Більш того, $\mathfrak{m}\mathbf{A}_\mathfrak{m} = \sqrt{I\mathbf{A}_\mathfrak{m}}$, отже, $\mathfrak{m}^k\mathbf{A}_\mathfrak{m} \subseteq I\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ для деякого $k$. Це означає, що $r\mathfrak{m}^k\mathbf{A}_\mathfrak{m} \subseteq \mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Виберемо мінімально можливе $k$ й елемент $a \in \mathfrak{m}^{k-1}\mathbf{A}_\mathfrak{m}$, такий що $ar \notin \mathbf{A}_\mathfrak{m}$. Тоді $ar\mathfrak{m}\mathbf{A}_\mathfrak{m} \subseteq \mathbf{A}_\mathfrak{m}$ і $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ нормальне, отже, воно має круллеву розмірність 1 за теоремою 3.4.9. Одержуємо протиріччя, отже, $\mathbf{A} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p}$ . $\square$

Ця теорема дозволяє “глобалізацію”:

Наслідок 3.4.11. *Нехай $X$ – незвідний алгебричний многовид. $X$ є нормальним тоді й лише тоді, коли виконуються дві наступні умови:*

(1) *Для кожного незвідного замкненого підмноговиду $Y \subset X$ корозмірності 1 існує відкрита афінна множина $U \subseteq X$, така що $U \cap Y \neq \emptyset$ й ідеал $I(Y \cap U)$ є головним в $\mathbf{K}[\,U\,]$.*
(2) *Якщо $p \in X$ і $f \in \mathbf{K}(X)$ є такими, що $\mathrm{Dom}(f) \cap Y \neq \emptyset$ для кожного незвідного замкненого $Y \subset X$ корозмірності 1 з $p \in Y$, то $p \in \mathrm{Dom}(f)$.*

Доведення. Очевидно, можна замінити $X$ відкритою афінною підмножиною (яка містить $Y$ для *1* і містить $p$ для *2*). Отже, вважатимемо $X$ афінним і покладемо $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$.

Припустимо, що $X$ нормальний. Нехай $Y \subset X$ – незвідний замкнений підмноговид корозмірності 1. Ідеал $\mathfrak{p} = I(Y)$ має висоту 1 в кільці $\mathbf{A}$, отже, $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p} = t\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ для деякого елемента $t \in \mathbf{A}$. Виберемо множину твірних $\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p} = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_m \,\rangle$. Тоді $a_m = tb_m/s$, де $b_i \in \mathbf{A}$, $s \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$. Покладемо $U = D(s)$. Тоді $U \cap Y \neq \emptyset$, оскільки $s \notin \mathfrak{p}$, і $s$ обертовний на $U$. Тому, в $\mathbf{K}[\,U\,]$, $I(U \cap Y) = \mathfrak{p}\mathbf{K}[\,U\,] = t\mathbf{K}[\,U\,]$, отже, умова *1* виконується.

Нехай $f \in \mathbf{K}(X)$ є таким, як у *2*, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ в $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$. Первинні ідеали $\mathbf{A}_\mathfrak{m}$ висоти 1 мають вигляд $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{m}$, де $\mathfrak{p}$ – первинний ідеал $\mathbf{A}$ висоти 1, який міститься в $\mathfrak{m}$. Покладемо $Y = V(\mathfrak{p})$. Це незвідний підмноговид у $X$ корозмірності 1, отже, існує точка $y \in Y \cap \mathrm{Dom}(f)$. Це означає, що існують регулярні функції $a, b \in \mathbf{A}$, такі що $b(y) \neq 0$ і $f = a/b$. Тоді $b \notin \mathfrak{m}_y \supseteq \mathfrak{p}$, отже, $f \in \mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Оскільки це виконується для кожного первинного ідеала $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$, $f \in \mathbf{A}_\mathfrak{m}$, тобто $f = c/d$, де $c, d \in \mathbf{A}$, $d(p) \neq 0$, отже, $p \in \mathrm{Dom}(f)$.

Припустимо тепер, що *1* і *2* виконуються. Нехай $\mathfrak{p}$ – первинний ідеал $\mathbf{A}$ висоти 1, $Y = V(\mathfrak{p})$ – відповідний замкнений підмноговид, який є незвідним і має корозмірність 1. Виберемо $U$ як в *1*; очевидно, можна припустити його головним відкритим: $U = D(g)$. Оскільки $U \cap Y \neq \emptyset$, $g \notin \mathfrak{p}$. Отже, $\mathbf{A}[\,g^{-1}\,] \subseteq \mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Але $\mathfrak{p}\mathbf{A}[\,g^{-1}\,] = t\mathbf{A}[\,g^{-1}\,]$ для деякого $t$, отже, також $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p} = t\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ й $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ є кільцем дискретної оцінки за теоремою 3.4.9.

Нехай $f \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} \mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Це означає, що $\mathrm{Dom}(f) \cap Y \neq \emptyset$ для кожного замкненого незвідного $Y$ корозмірності 1. Тоді $\mathrm{Dom}(f) = X$, тобто $f \in \mathbf{A}$. Отже, $\mathbf{A}$ нормальне. $\square$

Відзначимо також наступну важливу властивість нормальних многовидів.

Наслідок 3.4.12. *Нехай* $f : X \to Y$ *– раціональне відображення, де многовид* $X$ *є нормальним, а* $Y$ *проективним. Тоді* $\operatorname{codim} \operatorname{Irr}(f) > 1$ .

Доведення. Ясно, що $X$ можна вважати афінним і досить довести, що $Z \cap \operatorname{Dom}(f) \neq \emptyset$ для будь-якого незвідного замкненого $Z \subset X$ корозмірності $1$ . За наслідком 3.4.11, можна припустити, що ідеал $\mathfrak{p} = I(Z)$ є головним в $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$: $\mathfrak{p} = \langle\, t\,\rangle$ . За вправою 2.2.11(2), на відкритій підмножині $U \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ $f$ є заданим за правилом: $p \mapsto (f_0(p) : f_1(p) : \dots : f_n(p))$ , де $f_i \in \mathbf{A}$ . В $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ ми маємо: $\langle\, f_i\,\rangle = \langle\, t^{d_i}\,\rangle$ для деяких $d_i$ . Нехай $d = \min\{\, d_i\,\}$ . Тоді $g_i = t^{-d} f_i \in \mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ і щонайменше один з цих елементів є обертовним в $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ . Отже, $g_i = a_i/b$ , де $a_i, b \in \mathbf{A}$ й існує точка $p \in Z$ , така що $b(p) \neq 0$ і $a_j(p) \neq 0$ принаймні для одного $j$ . Тоді на відкритій підмножині $U \cap D(t) \cap D(b) \cap D(a_j)$ $f$ можна задати таким правилом: $p \mapsto (a_0(p) : a_1(p) : \dots : a_n(p))$ . Але останнє правило визначає раціональне відображення на $U \cap D(b) \cap D(a_j)$ , і ця відкрита множина містить $p$ . Отже, $p \in \operatorname{Dom}(f) \cap Z$ . $\square$

Якщо $X$ є *кривою*, підмноговидів корозмірністі $2$ не існує, що дає наступні результати:

Наслідок 3.4.13. (1) *Будь-яке раціональне відображення нормальної кривої в проективний многовид регулярне.*
(2) *Якщо дві нормальні проективні криві бiраціонально еквівалентні, вони ізоморфні.*

### 3.5. Розмірності афінних і проективних многовидів

Головним фактом відносно розмірностей алгебричних многовидів є наступна теорема.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– ціла афінна алгебра,* $\mathfrak{p} \subset \mathbf{A}$ *– первинний ідеал. Тоді* $\operatorname{K.dim} \mathbf{A} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{K.dim} \mathbf{A}/\mathfrak{p}$ .

Цю теорему можна "глобалізувати", використовуючи наступне поняття.

Означення 3.5.2. Нехай $Y$ – незвідний підмноговид алгебричного многовиду $X$ . *Корозмірність* $Y$ ( $\operatorname{codim} Y$ ) – це, за означенням, максимальна довжина $l$ ланцюжків незвідних підмноговидів $Y = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_l$ . Для довільного підмноговиду $Y \subseteq X$ його *корозмірність* визначається як мінімум корозмірностей його незвідних компонент.

Наступна теорема є очевидним переформулюванням теореми 3.5.1 (якщо взяти до уваги твердження 3.2.3).

Теорема 3.5.3. *Нехай* $X$ *– незвідний алгебричний многовид,* $Y$ *– його незвідний підмноговид. Тоді* $\dim Y + \operatorname{codim} Y = \dim X$ .

Для доведення цих теорем використаємо Нормалізаційну лему Нетера і наступні результати, які уточнюють принцип підйому для розширень нормальних кілець.

Лема 3.5.4. *Нехай $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ – скінченне розширення цілих нетерових кілець, де $\mathbf{B}$ нормальне. Якщо $\mathfrak{p}$ – первинний ідеал $\mathbf{B}$, а $\mathfrak{P}$ – мінімальний первинний ідеал $\mathbf{A}$, який містить $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{P} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}$.*

Доведення. Покладемо $J = \sqrt{\mathfrak{p}\mathbf{A}}$. Тоді мінімальні первинні ідеали $\mathbf{A}$, які містять $\mathfrak{p}$, є первинними компонентами $J$ у розумінні наслідку 1.5.9 і вправи 1.5.10. Отже, їх існує лише скінченна кількість: $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_r$, і $J = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{P}_i$. Оскільки $\mathfrak{P}_i \not\subseteq \mathfrak{P}$ для $i > 1$, також $P = \prod_{i=1}^r \mathfrak{P}_i \not\subseteq \mathfrak{P}$. Нехай $a \in P \setminus \mathfrak{P}$. Припустимо, що $\mathfrak{P} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$ і $b \in \mathfrak{p}' \setminus \mathfrak{p}$. Тоді $ab \in \prod_{i=1}^r \mathfrak{P}_i \subseteq J$, отже, $a^k b^k \in \mathfrak{p}\mathbf{B}$ для деякого $k$. Оскільки $a^k \notin \mathfrak{P}$ і $b^k \in \mathfrak{p}' \setminus \mathfrak{p}$, ми можемо припустити (і припустимо), що вже $ab \in \mathfrak{p}\mathbf{A}$. Отже, мінімальний многочлен $ab$ має вигляд $x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$ з $c_i \in \mathfrak{p}$. Тоді мінімальним многочленом $a$ є $x^m + d_1 x^{m-1} + \dots + d_m$, де $c_i = b^i d_i$. Оскільки $b \notin \mathfrak{p}$, то $d_i \in \mathfrak{p}$ для всіх $i$, звідки $a^m \in \mathfrak{p}\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{P}$, що є неможливим, бо $a \notin \mathfrak{P}$. $\square$

Наслідок 3.5.5. *Нехай $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ – скінченне розширення цілих нетерових кілець і $\mathbf{B}$ нормальне. Якщо $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ – первинні ідеали $\mathbf{B}$ і $\mathfrak{P}$ – первинний ідеал $\mathbf{A}$, який містить $\mathfrak{p}$, в $\mathbf{A}$ існує первинний ідеал $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{P}$, такий що $\mathfrak{Q} \cap \mathbf{B} = \mathfrak{q}$.*

Доведення. За $\mathfrak{Q}$ можна взяти будь-який мінімальний первинний ідеал $\mathbf{A}$, що містить $\mathfrak{q}$ і міститься в $\mathfrak{P}$. (Такі ідеали існують за наслідком 3.3.20.) $\square$

Наслідок 3.5.6. *Нехай $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ – скінченне розширення цілих нетерових кілець і $\mathbf{B}$ нормальне. Для будь-якого первинного ідеала $\mathfrak{P}$ кільця $\mathbf{A}$ $\operatorname{ht}\mathfrak{P} = \operatorname{ht}(\mathfrak{P} \cap \mathbf{B})$.*

Доведення. Покладемо $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathbf{B}$. Нехай $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_l$ – довільний ланцюжок первинних ідеалів в $\mathbf{B}$. Наслідок 3.5.5 показує, що в $\mathbf{A}$ існує ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \supset \mathfrak{P}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{P}_l$, такий що $\mathfrak{P}_i \cap \mathbf{B} = \mathfrak{p}_i$. Отже, $\operatorname{ht}\mathfrak{P} \geqslant \operatorname{ht}\mathfrak{p}$. З іншого боку, якщо $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 \supset \mathfrak{P}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{P}_l$ – ланцюжок первинних ідеалів в $\mathbf{A}$ і $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap \mathbf{B}$, то в $\mathbf{B}$ одержимо ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_l$ (див. лему 3.1.14). Отже, також $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \geqslant \operatorname{ht}\mathfrak{P}$. $\square$

Доведення теореми 3.5.1. Покладемо $d = \operatorname{K.dim}\mathbf{A}$, $h = \operatorname{ht}\mathfrak{p}$. Спочатку доведемо цю теорему для випадку $h = 1$. Використовуючи Нормалізаційну лему Нетера, знайдемо підалгебру $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, таку що $\mathbf{B} \simeq \mathbf{K}[x_1, \dots, x_d]$ і $\mathbf{A}$ є цілим над $\mathbf{B}$. Оскільки $\mathbf{B}$ факторіальне, отже, нормальне, також $\operatorname{ht}(\mathfrak{p} \cap \mathbf{B}) = 1$ за наслідком 3.5.6. Отже, $\mathfrak{p}\cap\mathbf{B}$ є головним ідеалом за твердженням 3.3.24: $\mathfrak{p}\cap\mathbf{B}=\langle f\rangle$, де $f$ – незвідний многочлен. Внаслідок леми 1.4.10, припускаємо, що $f=x_d^m+g_1x_d^{m-1}+\dots+g_m$, де $g_i\in\mathbf{K}[\,x_1,\dots,x_{d-1}\,]$. Тоді підкільце $\mathbf{B}'=\mathbf{K}[\,x_1,x_2,\dots,x_{d-1},f\,]$ також ізоморфне $\mathbf{K}[\,x_1,\dots,x_d\,]$ і $\mathbf{B}$ є цілим над $\mathbf{B}'$, отже, й $\mathbf{A}$ ціле над $\mathbf{B}'$ (див. наслідок 1.4.9). Тому можна припустити, що $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$, тобто $\mathfrak{p}\cap\mathbf{B}=\langle\,x_d\,\rangle$ і $\overline{\mathbf{B}}=\mathbf{B}/(\mathfrak{p}\cap\mathbf{B})\simeq\mathbf{K}[\,x_1,\dots,x_{d-1}\,]$. Але $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$ ціле над $\overline{\mathbf{B}}$, отже, $\mathrm{K.}\dim\mathbf{A}/\mathfrak{p}=\mathrm{K.}\dim\overline{\mathbf{B}}=d-1$ за теоремами 3.2.7 і 3.2.6.

Тепер використаємо індукцію за $d$. Випадок $d=1$ покривається попередніми міркуваннями. Отже, припустимо, що твердження є дійсним для афінних алгебр розмірності $d-1$. Нехай $\operatorname{ht}\mathfrak{p}=h$. Розглянемо один з найдовших ланцюжків первинних ідеалів, що закінчуються на $\mathfrak{p}$: $\langle\,0\,\rangle=\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{q}=\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\dots\subset\mathfrak{p}_h=\mathfrak{p}$. Тоді $\operatorname{ht}\mathfrak{q}=1$, отже, $\mathrm{K.}\dim\mathbf{A}/\mathfrak{q}=d-1$. Але $\operatorname{ht}\mathfrak{p}/\mathfrak{q}=h-1$, тому, за припущенням індукції, $\mathrm{K.}\dim\mathbf{A}/\mathfrak{p}=\mathrm{K.}\dim(\mathbf{A}/\mathfrak{q})/(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})=(d-1)-(h-1)=d-h$. □

Наслідок 3.5.7. *Нехай $X$ – незвідний афінний многовид розмірності $d$, $Y=V(S)\subseteq X$, де $S=\{\,f_1,f_2,\dots,f_m\,\}\subset\mathbf{K}[\,X\,]$. Якщо $Y\neq\emptyset$, то $\dim Y_i\geqslant d-m$ для кожної незвідної компоненти $Y_i$ підмноговиду $Y$.* (Зокрема, якщо $m<d$, $Y$ *нескінченний.*)

Доведення. Нехай $Y=\bigcup_i Y_i$ – незвідний розклад $Y$, $I=I(Y)=\sqrt{\langle\,S\,\rangle}$ і $\mathfrak{p}_i=I(Y_i)$. Тоді $\mathfrak{p}_i$ є первинними компонентами $I$. Отже, вони є мінімальними первинними ідеалами, які містять $S$, тобто $\operatorname{ht}\mathfrak{p}_i\leqslant m$ за наслідком 3.3.17 і $\dim Y_i=\mathrm{K.}\dim\mathbf{K}[\,X\,]/\mathfrak{p}_i\geqslant d-m$ за теоремою 3.5.1. □

Вправи 3.5.8. Нехай $X$ – незвідний афінний многовид розмірності $n$, $\mathbf{A}=\mathbf{K}[\,X\,]$ і $Y$ – замкнений підмноговид $X$.

(1) Припустимо, що $Y=V\,(f_1,f_2,\dots,f_m)$, де $f_i\in\mathbf{A}$. Доведіть, що всі компоненти $Y$ мають розмірність $n-m$ тоді й лише тоді, коли для кожного $k=1,\dots,m$ клас $f_k$ в $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]/\sqrt{\langle\,f_1,f_2,\dots,f_{k-1}\,\rangle}$ не є дільником нуля.

В цьому випадку кажуть, що $Y$ є *множинним повним перетином* у $X$. Якщо, більш того, $\langle\,f_1,f_2,\dots,f_m\,\rangle=I(Y)$, кажуть, що $Y$ є *повним перетином* у $X$.

(2) Якщо $Y$ незвідний і $\operatorname{codim}Y=m$, доведіть, що існують елементи $f_1,f_2,\dots,f_m\in\mathbf{A}$, такі що $Y$ є компонентою $Z=V(f_1,f_2,\dots,f_m)$ і всі компоненти $Z$ також мають корозмірність $m$.

Зокрема, для кожної точки $p\in X$, існують $n$ елементів $f_1,f_2,\dots,f_n\in\mathbf{A}$, таких що $V\,(f_1,f_2,\dots,f_n)$ скінченна й містить $p$.

(3) Нехай $X = V(xy - z^2) \subset \mathbb{A}^3$, $Y = V(\overline{x}) \subset X$, де $\overline{x}$ – образ $x$ в $\mathbf{K}[\,X\,]$. Показати, що $Y$ є множиним повним перетином, але не повним перетином у $X$.

*Вказівка*: Використайте вправу 3.3.15.

Зазначимо ще одну властивість підмноговидів *афінних просторів*.

Вправа 3.5.9. Нехай $X, Y$ – незвідні підмноговиди $\mathbb{A}^n$ розмірностей, відповідно, $m$ і $k$, такі що $X \cap Y \neq \emptyset$. Доведіть, що коли $Z$ – незвідна компонента $X \cap Y$, то $\dim Z \geqslant m + k - n$.

*Вказівка*: Використайте ізоморфізм $Z \simeq (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^n} \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^{2n}$ і запишіть рівняння, які визначають $\Delta^n_{\mathbb{A}}$ в $\mathbb{A}^{2n}$.

Аналогічні й деякою мірою навіть кращі результати можна одержати для *проективних* многовидів. Нехай $X = PV(S) \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, де $S \subseteq \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,] = \mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_n\,]$. Нагадаємо, що *(афінний) конус* над $X$ – це, за означенням, афінний многовид $\widetilde{X} = V(S) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Звичайно, замкнений підмноговид $Z \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ є конусом над деяким проективним многовидом тоді й лише тоді, коли $I(Z)$ є однорідним ідеалом. Ми розглядатимемо $\{\,0\,\}$ як афінний конус над порожньою множиною.

Твердження 3.5.10. *Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, $\widetilde{X}$ афінний конус над $X$. Тоді:*

(1) *$X$ є незвідним тоді й лише тоді, коли таким є $\widetilde{X}$.*
(2) *Незвідні компоненти $\widetilde{X}$ збігаються з афінними конусами над незвідними компонентами $X$.*
(3) *Якщо $X$ незвідний, то $\mathbf{K}(\widetilde{X}) \simeq \mathbf{K}(X)(t)$, де $t$ трансцендентний над $\mathbf{K}(X)$.*
(4) $\dim \widetilde{X} = \dim X + 1$.

Доведення. *1* випливає з рівності $I(\widetilde{X}) = I(X)$, оскільки афінний або проективний многовид є незвідним тоді й лише тоді, коли його ідеал первинний.

*2.* Нехай $X = \bigcup_i X_i$ – незвідний розклад $X$. Тоді $\widetilde{X} = \bigcup_i \widetilde{X}_i$ і всі $\widetilde{X}_i$ незвідні, отже, це незвідний розклад $\widetilde{X}$.

*3.* Припустимо, що $X$ незвідний, і виберемо $i$ таким, що $X \cap \mathbb{A}^n_i = U \neq 0$. Тоді $U$ – відкрита щільна в $X$, отже, $\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(U)$. Для спрощення позначень припустимо, що $i = 0$. Афінними координатами на $U$ є $x_i/x_0$ ($i = 1, \dots, n$), отже, раціональними функціями на $U$ є обмеження раціональних часток $F/G$, де $F, G \in \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$ однорідні і $\deg F = \deg G$. Афінними координатами на $\widetilde{X}$ є $x_0, x_1, \dots, x_n$, отже, $\mathbf{K}(\widetilde{X}) = \mathbf{K}(U)(t)$, де $t$ позначає обмеження $x_0$ на $\widetilde{X}$ (воно є ненульовим, оскільки $X \cap \mathbb{A}^n_0 \neq \emptyset$). Припустимо, що $t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k = 0$, де $a_i \in \mathbf{K}(U)$. Ця рівність означає, що

$F_0x_0^k + F_1x_0^{k-1} + \dots + F_k \in I(X)$ для деяких однорідних многочленів $F_i$, які всі мають однаковий степінь і $F_0 \notin I(X)$. Оскільки $I(X)$ однорідний, звідси випливає, що $F_0x_0^k \in I(X)$, отже, $x_0 \in I(X)$, бо $I(X)$ первинний. Тоді $X \cap \mathbb{A}_0^n = \emptyset$, що протирічить нашому припущенню. Тому $t$ трансцендентний над $\mathbf{K}(X)$.

*4* очевидно випливає з *2* і *3*. □

Тепер перенесемо всі "афінні" результати на проективний випадок.

Наслідок 3.5.11. *Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – незвідний проективний многовид розмірності $d$, $Y = PV(S) \cap X$, де $S = \{ F_1, F_2, \dots, F_m \}$ і $m \leqslant d$. Тоді $Y \neq \emptyset$ і $\dim Y_i \geqslant d - m$ для кожної незвідної компоненти $Y_i$ підмноговиду $Y$.*

Зокрема якщо $m = 1$ і $X \nsubseteq PV(S)$, то $\dim Y_i = m - 1$.

Доведення. Звичайно, $\widetilde{Y} = V(S) \cap \widetilde{X}$. Зокрема, оскільки $S$ складається з однорідних многочленів, $\widetilde{Y} \neq \emptyset$. Оскільки $\dim \widetilde{X} = d + 1$, наслідок 3.5.7 показує, що всі компоненти $\widetilde{Y}$ мають розмірність принаймні $d + 1 - m > 0$. Зокрема, $\widetilde{Y} \neq \{ 0 \}$, отже, $Y \neq \emptyset$. За твердженням 3.5.10, всі компоненти $Y$ мають розмірність принаймні $d - m$. □

Вправи 3.5.12.

(1) Нехай $X \subset \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, такий що всі компоненти $X$ мають розмірність $n - 1$. Доведіть, що $X$ є гіперповерхнею в $\mathbb{P}^n$.
(2) Нехай $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ – незвідні підмноговиди розмірностей, відповідно, $m$ і $k$. Доведіть, що коли $m + k \leqslant n$, $X \cap Y \neq \emptyset$ і $\dim Z \geqslant m + k - n$ для кожної компоненти $Z$ перетину $X \cap Y$.
(3) Нехай $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид. Доведіть, що $\dim X = m - 1$, де $m$ – мінімальне ціле, таке що існують $m$ гіперповерхонь $H_1, H_2, \dots, H_m \subset \mathbb{P}^n$, для яких $X \cap (\bigcap_{i=1}^m H_i) = \emptyset$.
(4) Доведіть що $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \not\simeq \mathbb{P}^{m+n}$ для довільних додатніх $m, n$.

## 3.6. Розмірності шарів

Нехай $f : X \to Y$ – морфізм алгебричних многовидів. Для кожної точки $p \in Y$ шар $f^{-1}(p)$ є замкненим підмноговидом $X$. Наступний результат описує можливості для його розмірності.

Теорема 3.6.1. *Нехай $f : X \to Y$ – домінантний морфізм незвідних алгебричних многовидів. Тоді:*

(1) *Для кожного $p \in \operatorname{Im} f$ і для кожної компоненти $Z$ шару $f^{-1}(p)$ $\dim Z \geqslant \dim X - \dim Y$.*
(2) *$Y$ містить відкриту щільну підмножину $U \subseteq \operatorname{Im} f$, для всіх точок $p$ якої $\dim f^{-1}(p) = \dim X - \dim Y$ (отже,*

$\dim Z = \dim X - \dim Y$ *для кожної компоненти* $Z$ *шару* $f^{-1}(p)$ *).*

Доведення. Замінивши $Y$ афінним околом $p$, а $X$ афінним околом довільної точки $z \in f^{-1}(p)$, можна припустити, що $X$ та $Y$ афінні. Тоді існує скінченне домінантне відображення $\varphi : Y \to \mathbb{A}^n$, де $m = \dim Y$ (теорема 3.2.5). Для кожної точки $q \in \mathbb{A}^n$ $\varphi^{-1}(q)$ скінченна (див. теорему 3.1.12): $\varphi^{-1}(q) = \{ p_1, p_2, \dots, p_k \}$. Отже, $(\varphi \circ f)^{-1}(q) = \bigsqcup_{i=1}^k f^{-1}(p_i)$ (незв'язне об'єднання) і незвідні компоненти кожного $f^{-1}(p_i)$ є також незвідними компонентами $(\varphi \circ f)^{-1}(q)$. Тому можна припустити, що $Y = \mathbb{A}^n$. Для кожної точки $p \in \mathbb{A}^n$ $\mathfrak{m}_p$ породжений $n$ многочленами: $\mathfrak{m}_p = \langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$. Отже, $f^{-1}(p) = V(f^*(h_1), \dots, f^*(h_n))$ і твердження *1* випливає з наслідку 3.5.7.

Для доведення *2* використаємо ті самі міркування, що й у теоремі Шеваллє (теорема 3.1.17). А саме, розглянемо $\mathbf{B} = \mathbf{K}[ x_1, \dots, x_n ]$ як підалгебру $\mathbf{A} = \mathbf{K}[ X ]$ (образ $f^*$), виберемо базу трансцендентності $\{ a_1, a_2, \dots, a_d \}$ поля $\mathbf{K}(X)$ над $\mathbf{K}( x_1, \dots, x_m )$, таку що $a_i \in \mathbf{A}$, і розглянемо алгебричні рівняння $c_{i0}a_i^k + c_{i1}a_i^{k-1} + \dots + c_{ik} = 0$ для множини твірних $\{ a_1, a_2, \dots, a_r \}$ алгебри $\mathbf{A}$ над $\mathbf{B}[ a_1, \dots, a_d ] \simeq \mathbf{K}[ x_1, \dots, x_{d+n} ]$, де $c_{ij} \in \mathbf{K}[ x_1, \dots, x_{d+n} ]$. Тоді $d = m - n$, де $m = \operatorname{tr.deg} \mathbf{K}(X) = \dim X$ (див. наслідок A.3). Більш того, якщо $V = D(g) \subseteq \mathbb{A}^n$, де $g = \prod_{i=1}^k c_{i0}$, обмеження $f$ на $f^{-1}(V)$ розкладається як $f^{-1}(V) \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$, де $\varphi$ – скінченне відображення, а $\pi$ – проекція. Покладемо $U = \pi(V)$. Вона відкрита (отже, щільна), і для будь-якого $p \in U$ обмеження $\varphi$ на $f^{-1}(p)$ дає скінченне відображення $f^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{A}^d$ (див. вправу 3.1.10(4)). Тому, $\dim f^{-1}(p) = d = m - n$. □

Наслідок 3.6.2. *Нехай* $f : X \to Y$ *сюр'єктивний морфізм незвідних алгебричних многовидів,* $Y_d = \{ p \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geqslant d \}$. *Тоді всі підмножини* $Y_d$ *замкнені в* $Y$.

Інакще кажучи, функція $Y \to \mathbb{N}$, $p \mapsto \dim f^{-1}(p)$, *напівнеперервна зверху*.

Доведення. За теоремою 3.6.1, $Y_d = Y$, якщо $d \leqslant m - n$, де $m = \dim X$, $n = \dim Y$, й існує власна замкнена підмножина $Z \subseteq Y$, така що $Y_d \subseteq Z$ для $d > n - m$. Нехай $Z = \bigcup_{i=1}^k Z_i$ – незвідний розклад $Z$. Використовуючи нетерову індукцію, припустимо, що для кожного $d$ $Z_{id} = \{ z \in Z_i \mid \dim f^{-1}(z) \geqslant d \}$ замкнена в $Z_i$, а тому й у $Y$. Оскільки $Y_d = \bigcup_{i=1}^k Z_{id}$, вона також замкнена. □

Вправа 3.6.3. Розглянемо квадратичне кремонове перетворення, тобто відображення $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 :$ $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_1x_2 : x_2x_0 : x_0x_1)$. Знайти всі шари $\varphi^{-1}(p)$. Де $\dim \varphi^{-1}(p) \neq 0$ ?

Використаємо теорему 3.6.1 до *дій алгебричних груп.* Введемо спочатку необхідні означення.

Означення 3.6.4. (1) *Алгебрична група* - це алгебричний многовид $G$ з законом множення $\mu : G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$ таким що:
   (a) $G$ з законом множення $\mu$ є групою;
   (b) відображення $\mu$ і $\delta : G \to G$, $\delta(g) = g^{-1}$, регулярні.

(2) Нехай $G$ – алгебрична група, $X$ – алгебричний многовид. *Дія* $G$ на $X$ – це регулярне відображення $G \times X \to X$, $(g,p) \to gp$, таке що:
   (a) $1p = p$ для всіх $p \in X$ ($1$ позначає *одиницю* групи $G$);
   (b) $g(hp) = (gh)p$ для всіх $g,h \in G$, $p \in X$.

(3) Нехай алгебрична група $G$ діє на многовиді $X$. *Стабілізатор* елемента $p \in X$ у групі $G$ – це підгрупа $\operatorname{St} p = \{\, g \in G \mid gp = p \,\}$. *Орбіта* $Gp$ цього елемента - це множина $\{\, gp \mid g \in G \,\}$.

Приклад 3.6.5. Розглянемо *повну лінійну групу* $G = \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$. Вона збігається з головною відкритою підмножиною $D(\det) \subset \mathrm{Mat}$ $(n \times n, \mathbf{K}) \simeq \mathbb{A}^{n^2}$. Тому $G$ є афінним многовидом і $\mathbf{K}[\,G\,] = \mathbf{K}[\,x_{ij}\,]$ $[\,\det^{-1}\,]$. Тоді формула для добутку матриць і оберненої матриці показує, що $G$ є дійсно алгебричною групою.

Багато груп походять від замкнених підгруп $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$. Наприклад, *спеціальна лінійна група* $\mathrm{SL}(n, \mathbf{K}) = \{\, g \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K}) \mid \det g = 1 \,\}$; *ортогональна група* $\mathbf{O}(n, \mathbf{K}) = \left\{\, g \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K}) \mid gg^{\top} = 1 \,\right\}$ та інші. Можна довести, що будь-яка *афінна група*, тобто алгебрична група, чий підлеглий многовид є афінним, ізоморфна замкненій підгрупі $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$.

Відзначимо наступні очевидні факти.

Твердження 3.6.6. *Нехай алгебрична група $G$ діє на многовиді $X$. Для будь-якого елемента $p \in X$:*
1. $\operatorname{St} p$ *– замкнена підгрупа в $G$.*
2. $Gp$ *– підмноговид (тобто локально замкнена підмножина) в $X$.*
3. $\dim Gp = \dim G - \dim \operatorname{St} p$.

Доведення. Розглянемо відображення $f : G \to X$, $g \to gp$. Воно є регулярним. Тепер *1* є очевидним, оскільки $\operatorname{St} p = f^{-1}(p)$. За теоремою 3.1.17, $Gp$ конструктивна, отже, містить відкриту підмножину $V$ свого замикання $\overline{Gp}$. Виберемо точку $v \in V$. Тоді $Gp = Gv$. Якщо $z \in Gv, z = gv$, то $z \in gV$ і $gV$ відкрита в $g(\overline{Gp}) = \overline{g(Gp)} = \overline{Gp}$, оскільки відображення $x \to gx$ є автоморфізмом алгебричного многовиду $X$. Отже, $Gp = \bigcup_{g \in G} gV$ відкрита в $\overline{Gp}$, тобто локально замкнена в $X$, що доводить *2*. Для доведення *3* припустимо спочатку $G$ незвідним. Тоді $Gp$ є також незвідним. Якщо $y = gp \in Gp$, легко перевірити, що $f^{-1}(y) = g \operatorname{St} p \simeq \operatorname{St} p$ (як многовиди). Отже, за теоремою 3.6.1, $\dim Gp = \dim G - \dim \operatorname{St} p$. Загальний випадок одержуємо з наступного зауваження, яке пропонується як проста вправа.

Вправи 3.6.7. (1) Нехай $G$ алгебрична група, $G^\circ$ – її незвідна компонента, яка містить $1$. Тоді $G^\circ$ – нормальна замкнена підгрупа скінченного індекса в $G$ і кожна незвідна компонента $G$ має вигляд $gG^\circ$ для деякого $g \in G$.

(2) Дві різні незвідні компоненти не мають спільних точок. Отже, зокрема, незвідні компоненти збігаються зі *зв'язними компонентами* $G$. Зокрема, $G$ незвідна тоді й лише тоді, коли вона зв'язна.

(3) Доведіть твердження 3.6.6 для звідної групи $G$.

□

Наступний результат часто буває корисним.

Твердження 3.6.8. *Нехай алгебрична група $G$ діє на незвідному алгебричному многовиді $X$. Тоді існує відкрита множина $V \subseteq X$, така що $\dim Gv = \max\{\dim Gp \mid p \in X\}$ для кожного $v \in V$.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли $G$ зв'язна (або, що те саме, незвідна); незв'язний випадок лишається як легка вправа. Розглянемо регулярне відображення $\varphi : G \times X \to X \times X$, $\varphi(g,p) = (gp,p)$. Нехай $\Gamma = \varphi^{-1}(\Delta_X)$ і $\psi = \operatorname{pr}_X \circ \varphi|_\Gamma$ (не має значення, яку з двох проекцій ми вибираємо). Тоді $\psi$ сюр'єктивне і $\psi^{-1}(p) = \operatorname{St} p \times \{p\} \simeq \operatorname{St} p$ для кожної точки $p \in X$. За теоремою 3.6.1, існує відкрита підмножина $V \subseteq X$, така що $\dim \operatorname{St} v = \min\{\dim \operatorname{St} p \mid p \in X\}$ для будь-якого $v \in V$. Тоді, за твердженням 3.6.6, $\dim Gv = \max\{\dim Gp \mid p \in X\}$. □

Зазначимо ще один досить корисний наслідок.

Наслідок 3.6.9. *Нехай алгебрична група $G$ діє на незвідному многовиді $X$ й існує лише скінченна кількість орбіт $G$ на $X$. Тоді існує відкрита орбіта й $\dim X \leqslant \dim G - \min\{\dim \operatorname{St} p \mid p \in X\}$.*

Доведення. Ми маємо $X = \bigcup_{i=1}^m Gp_i$, отже, $X = \bigcup_{i=1}^m \overline{Gp_i}$. Оскільки $X$ незвідний, існує $j$, такий що $X = \overline{Gp_j}$. Тоді $Gp_j$ відкрита в $X$ за твердженням 3.6.6 і $\dim X = \dim Gp_j = \dim G - \dim \operatorname{St} p_j$. □

## 3.7. Нормалізація

Існує досить проста процедура, яка дозволяє звести багато питань, що стосуються алгебричних многовидів, до випадку нормальних многовидів. Спочатку введемо відповідні означення.

Означення 3.7.1. Нехай $X$ – алгебричний многовид. *Нормалізація* $X$ – це, за означенням, скінченне відображення $\nu : \widetilde{X} \to X$, таке що $\widetilde{X}$ є нормальним, а $\nu$ бiрацiональним.

Теорема 3.7.2. *Для кожного незвiдного алгебричного многовиду $X$ iснує нормалiзацiя $\nu : \widetilde{X} \to X$. Бiльш того, якщо $\nu' : X' \to X$ – iнша нормалiзацiя, то iснує єдиний iзоморфiзм $f : X' \to \widetilde{X}$, такий що $\nu' = \nu \circ f$.*

Часто звуть сам $\widetilde{X}$ *нормалiзацiєю* $X$ (особливо беручи до уваги єдинiсть $\nu$ з точнiстю до автоморфiзма $\widetilde{X}$).

Доведення. Нехай $X$ – афiнний многовид, $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,X\,]$, $\mathbf{Q}$ – поле часток $\mathbf{A}$ i $\widetilde{\mathbf{A}}$ – цiле замикання $\mathbf{A}$ в $\mathbf{Q}$, тобто множина всiх елементiв $\mathbf{Q}$, якi є цiлими над $\mathbf{A}$. Використаємо наступну лему, яку доведемо пiзнiше.

Лема 3.7.3. *Нехай $\mathbf{A}$ – цiла афiнна алгебра, $\mathbf{Q}$ – її поле часток, $\mathbf{F}$ – скiнченне розширення $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{B}$ – цiле замикання $\mathbf{A}$ в $\mathbf{F}$. Тодi $\mathbf{B}$ скiнченно породжене як $\mathbf{A}$-модуль. (Зокрема, воно також є афiнною алгеброю.)*

Згiдно з цiєю лемою, $\widetilde{\mathbf{A}}$ – афiнна алгебра, отже, $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{K}[\widetilde{X}]$ для деякого *нормального* алгебричного многовиду $\widetilde{X}$. Включення $\mathbf{A} \to \widetilde{\mathbf{A}}$ призводить до скiнченного морфiзму $\nu : \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}$. Вiн також є бiрацiональним, оскiльки поле часток $\widetilde{\mathbf{A}}$ збiгається з $\mathbf{Q}$. Отже, $\nu$ є нормалiзацiєю $X$. Припустимо, що $\nu' : X' \to X$ – iнша нормалiзацiя. Тодi $X'$ – також афiнний многовид (див. наслiдок 3.1.3). Покладемо $\mathbf{A}' = \mathbf{K}[\,X'\,]$. Оскiльки $\nu'$ домiнантний, вiн породжує занурення $\nu'^* : \mathbf{A}' \to \mathbf{A}$. Бiльш того, оскiльки $\nu'$ бiрацiональний, $\nu'^*$ породжує iзоморфiзм $\mathbf{Q}' \to \mathbf{Q}$, де $\mathbf{Q}'$ – поле часток $\mathbf{A}'$. Позначимо цей iзоморфiзм $\varphi$ i розглянемо $\varphi(\mathbf{A}')$ як пiдкiльце $\mathbf{Q}$. Воно мiстить $\mathbf{A}$ i є цiлим над $\mathbf{A}$, отже, воно мiститься в $\widetilde{\mathbf{A}}$. Бiльш того, $\widetilde{\mathbf{A}}$ є цiлим над $\varphi(\mathbf{A}')$ (оскiльки воно є цiлим над $\mathbf{A}$), отже, $\widetilde{\mathbf{A}} = \varphi(\mathbf{A}')$ (оскiльки $\mathbf{A}'$ нормальне), тобто $\varphi$ породжує iзоморфiзм $\mathbf{A}'$ на $\widetilde{\mathbf{A}}$. За твердженням 1.2.2, iснує iзоморфiзм $f : X' \to \widetilde{X}$, такий що $f^* : \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}'$ є iзоморфiзмом, оберненим до $\varphi$. Тодi $\nu' = \nu \circ f$. Єдинiсть $f$ одразу випливає з того, що $\nu$ i $\nu'$ домiнантнi.

Нехай тепер $X$ – довiльний незвiдний многовид, $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ – його вiдкрите афiнне покриття. Спершу доведемо *єдинiсть* нормалiзацiї (якщо вона iснує). Дiйсно, нехай $\nu : \widetilde{X} \to X$ i $\nu' : X' \to X$ – двi нормалiзацiї, $\widetilde{X}_i = \nu^{-1}(X_i)$ i $X'_i = \nu'^{-1}(X_i)$. Тодi $\widetilde{X}_i$ i $X'_i$ – нормалiзацiї $X_i$, отже, iснують єдинi iзоморфiзми $f_i : X'_i \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}_i$, такi що $\nu'_{X'_i} = \nu_i|_{\widetilde{X}_i} \circ f_i$. Очевидно, $f_i$ i $f_j$ збiгаються на $X'_i \cap X'_j$, отже, їх можна склеїти в iзоморфiзм $f : X' \to \widetilde{X}$.

Для доведення *існування* позначимо через $\nu_i : \widetilde{X}_i \to X_i$ нормалізацію $X_i$, $\widetilde{X}_{ij} = \nu_i^{-1}(X_i \cap X_j)$. Обмеження, $\nu_{ij}$, $\nu_i$ на $\widetilde{X}_{ij}$ є, очевидно, нормалізацією $X_i \cap X_j$. Внаслідок єдиності нормалізації існує єдиний ізоморфізм $\varphi_{ij} : \widetilde{X}_{ij} \to \widetilde{X}_{ji}$, такий що $\nu_{ij} = \nu_{ji} \circ \varphi_{ij}$. Більш того, для будь-якої трійки індексів $i, j, k$, $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ на прообразі $\varphi_{ij}^{-1}(\widetilde{X}_{jk}) = \nu_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$ (оскільки всі $\nu_{ij}$ сюр'єктивні). Звичайно, також $\widetilde{X}_{ii} = \widetilde{X}_i$ і $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$. Тому, ми можемо вжити наступну "*процедуру склеювання*":

Твердження 3.7.4. *Припустимо, що дано множину просторів з функціями $Z_i$, відкриті підмножини $Z_{ij} \subseteq Z_i$, задані для кожної пари $i, j$, та ізоморфізми $\eta_{ij} : Z_{ij} \xrightarrow{\sim} Z_{ji}$, які задовольняють наступним умовам:*

(1) $Z_{ii} = Z_i$ *і* $\eta_{ii} = \mathrm{id}$ *для кожного* $i$.
(2) *Для кожної трійки індексів* $i, j, k$ $Z_{ij} \cap \eta_{ji}(Z_{jk}) \subseteq Z_{ik}$ *і обмеження* $\eta_{ik}$ *та* $\eta_{jk} \circ \eta_{ij}$ *на цей перетин співпадають.*

*Покладемо* $Z = \bigcup_i Z_i / \sim$, *де* $z \sim z'$ *означає, що* $z \in Z_{ij}$ *і* $z' = \eta_{ij}(z)$ *для деякої пари* $i, j$. *Назвемо підмножину* $U \subseteq Z$ відкритою*, якщо* $U \cap Z_i$ *відкрита для кожного* $Z_i$, *і визначимо* $\mathcal{O}_Z(U)$ *як множину всіх функцій* $f : U \to \mathbf{K}$, *таких що* $f|_{U \cap Z_i} \in \mathcal{O}_{Z_i}(U \cap Z_i)$ *для кожного* $i$. *Тоді:*

(1) $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *– простір з функціями.*
(2) $\mathcal{O}_z^{Z_i} \simeq \mathcal{O}_z^Z$ *для кожного* $z \in Z_i$.
(3) *Якщо кожна* $Z_i$ *є алгебричним многовидом і їхня кількість скінченна, то* $Z$ *також є алгебричним многовидом.*
(4) *Якщо для кожного* $i$ *задано морфізм просторів з функціями* $f_i : Z_i \to X$, *такий що* $f_i|_{Z_{ij}} = f_j \circ \eta_{ij}|_{Z_{ij}}$ *для всіх* $i, j$, *то існує єдиний морфізм* $f : Z \to X$, *такий що* $f|_{Z_i} = f_i$ *для всіх* $i$.

Доведення цього твердження, яке складається з рутинних перевірок, пропонується як вправа.

Застосувавши твердження 3.7.4 до многовидів $\widetilde{X}_i$ й ізоморфізмів $\varphi_{ij}$, ми одержимо алгебричний многовид $\widetilde{X}$, який є нормальним, оскільки всі $\widetilde{X}_i$ є нормальними. Більш того, одержимо морфізм $\nu : \widetilde{X} \to X$, такий що $\nu|_{\widetilde{X}_i} = \nu_i$. Оскільки кожен з $\nu_i$ скінченний, $\nu$ також скінченний. Він є також біраціональним, оскільки кожен $X_i$ щільний в $X$ і $\widetilde{X}_i$ щільний в $\widetilde{X}$. Отже, $\nu : \widetilde{X} \to X$ є нормалізацією. □

Зауважимо, що, внаслідок вправ 3.1.16, нормалізація відокремлюваного многовиду є відокремлюваною, а нормалізація повного многовиду – повною. Насправді, можна довести, що нормалізація проективного (квазіпроективного) многовиду завжди проективна (квазіпроективна). Однак це доведення є досить складним і ми його тут не наводимо. Навпаки, випадок *кривих* набагато простіший і його можна доведіть за допомогою наступної леми, яка має також незалежний інтерес.

Лема 3.7.5 (Лема Чжоу). *Для кожного незвідного многовиду $X$ існує квазіпроективний многовид $X'$ і сюр'єктивний морфізм $f : X' \to X$, який є біраціональним відображенням. Якщо $X$ повний, $X'$ можна вибрати проективним.*

Доведення. Нехай $X = \bigcup_{i=1}^k U_i$ – відкрите афінне покриття $X$, $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$. Оскільки $X$ незвідний, $U$ щільна. Можна занурити кожну $U_i$ у проективний простір. Позначимо через $X_i$ її замикання там; вони є проективними многовидами, отже, їхній добуток $P = \prod_{i=1}^k X_i$ є також проективним. Розглянемо "діагональне" відображення $\varphi : U \to X \times P$: $p \mapsto (p, p, \dots, p)$ і покладемо $X' = \overline{\operatorname{Im}\varphi}$ (замикання). Нехай $f$ і $g$ – обмеження на $X'$, відповідно, проекцій $\mathrm{pr}_X$ і $\mathrm{pr}_P$. Доведемо, що $f$ є біраціональним, а $g$ є зануренням. Це доводить лему. (Зауважимо, що коли $X$ повний, таким є й $X'$; отже, в цьому випадку $\operatorname{Im} g \simeq X'$ є проективним многовидом.)

Нехай $V = f^{-1}(U) = X' \cap (U \times P)$. Оскільки $\operatorname{Im}\varphi$ збігається з графіком діагонального відображення $U \to P$, він замкнений в $U \times P$, отже, $V = X' \cap (U \times P) = \operatorname{Im}\varphi$ і проекція $V \to U$ є ізоморфізмом. Оскільки $U$ і $V$ щільні, відповідно, в $X$ і $X'$, $f$ біраціональне.

Нехай тепер $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_{X_i} : P \to X_i$ і $V_i = \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$. Обмеження $\mathrm{pr}_i \circ g$ на $V = f^{-1}(U)$ збігається з $f|_V : V \to U$. Оскільки $V$ щільна, вони також співпадають на $U_i$, тобто $g^{-1}(V_i) = f^{-1}(U_i)$ і $\bigcup_{i=1}^k g^{-1}(V_i) = X'$. Тому маємо лише показати, що обмеження $g$ на $g^{-1}(V_i)$ є зануренням (оскільки поняття занурення є, очевидно, локальним). Покладемо $P_i = \prod_{j \neq i} X_j$. Тоді $V_i \subseteq U_i \times P_i$ і $g^{-1}(V_i) \subseteq X \times U_i \times P_i$. Більш того, $g^{-1}(V_i)$ збігається з перетином $X'$ з графіком $Z_i$ композиції $U_i \times P_i \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} U_i \to X$ (друга стрілка позначає занурення). Але $Z_i$ замкнена в $X \times U_i \times P_i$ і $\mathrm{pr}_P$ відображає її ізоморфно на $V_i = U_i \times P_i$. Оскільки $g^{-1}(V_i) = X' \cap Z_i$ замкнена в $Z_i$, $g|_{g^{-1}(V_i)}$ є зануренням. □

Наслідок 3.7.6. *Повна нормальна крива проективна. Зокрема, нормалізація повної (наприклад, проективної) кривої є проективною.*

Доведення. Якщо $f : X' \to X$ – біраціональний морфізм, $X'$ проективний і $X$ нормальний, то обернене раціональне відображення $f^{-1} : X \to X'$ є регулярним (див. наслідок 3.4.13), тобто $f$ – ізоморфізм. □

Вправа 3.7.7. Доведіть що для кожного скінченно породженого розширення $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ степеня трансцендентності 1 існує єдина проективна нормальна крива $X$, така що $\mathbf{L} = \mathbf{K}(X)$. Більш того, якщо $\mathbf{L}' \subset \mathbf{K}$ – інше скінченно породжене розширення степеня трансцендентності 1, $\mathbf{L}' \simeq \mathbf{K}(X')$ для нормальної проективної кривої $X'$, то кожний гомоморфізм $\mathbf{L} \to \mathbf{L}'$ індукується єдиним морфізмом $X' \to X$.

(Можна сказати, що *категорія* скінченно породжених розширень $\mathbf{K}$ степеня трансцендентності 1 є *двоїстою* до категорії нормальних проективних кривих. Отже, в деякому розумінні, теорія нормальних проективних кривих є частиною теорії полів.)

Вправа 3.7.8. Нехай $Y$ – нормальний, $X$ – повний многовид і $f : Y \to X$ – раціональне відображення. Доведіть, що $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$ для кожної компоненти $Z$ множини $\operatorname{Irr}(f)$.

Вправа 3.7.9. Нехай $X$ – алгебричний многовид, $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ – його незвідний розклад. Показати, що відображення $\bigsqcup_{i=1}^m X_i \to X$ ($\bigsqcup$ означає *незв'язне об'єднання*), яке є тотожнім на кожному $X_i$, є скінченним і біраціональним. Вивести, що існує скінченне біраціональне відображення $\nu : \bigsqcup_{i=1}^m \widetilde{X}_i \to X$, де $\widetilde{X}_i$ є нормалізацією $X_i$.

Ми ще маємо довести лему 3.7.3. Щоб це зробити, спочатку трохи уточнимо Нормалізаційну лему Нетера.

Лема 3.7.10. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– ціла афінна алгебра,* $\mathbf{Q}$ *– її поле часток. Існує підалгебра* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, *така що:*

(1) $\mathbf{B} \simeq \mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,]$.
(2) $\mathbf{A}$ *ціла над* $\mathbf{B}$.
(3) $\mathbf{Q}$ *сепарабельне над полем часток* $\mathbf{F}$ *кільця* $\mathbf{B}$.

Доведення. Доведення Нормалізаційної леми Нетера потребує лише маленької зміни. Звичайно, треба розглядати лише випадок, коли $\operatorname{char} \mathbf{K} = p > 0$.

Нехай $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\,a_1, \dots, a_n\,]$. Точно так, як і в доведенні Нормалізаційної леми Нетера, знайдемо многочлен $F$, такий що $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Оскільки $\mathbf{A}$ ціла, $F$ можна вибрати незвідним. Тоді існує індекс $i$, такий що $\partial F/\partial x_i \neq 0$ (див. доведення твердження A.4). Можна припустити, що $i = n$. Застосуємо автоморфізм $\mathbf{K}[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]$, як у лемі 1.4.10, але з $t$, яке є кратним $p$. Тоді $\partial(\varphi(F))/\partial x_n = \partial F/\partial x_n \neq 0$. Отже, можна припустити, що $\mathbf{A}$ є цілою над $\mathbf{A}' = \mathbf{K}[\,a_1, \dots, a_{n-1}\,]$ і $\mathbf{Q}$ сепарабельне над кільцем часток $\mathbf{A}'$. Очевидна індукція завершує доведення. $\square$

Тепер лема 3.7.3 є безпосереднім наслідком наступного загального результату.

Твердження 3.7.11. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нормальне нетерове кільце з полем часток* $\mathbf{Q}$ *,* $\mathbf{L}$ *– скінченне сепарабельне розширення* $\mathbf{Q}$ *. Тоді ціле замикання* $\mathbf{B}$ *кільця* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{L}$ *є скінченно породженим* $\mathbf{A}$*-модулем.*

Доведення. Нагадаємо, що розширення $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{Q}$ є сепарабельним тоді й лише тоді, коли білінійна форма $\mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{K}$, $(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}(ab)$, є невиродженною. Нехай $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ – база $\mathbf{L}$ над $\mathbf{Q}$, така що всі $a_i$ цілі над $\mathbf{A}$, $\{ a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^* \}$ – *двоїста база*, тобто така, що $\mathrm{Tr}(a_i a_j^*) = \delta_{ij}$. Якщо елемент $b = \sum_{i=1}^n c_i a_i^* \in \mathbf{L}$ ($c_i \in \mathbf{A}$) цілий над $\mathbf{A}$, такими є й усі добутки $ba_i$. Зокрема, $\mathrm{Tr}(ba_i) = c_i \in \mathbf{A}$ (оскільки $\mathbf{A}$ нормальне; див. лему 3.4.5). Тому $\mathbf{B}$ є підмодулем скінченно породженого $\mathbf{A}$-модуля $\langle a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^* \rangle$, отже, теж є скінченно породженим (див. твердження 1.4.6). $\square$

Розділ 4

# Регулярні та особливі точки

## 4.1. Регулярні кільця та гладкі многовиди

Означення 4.1.1. Нехай $\mathbf{A}$ – локальне нетерове кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$.

(1) Назвемо *розмірністю занурення* кільця $\mathbf{A}$ число твірних $\#_{\mathbf{A}}(\mathfrak{m})$ $\mathfrak{m}$ як $\mathbf{A}$-модуля. Позначимо розмірність занурення $\mathbf{A}$ через $\mathrm{e.dim}\,\mathbf{A}$.

Відповідно до наслідку 3.3.17, $\mathrm{e.dim}\,\mathbf{A} \geqslant \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}$.

(2) Назвемо кільце $\mathbf{A}$ *регулярним*, якщо $\mathrm{e.dim}\,\mathbf{A} = \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}$.

Нагадаємо, що $\mathrm{e.dim}\,\mathbf{A} = \dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, де $\mathbf{K} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$ (див. наслідок 3.3.13).

Означення 4.1.2. Нехай $X$ – алгебричний многовид, $p \in X$.

(1) Назвемо точку $p$ *регулярною* (на $X$), якщо локальне кільце $\mathcal{O}_{X,p}$ регулярне; інакше назвемо цю точку *особливою* (на $X$). Позначимо через $X_{\mathrm{reg}}$ множину всіх регулярних точок, а через $X_{\mathrm{sing}}$ – всіх особливих точок многовиду $X$.

(2) Назвемо многовид $X$ *гладким* (або *регулярним*), якщо всі точки $p \in X$ регулярні; інакше назвемо $X$ *особливим.*

Приклад 4.1.3. Афінний простір $\mathbb{A}^n$ і проективний простір $\mathbb{P}^n$ є гладкими многовидами. Дійсно, $\dim \mathbb{A}^n = n$ і максимальний ідеал кожної точки $\mathbb{A}^n$ в $\mathbf{K}[\,\mathbb{A}^n\,] = \mathbf{K}[\,x_1, \dots, x_n\,]$ має $n$ твірних. Кожна точка $\mathbb{P}^n$ має окіл, ізоморфний $\mathbb{A}^n$.

Відзначимо наступний простий результат.

Твердження 4.1.4. *Розмірність Крулля* $\mathrm{K.dim}\,\mathcal{O}_{X,p}$ *збігається з* $\max \dim X_i$, *де* $X_i$ *пробігає всі компоненти* $X$, *які містять точку* $p$.

Позначимо цей максимум через $\dim_p X$ і назвемо його *розмірністю многовиду* $X$ *в точці* $p$.

Доведення. Очевидно, можна припустити $X$ афінним. Нехай $\mathbf{A}$ – його координатна алгебра, $\mathfrak{m}_p \subset \mathbf{A}$ – максимальний ідеал, який відповідає точці $p$, $\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_{\mathfrak{m}_p} = \mathcal{O}_{X,p}$ (див. твердження 3.3.9). Тоді $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p\mathbf{A}_p$ є максимальним ідеалом $\mathbf{A}_p$ і кожен ланцюжок первинних ідеалів $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_l$ в $\mathbf{A}_p$ відповідає ланцюжку первинних ідеалів $\mathbf{A}$, які містяться в $\mathfrak{m}_p$ (див. наслідок 3.3.8). Але такий ланцюжок збігається з ланцюжком незвідних підмноговидів $X$, що містять $p$, які завжди містяться в деякій незвідній компоненті (остання, звичайно, містить $p$). Отже, дійсно $\mathrm{K}.\dim \mathcal{O}_{X,p} = \max \dim X_i$. $\square$

Надалі позначимо $\mathfrak{m}_{X,p}$ максимальний ідеал локального кільця $\mathcal{O}_{X,p}$ і покладемо $\mathrm{e.}\dim_p X = \mathrm{e.}\dim \mathcal{O}_{X,p}$ (*розмірність занурення* $X$ в точці $p$). Отже, точка $p$ є регулярною на $X$ тоді й лише тоді, коли $\dim_p X = \mathrm{e.}\dim_p X$.

Вправа 4.1.5. Нехай $X$ – нормальний многовид, $Z$ – компонента множини $X_{\mathrm{sing}}$ його особливих точок. Довести, що $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$.
*Вказівка*: Якщо $\operatorname{codim} Z = 1$, можна припустити, що $X$ є афінним і $I(Z)$ є головним в $\mathbf{K}[X]$. Показати, що коли $z$ є регулярною точкою $Z$, вона є також регулярною точкою $X$.

Ми збираємося встановити *критерій* регулярності точки алгебричного многовиду. Оскільки це поняття є локальним, ми розглянемо лише афінний випадок.

Теорема 4.1.6 (Якобієв критерій). *Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид, $I = I(X) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$ і $p \in X$. Точка $p$ є регулярною на $X$ тоді й лише тоді, коли $\mathrm{Jrk}_p(I) = n - \dim_p X$, де $\mathrm{Jrk}_p(I)$ означає ранг матриці $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$).*

Доведення. Щоб спростити позначення, припустимо що $p = (0, \dots, 0)$. Нехай $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X] = \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]/I$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p = \mathfrak{n}/I$, де $\mathfrak{n} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \subset \mathbf{K}[\mathbf{x}]$. Тоді $\mathrm{e.}\dim \mathbf{A} = \dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + I) = \dim_{\mathbf{K}} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 - \dim_{\mathbf{K}}(\mathfrak{n}^2 + I)/\mathfrak{n}^2 = n - \dim_{\mathbf{K}}(\mathfrak{n}^2 + I)/\mathfrak{n}^2$. Остання розмірність, очевидно, дорівнює числу лінійно незалежних форм серед $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)}$, де $F_i^{(1)}$ означає лінійну частину $F_i$, яка дорівнює $\sum_{j=1}^n x_j \partial F_i/\partial x_j(p)$. Звідси випливає твердження теореми. $\square$

Вправа 4.1.7 (Проективний якобієв критерій). Нехай $X \subset \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, $I(X) = \langle F_1, F_2, \dots, F_m \rangle$. Довести, що точка $p \in X$ є регулярною тоді й лише тоді, коли $\mathrm{rk}(\partial F_i/\partial x_j)(p) = n - \dim_p X$.
*Вказівка*: Розглянути канонічне афінне покриття. Використати якобієв критерій для афінних многовидів і формулу Ойлера: якщо $F$ є однорідним многочленом степеня $d$, то $\sum_{j=0}^n \partial F/\partial x_j = dF$,

Наслідок 4.1.8. *Якщо $X$ – незвідний многовид, $X_{\mathrm{reg}}$ є відкритою щільною підмножиною в $X$.*[1]

Доведення. Знову вважаємо $X$ афінним. З теореми 4.1.6, очевидно, випливає, що $X_{\mathrm{reg}}$ відкрита, отже, треба лише показати, що

[1] Пізніше ми побачимо, що це є вірним і для *довільних* многовидів.

вона непорожня. Відповідно до твердження 2.5.4, $X$ біраціонально еквівалентний або $\mathbb{A}^n$, або гіперповерхні в $\mathbb{A}^{n+1}$, де $n = \dim X$. Оскільки $\mathbb{A}^n$ гладкий, треба лише довести, що $X_{\text{reg}} \neq \emptyset$, коли $X = V(F) \subset \mathbb{A}^{n+1}$, де $F$ – незвідний многочлен. Але $\partial F/\partial x_i \neq 0$ для деякого $i$ (див. доведення твердження A.4), отже, $\partial F/\partial x_i \notin \langle F \rangle$ (оскільки він меншого степеня). Тому існує точка $p \in X$, така що $\partial F/\partial x_i(p) \neq 0$. За теоремою 4.1.6, ця точка є регулярною. □

## 4.2. Структура регулярних локальних кілець

Теорема 4.2.1 (Теорема Артіна-Ріса). *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нетерове кільце,* $M$ *– скінченно породжений* $\mathbf{A}$*-модуль,* $I$ *– ідеал в* $\mathbf{A}$ *і* $N$ *– підмодуль в* $M$. *Існує ціле* $k \geqslant 0$, *таке що* $I^{n+k}M \cap N = I^n(I^k \cap N)$ *для всіх цілих* $n \geqslant 0$.

Доведення. Нехай $\mathbf{B} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n$. Оскільки $I^n I^m \subseteq I^{n+m}$, $\mathbf{B}$ можна розглядати як кільце. Щоб уточнити "місце" елемента $b \in I^n$ в цьому кільці, ми часто позначатимемо його $b(n)$. Якщо $\{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$ – множина твірних ідеала $I$, елементи $a_1(1), \dots, a_m(1)$ породжують $\mathbf{B}$ як $\mathbf{A}$-алгебру. Тому $\mathbf{B}$ ізоморфне фактор-алгебрі $\mathbf{A}[x_1, \dots, x_m]$, отже, є нетеровим (за Теоремою Гільберта про базу). В той самий спосіб, покладаючи $\mathbf{M} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n M$, одержуємо скінченно породжений $\mathbf{B}$-модуль. За твердженням 1.4.6, він є також нетеровим. Тому його підмодуль $\mathbf{N} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n M \cap N$ скінченно породжений. Нехай $\{ u_1(k_1), u_2(k_2), \dots, u_r(k_r) \}$ – його твірна множина, $k = \max k_i$. Тоді для кожного $n \geqslant 0$ і кожного елемента $v \in I^{k+n}M \cap N$ існують елементи $b_i \in I^{k+n-k_i}$, такі що $v = \sum_{i=1}^{r} b_i u_i$, звідки $v \in I^n(I^k M \cap n)$. □

Наслідок 4.2.2. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– нетерове кільце,* $M$ *– скінченно породженний* $\mathbf{A}$*-модуль і* $I$ *– ідеал* $\mathbf{A}$, *такий що* $\operatorname{Ann}_M(1+a) = \{ 0 \}$ *для кожного* $a \in I$. *Тоді* $\bigcap_{i=1}^{n} I^n M = \{ 0 \}$.

Доведення. Покладемо $N = \bigcap_{i=1}^{n} I^n M$. За теоремою Артіна-Ріса, існує $k$, таке що $N = I^{k+1}M \cap N = I(I^k M \cap N) = IN$. Нехай $N = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$. Тоді, для кожного $j$, $u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ з $a_{ij} \in I$. Звичайні (і вже багато разів застосовані) аргументи показують, що $\det(E - (a_{ij}))u_i = 0$ для всіх $i$. Оскільки цей визначник має вигляд $1 + a$ з $a \in I$, $u_i = 0$ і $N = \{ 0 \}$. □

Цей наслідок, очевидно, застосовний, коли $\mathbf{A} = M$ – локальне нетерове кільце, а $I = \mathfrak{m}$ його максимальний ідеал.

Наслідок 4.2.3. *Якщо* $\mathbf{A}$ *– локальне нетерове кільце з максимальним ідеалом* $\mathbf{m}$, *то* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \{ 0 \}$.

Наслідок 4.2.4. *У ситуації наслідку 4.2.3* $N = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\mathfrak{m}^k M + N)$ *для кожного скінченно породженного* $\mathbf{A}$*-модуля* $M$ *і його підмодуля* $N$.

Доведення. Досить застосувати наслідок 4.2.2 до фактор-модуля $M/N$. $\square$

Нехай тепер $\mathbf{A}$ – локальне нетерове кільце, $\mathfrak{m}$ – його максимальний ідеал, $\mathbf{K} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$ і $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – мінімальна множина твірних $\mathfrak{m}$ (отже, $n = \mathrm{e.dim}\,\mathbf{A} \geqslant \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A}$). Для кожного класу $\lambda \in \mathbf{K}$ зафіксуємо його прообраз $\hat{\lambda}$ в $\mathbf{A}$. Зокрема, припустимо, що $\hat{0} = 0$ і $\hat{1} = 1$. Розглянемо деякий формальний степеневий ряд $F \in \mathbf{K}[[x_1, \dots, x_n]]$:

$$F = \sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \lambda_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Будемо писати $a \equiv \hat{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}^k}$, якщо $a \equiv \sum_{|\mathbf{k}|<k} \hat{\lambda}_{\mathbf{k}} \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \pmod{\mathfrak{m}^k}$. (Ми пишемо $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$ і $\mathbf{t}^{\mathbf{k}} = t_1^{k_1} \dots t_n^{k_n}$.)

Твердження 4.2.5. *Для кожного елемента $a \in \mathbf{A}$ існує степеневий ряд $F \in \mathbf{K}[[x_1, \dots, x_n]]$, такий що для кожного $k$ $a \equiv \hat{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}^k}$. Більш того, якщо $a \neq 0$, також і $F \neq 0$.*

Назвемо степеневий ряд $F$ з цими властивостями *рядом Тейлора* елемента $a$ і писатимемо $a \equiv F$.

Доведення. Побудуємо $F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, де $F_k$ – форма степеня $k$, використовуючи індукцію за $k$. Зауважимо, що порівняння $a \equiv \hat{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{\mathfrak{m}^k}$ залежить лише від $F_0, F_1, \dots, F_{k-1}$. Покладемо $F_0 = a + \mathfrak{m} \in \mathbf{K}$. Припустимо, що $F_0, F_1, \dots, F_{k-1}$ вже побудовані. Тоді елемент $b = a - \sum_{d=1}^{k-1} \hat{F}_d(t_1, t_2, \dots, t_n)$ належить до $\mathfrak{m}^k$, отже, $b = \sum_{|\mathbf{k}|=k} b_{\mathbf{k}} \mathbf{t}^{\mathbf{k}}$ і можна покласти $F_k = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \lambda_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$, де $\lambda_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}} + \mathfrak{m}$.

Якщо $a \equiv 0$, то $a \in \mathfrak{m}^k$ для кожного $k$, отже, $a = 0$ за наслідком 4.2.3. $\square$

Звичайно, не можна гарантувати *єдиність* ряда Тейлора. Дійсно, нехай $A = \mathcal{O}_{X,p}$, де $X = V(x^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^2$ і $p = (0,0)$. Тоді $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$. (Зауважимо, що $p$ є особливою точкою $X$, отже, $\mathrm{e.dim}\,\mathbf{A} > \mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = 1$.) Отже, $0$ і $x^2 - y^3$ – два різні ряди Тейлора нульової функції. Ми побачимо, що причиною цього явища є саме особливість точки $p$.

Теорема 4.2.6. *Нехай $\mathbf{A}$ – локальне нетерове кільце, $\mathfrak{m} = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ – його максимальний ідеал ($n = \mathrm{e.dim}\,\mathbf{A}$). Наступні умови еквівалентні:*

(1) *$\mathbf{A}$ є регулярним (тобто $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = n$).*
(2) *Для кожного елемента $a \in \mathbf{A}$ ряд Тейлора єдиний.*

(3) *Для кожного* $i = 1, \ldots, n$ *клас елемента* $t_i$ *не є дільником нуля в* $\mathbf{A}/\langle\, t_1, \ldots, t_{i-1}\,\rangle$ .(Для $i = 1$ це означає, що $t_1$ не є дільником нуля в $\mathbf{A}$ .)

Доведення. *1⇒2* будемо доводити лише для випадку *нескінченного поля лишків* $\mathbf{K}$ . (Зауважимо, що для "геометричних" кілець $\mathcal{O}_{X,p}$ це завжди так. Відносно скінченних полів лишків див. вправу 4.2.10.) Звичайно, досить довести, що коли $0 \equiv F$ , то $F = 0$ . Припустимо, що $F \neq 0$ і $k$ – найменше ціле, таке що в $F$ існують члени степеня $k$ . Нехай $F_k$ – сума всіх цих членів. Оскільки $\mathbf{K}$ нескінченне, існує точка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbf{K}}$ , така що $F_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$ . Лінійна заміна змінних переводить цю точку в $(0, \ldots, 0, 1)$ . Така заміна відповідає вибору іншої мінімальної множини твірних $\mathfrak{m}$ . Отже, можна припустити, що $F_k(0, \ldots, 0, 1) \neq 0$ , тобто $F_k = \lambda x_n^k + F'$ , де $\lambda \neq 0$ і кожен член з $F'$ містить деякі $x_i$ з $i < n$ . Оскільки $0 \equiv F$ , це дає, що $\hat{\lambda} t_n^k + \sum_{i=1}^{n-1} b_i t_i \in \mathfrak{m}^{k+1}$ для деяких $b_i \in \mathbf{A}$ , де $\hat{\lambda} \notin \mathfrak{m}$ . Тому $\hat{\lambda} t_n^k = c t_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i t_i$ для деяких $c_i \in \mathbf{A}$ . Але $\hat{\lambda} - c t_n \notin \mathfrak{m}$ , отже, він є обертовним і $t_n^k \in \langle\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\,\rangle$ . Звідси маємо, що $\mathfrak{m}^k \subseteq \langle\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\,\rangle$ , а тому $\mathfrak{m} = \sqrt{\langle\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\,\rangle}$ і $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leqslant n - 1$ за наслідком 3.3.17, що протирічить припущенню $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = n$ .

*2⇒3.* Припустимо, що $a \notin I = \langle\, t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}\,\rangle$ . Тоді, за наслідком 4.2.4, $a \notin I + \mathfrak{m}^k$ для деякого $k$ . Розглянемо ряд Тейлора $F$ елемента $a$ . Серед його членів степенів, менших за $k$ , принаймні один не містить жодної змінної $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ . Але, очевидно, ряд Тейлора $t_i a$ – це $x_i F$ , звідки $t_i a \notin I$ (навіть $t_i a \notin I + \mathfrak{m}^{k+1}$ ).

*3⇒1* будемо доводити індукцією за $n = \mathrm{e.dim}\,\mathbf{A}$ . Якщо $n = 1$ , то $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = 1$ за Теоремою Крулля про головний ідеал (оскільки $t_1$ не є дільником нуля). Отже, $\mathbf{A}$ регулярне. Припустимо, що наше твердження вірне для $n - 1$ . Розглянемо кільце $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\langle\, t_1\,\rangle$ . Позначимо через $\overline{a}$ клас $a$ в $\overline{\mathbf{A}}$ . Максимальний ідеал $\overline{\mathbf{A}}$ породжується $\overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_n$ і клас $\overline{t}_i$ в $\overline{\mathbf{A}}/\langle\, \overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_{i-1}\,\rangle$ не є дільником нуля для всіх $i = 2, \ldots, n$ . За індуктивним припущенням, $\mathrm{K.dim}\,\overline{\mathbf{A}} = n - 1$ . Оскільки $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1$ для кожного мінімального первинного ідеала $\mathfrak{p}$ , що містить $t_1$ (за Теоремою Крулля про головний ідеал), $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} \geqslant \mathrm{K.dim}\,\overline{\mathbf{A}} + 1 = n$ . Оскільки завжди $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathrm{e.dim}\,\mathbf{A}$ , це доводить, що $\mathrm{K.dim}\,\mathbf{A} = n$ . □

Наслідок 4.2.7. *Будь-яке регулярне локальне кільце є* редукованим *(тобто не містить дільників нуля). Більш того, якщо* $a \in \mathfrak{m}^k \setminus \mathfrak{m}^{k+1}$ *і* $b \in \mathfrak{m}^l \setminus \mathfrak{m}^{l+1}$ *, то* $ab \in \mathfrak{m}^{k+l} \setminus \mathfrak{m}^{k+l+1}$ .

(Зауважимо, що, за наслідком 4.2.3, такі числа $k$ і $l$ завжди існують для ненульових $a$ і $b$ .)

Доведення. Нехай $a \equiv F$ , $b \equiv G$ і $a \neq 0, b \neq 0$ . Оскільки ряд Тейлора єдиний і $a \in \mathfrak{m}^k \setminus \mathfrak{m}^{k+1}$ , $F$ містить члени степеня $k$ і не містить членів меньших степенів. Відповідно, $G$ містить члени степеня $l$ і не містить членів меньших степенів. Тоді $ab \equiv FG \pmod{\mathfrak{m}}^{k+l+1}$ і $FG$ містить члени степеня $k+l$. З єдиності ряда Тейлора випливає, що $ab \notin \mathfrak{m}^{k+l}$. $\square$

Наслідок 4.2.8. *Нехай* $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ *– мінімальна множина твірних максимального ідеала регулярного локального кільця* $\mathbf{A}$. *Тоді для кожного* $k = 1, \dots, n$ *фактор-кільце* $\mathbf{A}/\langle t_1, t_2, \dots, t_k \rangle$ *є регулярним локальним кільцем розмірності Круля* $n-k$.

Якщо $p$ – точка алгебричного многовида $X$, то $\mathcal{O}_{X,p}$ редуковане тоді й лише тоді, коли $p$ належить лише до однієї компоненти: інакше можна вибрати дві функції $f_1$ і $f_2$ такі, що $f_1|_Y \neq 0$, $f_1|_Z = 0$, $f_2|_Y = 0$, $f_2|_Z \neq 0$, де $Y$ – одна з компонент, $Z$ – об'єднання всіх інших компонент, які містять $p$, звідки $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ в $\mathcal{O}_{X,p}$, але $f_1 f_2 = 0$.

Наслідок 4.2.9.
(1) *Якщо точка* $p \in X$ *регулярна, вона належить лише одній компоненті* $X$.
(2) $X_{\mathrm{reg}}$ *– відкрита щільна підмножина* $X$.

Доведення. *1* тепер очевидне. Нехай $X = \bigcup_i X_i$ – незвідний розклад, $Y = \bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$, $U = X \setminus Y$. Тоді $X_{\mathrm{reg}} \subseteq U$ і $U$ є відкритим щільним в $X$. Більш того, $U$ є незв'язним об'єднанням своїх компонент $X_i \setminus Y$, отже, *2* витікає з наслідку 4.1.8. $\square$

Вправа 4.2.10 ("Нерозгалужені розширення"). Нехай $\mathbf{A}$ – локальне нетерове кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і полем лишків $\mathbf{K} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$, $f(x) \in \mathbf{A}[x]$ – унітальний многочлен, такий що його образ $\overline{f}(x)$ у $\mathbf{K}[x]$ є незвідним. Покладемо $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]/\langle f(x) \rangle$, $\xi = x + \langle f(x) \rangle \in \mathbf{B}$. Довести, що:

(1) Кожен елемент $\mathbf{B}$ може бути представлений єдиним способом у вигляді $a_1\xi^{k-1} + a_2\xi^{k-2} + \dots + a_k$, де $k = \deg f$, $a_i \in \mathbf{A}$; цей елемент є обертовним в $\mathbf{B}$ тоді й лише тоді, коли $a_i \notin \mathfrak{m}$ для деякого $i$.
(2) $\mathbf{B}$ – локальне кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}\mathbf{B}$ і полем лишків $\mathbf{K}' \simeq \mathbf{K}[x]/\langle \overline{f}(x) \rangle$.
(3) Якщо $\mathbf{A}$ регулярне, таким є й $\mathbf{B}$. (Зауважимо, що $\mathbf{B}$ є скінченним розширенням $\mathbf{A}$.)

## 4.3. Дотичний простір

У цьому розділі $\mathbf{A}$ позначатиме локальне нетерове кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і полем лишків $\mathbf{K} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$.

Означення 4.3.1.
(1) $\mathbf{K}$-векторний простір $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ зветься *кодотичним простором* кільця $\mathbf{A}$ і позначається $\Theta^*_{\mathbf{A}}$. Дуальний до нього $\Theta_{\mathbf{A}} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\Theta^*_{\mathbf{A}}, \mathbf{K})$ зветься *дотичним простором* до $\mathbf{A}$.

(2) Якщо $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$, де $p$ – точка алгебричного многовиду $X$, простори $\Theta_{\mathbf{A}}$ і $\Theta^*_{\mathbf{A}}$ звуться, відповідно, *дотичним* і *кодотичним просторами* до многовиду $X$ в точці $p$ і позначаються, відповідно, $\Theta_{X,p}$ та $\Theta^*_{X,p}$.

Нехай $\mathbf{B}$ – інше локальне нетерове кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{n}$. Гомоморфізм (кілець) $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ зветься *локальним*, якщо $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$. У цьому випадку $\varphi$ породжує гомоморфізм полів $\overline{\varphi} : \mathbf{K} \to \mathbf{L} = \mathbf{B}/\mathfrak{n}$ та гомоморфізм $d^*\varphi : \Theta^*_{\mathbf{A}} \to \Theta^*_{\mathbf{B}}$. Якщо, крім того, $\overline{\varphi}$ є ізоморфізмом, він також породжує гомоморфізм дуальних просторів $d\varphi : \Theta_{\mathbf{B}} \to \Theta_{\mathbf{A}}$. Останній випадок завжди має місце, коли $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$, $\mathbf{B} = \mathcal{O}_{Y,q}$, а $\varphi = f^*_q$ індукований морфізмом $f : Y \to X$, який відображає $q$ в $p$. У цьому випадку $d^*\varphi$ і $d\varphi$ позначають, відповідно, $d^*_q f$ і $d_q f$ і звуть, відповідно, *кодотичним* і *дотичним відображеннями* морфізма $f$ в точці $q$.

Приклади 4.3.2. (1) Нехай $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ – первинний ідеал $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ і $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ – природний гомоморфізм, який відображає $a$ в $a/1$. Він *не є локальним*: якщо $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$, то $\varphi(a) = a/1 \notin \mathfrak{p}\mathbf{B}$ (який є максимальним ідеалом $\mathbf{B}$).

(2) З іншого боку, якщо $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ є сюр'єктивним, то $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}/I$ для $I = \operatorname{Ker}\varphi$ і $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{m}/I = \varphi(\mathfrak{m})$. Отже, $\varphi$ завжди є локальним і $\Theta^*_{\mathbf{B}} = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \simeq \mathfrak{m}/(I + \mathfrak{m}^2) \simeq \Theta^*_{\mathbf{A}}/\mathfrak{I}$, де $\mathfrak{I} = (I + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2 \subseteq \Theta^*_{\mathbf{A}}$. Тому $d\varphi^*$ сюр'єктивне, а його дуальне $d\varphi : \Theta_{\mathbf{B}} \to \Theta_{\mathbf{A}}$ є зануренням. (Зауважимо, що в цьому випадку завжди $\mathbf{B}/\mathfrak{n} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{m}$.) Точніше, $d\varphi$ породжує ізоморфізм $\Theta_{\mathbf{B}}$ на підпростір $\{\, v \mid \omega(v) = 0 \text{ для всіх } \omega \in \mathfrak{I} \,\}$ простору $\Theta_{\mathbf{A}}$.

Дамо іншу інтерпретацію дотичного простору у випадку, коли $\mathbf{A}$ містить *підполе представників* $\mathbf{K}$, тобто підполе $\mathbf{K}'$, таке що $\{\, \lambda + \mathfrak{m} \mid \lambda \in \mathbf{K}' \,\}$ вичерпує всі класи лишків з $\mathbf{K}$. Ототожнимо $\mathbf{K}$ з $\mathbf{K}'$, ототожнюючи $\lambda + \mathfrak{m}$ з $\lambda$. Тоді $\mathbf{A} = \mathbf{K} \oplus \mathfrak{m}$, отже, кожен елемент $a \in \mathbf{A}$ може бути записаний єдиним способом у вигляді $a = a(0) + a'$ з $a(0) \in \mathbf{K}$ і $a' \in \mathfrak{m}$. Позначимо через $da$ клас $a' = a - a(0)$ у $\Theta^*_{\mathbf{A}}$. Можна легко перевірити наступні властивості відображення $d : \mathbf{A} \to \Theta^*_{\mathbf{A}}$.

Твердження 4.3.3. (1) $d(a + b) = da + db$*;*

(2) $d(\lambda a) = \lambda da$ *для кожного* $\lambda \in \mathbf{K}$*;*

(3) $d(ab) = adb + bda$.

Таке відображення називають *дерівацією* кільця $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}$-модуль $\Theta^*_{\mathbf{A}}$. Зауважимо, що $a\omega = a(0)\omega$ для всіх $\omega \in \Theta^*_{\mathbf{A}}$.

Наслідок 4.3.4. *У розглянутій ситуації існує взаємно однозначна відповідність між* $\Theta_{\mathbf{A}}$ *та векторним простором всіх дерівацій* $\operatorname{Der}(\mathbf{A}, \mathbf{K})$*, яке відображає* $v \in \Theta_{\mathbf{A}}$ *у дерівацію* $D_v : a \mapsto v(da)$.

Доведення. Оскільки $d : \mathbf{A} \to \Theta_{\mathbf{A}}^*$ – дерівація, а $v : \Theta_{\mathbf{A}}^* \to \mathbf{K}$ – лінійне відображення, $D_v$ є дерівацією. Навпаки, нехай $D : \mathbf{A} \to \mathbf{K}$ – дерівація. Тоді $D1 = D(1 \cdot 1) = D1 + D1$, звідки $D1 = 0$ і $D\lambda = \lambda D1 = 0$ для всіх $\lambda \in \mathbf{K}$. Отже, $D$ повністю визначається своїми значеннями на $\mathfrak{m}$. З іншого боку, якщо $a, b \in \mathfrak{m}$, то $D(ab) = aDb + bDa = 0$, оскільки й $a(0) = b(0) = 0$. Отже, $v = D|_{\mathfrak{m}}$ дійсно є відображенням $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathbf{K}$, тобто елементом $\Theta_{\mathbf{A}}$. Очевидно, $D = D_v$. □

Надалі будемо ототожнювати елементи $\Theta_{\mathbf{A}}$ з відповідними деріваціями $\mathbf{A} \to \mathbf{K}$; зокрема, писатимемо $v(a)$ замість $D_v a$ і т.ін.

Якщо $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$ для точки $p$ многовиду $X$, ми звичайно пишемо $d_p a$, або навіть $d_{X,p} a$ замість $da$, де $a \in \mathbf{A}$, тому що ми часто розглядаємо $p$ як точку деякого підмноговиду $X$ або $a$ як елемент іншого локального кільця $\mathcal{O}_{X,q}$ .

Використаємо приклад 4.3.2(2), щоб описати дотичний (і кодотичний) простори до алгебричного многовиду $X$. Звичайно, оскільки нас цікавить лише окіл точки $p$, можна припустити $X$ афінним: $X = V(F_1, F_2, \dots, F_r) \subseteq \mathbb{A}^n$. Ми завжди вважатимемо, що $I(X) = \langle\, F_1, F_2, \dots, F_r \,\rangle$. Спочатку уточнимо випадок самого афінного простору.

Твердження 4.3.5. *Для будь-якої точки $p = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n$, $\{\, d_p x_1, d_p x_2, \dots, d_p x_n \,\}$ є базисом $\Theta^*_{\mathbb{A}^n,p}$. Якщо $\{\, D_1, D_2, \dots, D_n \,\}$ – дуальний базис $\Theta_{\mathbb{A}^n,p}$, то $D_i F = \partial F/\partial x_i(p)$ для кожного $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$.*

(Зауважимо, що елементи з $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ можна ототожнювати з раціональними функціями $F \in \mathbf{K}(\, x_1, \dots, x_n \,)$, які визначені в $p$, тобто такими, що знаменник $F$ є ненульовим в точці $p$.)

Доведення. Ідеал $\mathfrak{m}_p \in \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$ породжений елементами $x_1 - \lambda_1, \dots, x_n - \lambda_n$. Отже, максимальний ідеал $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ породжується тими ж елементами. Більш того, це *мінімальна* система твірних, оскільки $\mathrm{e.dim}_p\, \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$. Отже, їхні класи в $\Theta^*_{\mathbb{A}^n,p}$, які збігаються з $d_p x_i$, складають базис кодотичного простору. Нехай $\{\, D_1, D_2, \dots, D_n \,\}$ – дуальний базис дотичного простору. Це означає, що $D_i(d_p x_j) = \delta_{ij}$ для всіх $i, j$. Будь-яка раціональна функція $F$, визначена в $p$, може бути записана як $F(0) + \sum_j \xi_j (x_j - \lambda_i) + F'$, де $F' \in \mathfrak{m}^2$. Більш того, $\xi_j = \partial F/\partial x_j(p)$. Тоді $D_i F = D_i(\sum_j \xi_j d_p x_j) = \xi_i = \partial F/\partial x_i(p)$. □

Надалі, ми часто позначатимемо дерівацію $D_i$ через $\partial/\partial x_i$, або $\partial/\partial x_i(p)$, якщо треба уточнити точку $p$.

Нехай тепер $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – афінний многовид, $I(X) = \langle\, F_1, F_2, \dots, F_r \,\rangle \in \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$. Тоді $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_n,p}/\langle\, F_1, F_2, \dots, F_r \,\rangle$ (тут це означає твірні $\mathcal{O}_{X,p}$-ідеала) і $\Theta^*_{X,p} = \Theta^*_{\mathbb{A}^n,p}/\langle\, d_p F_1, d_p F_2, \dots, d_p F_r \,\rangle$. Отже, $\Theta_{X,p}$ збігається з підпростором $\{\, D \mid DF_i = 0,\ i = 1, \dots, r \,\}$ в $\Theta_{\mathbb{A}^n,p}$.

Іншими словами, $D = \sum_j \xi_j \partial/\partial x_j$ належить до $\Theta_{X,p}$ тоді й лише тоді, коли $\sum_j \xi_j \partial F_i/\partial x_j(p) = 0$ для всіх $i = 1, \dots, r$.

Розглянемо тепер морфізм $G : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, заданий правилом $p \mapsto (G_1(p), \dots, G_m(p))$, де $G_i$ – деякі многочлени. Нехай $p \in \mathbb{A}^n$ і $q = G(p) \in \mathbb{A}^m$. Тоді, для будь-якої функції $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m,q}$, $G^*(F) = F(G_1, G_2, \dots, G_m)$. Тому,

$$d_pG(\partial/\partial x_j)(F) = \partial(G^*(F))/\partial x_j(p) = \sum_{i=1}^m \partial G_i/\partial x_j(p) \cdot \partial F/\partial y_i(q),$$

отже, лінійне відображення $d_p$ у "стандартних" базисах $\Theta_{\mathbb{A}^n,p}$ і $\Theta_{\mathbb{A}^m,q}$ задається значенням матриці Якобі $\partial G/\partial x(p) = (\partial G_i/\partial x_j(p))$.

Якщо $X \subseteq \mathbb{A}^n$ і $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ – афінні многовиди, а $g$ – це морфізм $X$ у $Y$, він насправді є обмеженням на $X$ деякого морфізму $G : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Звичайно, відображення $d_pg$ є також обмеженням на $\Theta_{X,p}$ дотичного відображення $d_pG$, тобто воно визначається тою ж самою матрицею Якобі. Треба лише пам'ятати, що $\Theta_{X,p}$ складається тільки з *деяких* лінійних комбінацій $\sum_j \xi_j \partial/\partial x_j$ (див. вище). Умова $G(X) \subseteq Y$ гарантує, що коли така лінійна комбінація належить до $\Theta_{X,p}$, її образ при $d_pG$ належить до $\Theta_{Y,q}$.

Вправа 4.3.6 (Дотичний конус). Нехай $X$ – алгебричний многовид, $p \in X$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{X,p}$ (максимальний ідеал локального кільця $\mathcal{O}_{X,p}$) і $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ – множина твірних ідеала $\mathfrak{m}$. Позначимо через $S_d$ множину всіх однорідних многочленів $F \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ степеня $d$, таких що $F(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathfrak{m}^{d+1}$, і $S = \bigcup_{d=1}^{\infty} S_d$. Афінний многовид $T_{X,p} = V(S) \subseteq \mathbb{A}^n$ зветься *дотичним конусом* $X$ в точці $p$. (Оскільки всі многочлени з $S$ однорідні, це дійсно конус.) Довести, що:

(1) Інший вибір породжуючої множини $\mathfrak{m}$ приводить до ізоморфного многовиду $T_{X,p}$.
(2) Якщо $X \subset \mathbb{A}^n$ афінний многовид, $I = I(X)$, $p = (0, \dots, 0)$, то $T_{X,p} = V(F^{(0)} \mid F \in I)$, де $F^{(0)}$ позначає "молодшу форму" многочлена $F$, тобто якщо $F = \sum_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$ і $d = \min\{ |\mathbf{k}| \mid \lambda_{\mathbf{k}} \neq 0 \}$, то $F^{(0)} = \sum_{|\mathbf{k}|=d} \lambda_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$. Зокрема, коли $X$ є гіперповерхнею, тобто $I(X) = \langle F \rangle$, то $T_{X,p} = V(F^{(0)})$.
(3) Морфізм $f : X \to Y$ породжує морфізм $T_f : T_{X,p} \to T_{Y,f(p)}$, і якщо $f$ є ізоморфізмом, таким є й $T_f$.

Як виглядає $T_{X,p}$, коли $p$ є регулярною точкою?

Вправи 4.3.7. (1) Нехай $X$ – одна з наступних плоских кривих:
(a) $y^2 = x^3 + x^2$;
(b) $y^2 = x^3 + y^3$;
(c) $x^2y + xy^2 = x^4$.

Перевірити, що всі їхні точки, за винятком $0$, регулярні. Знайти дотичні конуси цих кривих в $0$. Накреслити відповідні криві (точніше, їхні множини дійсних точок) разом з їхніми дотичними конусами в околі $0$.

(2) Нехай $X$ – просторова поверхня: $y^2 = x^2 z$.
   (a) Знайти множину $X_{\mathrm{sing}}$.
   (b) Для кожного $p \in X_{\mathrm{sing}}$ знайти дотичний конус $T_{X,p}$.
   (c) Накреслити $X$ в околі $0$.

## 4.4. Роздуття

Ми збираємося розглянути процедуру , яка часто дозволяє "виправляти" особливості алгебричного многовиду. Надалі нехай $p$ – точка алгебричного многовиду $X$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{X,p}$ – максимальний ідеал локального кільця $\mathcal{O}_{X,p}$, і $\{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$ – множина твірних $\mathfrak{m}$. Елементи $t_1, t_2, \dots, t_n$ є регулярними функціями в околі $U$ точки $p$. Більш того, зменшуючи $U$, можна припустити, що $U$ є афінним і максимальний ідеал $\{ f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(p) = 0 \}$ породжується елементами $t_1, t_2, \dots, t_n$, тобто, якщо $p' \in U, p' \neq p$, щонайменше одне з значень $t_i(p')$ є ненульовим.

Покладемо $U' = U \setminus \{ p \}$ і розглянемо наступну підмножину $\widetilde{U}' \subseteq U \times \mathbb{P}^{n-1}$:

$$\widetilde{U}' = \{ p' \times (y_1 : \cdots : y_n) \mid p' \neq p \text{ і } t_i(p')y_j = t_j(p')y_i \\ \text{для всіх } i, j = 1, \dots, n \}$$

(тут і надалі через $y_1, y_2, \dots, y_n$ позначено однорідні координати в $\mathbb{P}^{n-1}$). Очевидно, $\widetilde{U}'$ замкнена в $U' \times \mathbb{P}^{n-1}$ і проекція $\mathrm{pr}_U$ породжує ізоморфізм $\widetilde{U}' \xrightarrow{\sim} U'$, оберненим до якого є відображення $p' \mapsto p' \times (t_1(p') : \cdots : t_n(p'))$. Покладемо $\widetilde{U} = \overline{\widetilde{U}'}$ (замикання $\widetilde{U}'$ в $U \times \mathbb{P}^{n-1}$). Тоді $\widetilde{U}'$ відкрита й щільна в $\widetilde{U}$. Проекція $\mathrm{pr}_U$ визначає сюр'єктивний морфізм $\sigma : \widetilde{U} \to U$. Покладемо $E = \sigma^{-1}(p)$. Це замкнений підмноговид у проективному просторі $\mathbb{P}^{n-1} \simeq p \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Оскільки $\widetilde{U}' \simeq U'$, можна склеїти $X \setminus \{ p \}$ з $\widetilde{U}$, використовуючи цей ізоморфізм і твердження 3.7.4. Сюр'єкцію $\sigma$ може також продовжити на $\widetilde{X}$, і її обмеження на $\widetilde{X} \setminus E$ є ізоморфізмом $\widetilde{X} \setminus E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{ p \}$. Морфізм $\sigma : \widetilde{X} \to X$ звуть *роздуттям* многовида $X$ в точці $p$. Іноді й сам многовид $\widetilde{X}$ зветься роздуттям $X$ в $p$. Оскільки $\widetilde{X} \setminus E$ відкрита й щільна в $\widetilde{X}$, $\sigma$ є біраціональним відображенням з $\mathrm{Dom}(\sigma^{-1}) \supseteq X \setminus \{ p \}$. Більш того, $\sigma$ є *замкненим* відображенням: це так на $\widetilde{U}$, оскільки $\mathbb{P}^{n-1}$ повний, і на $\widetilde{X} \setminus E$, оскільки там це ізоморфізм. Звичайно, ані $\widetilde{X}$, ані $\sigma$ не залежать від вибору околу $U$. Зокрема, можна завжди зменшити $U$ (це буває зручно, і ми часто користуємося цим зауваженням).

Підмноговид $E \subset \widetilde{X}$ зветься *виключним підмноговидом* або *виключним шаром* роздуття. Корисно зауважити, що його можна задати локально одним рівнянням. Дійсно, розглянемо перетин $\widetilde{U}_i = \widetilde{U} \cap U \times \mathbb{A}^{n-1}_i$, де, як завжди, $\mathbb{A}^{n-1}_i \subset \mathbb{P}^{n-1}$ задається умовою $y_i \neq 0$. Афінними координатами на $\mathbb{A}^{n-1}_i$ є $z_j = y_j/y_i$ ($j = 1, \dots, n,\ j \neq i$). Рівняннями $\widetilde{U}'$ в цих координатах є $t_j = z_j t_i$, отже, $E \cap \widetilde{U}_i$ визначається (всередині $\widetilde{U}_i$) єдиним рівнянням $t_i = 0$.

Вправи 4.4.1. Нехай $\sigma : \widetilde{X} \to X$ – роздуття в точці $p$. Довести, що:

(1) Якщо $X$ є повним, $\widetilde{X}$ також є повним.
(2) Якщо $X$ є проективним, $\widetilde{X}$ є також проективним.
(3) Якщо точка $p$ є особливою, $E \neq \mathbb{P}^{n-1}$.
*Вказівка*: Візміть однорідний многочлен $F$ степеня $k$, такий що $F(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathfrak{m}^{k+1}$. Припустіть, що $F = t_1^k + \sum_{i=2}^k t_i F_i$ й одержіть нетривіальне рівняння для $E \cap \mathbb{A}^{n-1}_1$.

Хоча роздуття було визначене з використанням фіксованної множини твірних $\mathfrak{m}$, воно не залежить від цієї спеціальної множини.

Твердження 4.4.2. *Роздуття не залежить від вибору твірних* $\mathfrak{m}$. *Точніше, якщо* $\{ y_1, y_2, \dots, y_m \}$ *– інша множина твірних* $\mathfrak{m}$ *і* $\tau : Y \to X$ *– роздуття, побудоване за цим вибором твірних, існує єдиний ізоморфізм* $\varphi : \widetilde{X} \to Y$, *такий що* $\sigma = \tau \circ \varphi$.

Доведення. Єдиність $\varphi$ витікає з того, що і $\sigma$, і $\tau$ є біраціональними, тобто вони обертовні на відкритій щільній підмножині $X$.

Спочатку припустимо, що і $\{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$, і $\{ t'_1, t'_2, \dots, t'_m \}$ є *мінімальними* множинами твірних. Тоді $m = n$ і $t'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j$ для деяких елементів $a_{ij} \in \mathcal{O}_{X,p}$, таких що $\det(a_{ij}) \notin \mathfrak{m}$. Припустимо, що $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(U)$ і $\det(a_{ij})$ ніде не обертається в нуль на $U$, отже, обертовний в $\mathcal{O}_X(U)$. Розглянемо автоморфізм $\psi$ многовиду $U \times \mathbb{P}^{n-1}$, який відображає $p' \times (\xi_1 : \dots : \xi_n)$ в $p' \times (\xi'_1 : \dots : \xi'_n)$, де $\xi'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(p') \xi_j$. Легко перевірити, що його обмеження на $U' \times \mathbb{P}^{n-1}$ відображає $\widetilde{U}'$ на $W \subseteq U' \times \mathbb{P}^{n-1}$, де

$$W = \{ p' \times (y_1 : \dots : y_n) \mid p' \neq p \text{ і } t'_i(p') y_j = t'_j(p') y_i \text{ для всіх } i, j = 1, \dots, n \}.$$

Оскільки $\tau^{-1}(U)$ є *замиканням* $W$ в $U' \times \mathbb{P}^{n-1}$, $\psi$ породжує ізоморфізм $\widetilde{U}$ на $\tau^{-1}(U)$. Цей ізоморфізм, очевидно, може бути продовжений до ізоморфізму $\varphi : \widetilde{X} \to Y$. Його означення гарантує, що $\sigma = \tau \circ \varphi$.

Тепер припустимо, що система твірних $\{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$ *не є мінімальною.* Тоді, з точністю до перестановки індексів, $t_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i t_i$

для деяких $a_i \in \mathcal{O}_{X,p}$. Можна знову припустити, що $a_i \in \mathcal{O}_X(U)$. Тоді для кожної точки $p' \times (\xi_1 : \cdots : \xi_n) \in \widetilde{U}'$ виконуюєсья рівність $\xi_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(p')\xi_i$. Тому вона виконується також для кожної точки $p \times (\xi_1 : \cdots : \xi_n)$ з $E$. Ототожнимо $\mathbb{P}^{n-2}$ з гіперплощиною в $\mathbb{P}^{n-1}$, заданою рівнянням $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i$, де $\alpha_i = a_i(p)$, і розглянемо $y_1, \dots, y_{n-1}$ як однорідні координати на цій гіперплощині. Тоді легко бачити, що при такому ототожненні роздуття, визначене за твірними $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, збігається з $\widetilde{X}$, чим і завершується доведення. □

Нехай $Y$ – підмноговид $X$, який містить $p$. Тоді ті ж самі елементи $t_1, t_2, \dots, t_n$ породжують максимальний ідеал $\mathcal{O}_{Y,p}$, отже, ми можемо використати їх для побудови роздуття $\widetilde{Y}$ многовиду $Y$ в точці $p$. З побудови, наведеної вище, одразу ж випливає, що $\widetilde{Y}$ насправді є підмноговидом $\widetilde{X}$, таким що $\sigma^{-1}(Y) = \widetilde{Y} \cup E$.

Надалі ми вважаємо, що $\{ t_1, t_2, \dots, t_n \}$ є *мінімальною* множиною твірних $\mathfrak{m}$. Розглянемо деякі приклади. Почнемо з найпростішого випадку.

Твердження 4.4.3. *Якщо $p$ – регулярна точка $X$, то $E = \mathbb{P}^{n-1}$ і кожна точка $E$ є регулярною на $\widetilde{X}$. Зокрема, якщо $X$ гладкий, таким є й $\widetilde{X}$.*

Доведення. Оскільки $p$ належить лише до однієї компоненти $X$ (див. наслідок 4.2.9), ми можемо припустити $X$ незвідним і $n = \dim X$. Нехай $q \in \mathbb{P}^{n-1}$. Змінюючи координати (що відповідає зміні твірних $\mathfrak{m}$), припустимо, що $q = (1 : 0 : \cdots : 0)$. Розглянемо підмноговид $Y \subseteq X$, заданий рівняннями $t_i = 0$ ($i = 2, \dots, n$). За наслідком 4.2.8, $p$ є регулярною точкою $Y$ і $\dim_p Y = 1$. Якщо $p' \times (\xi_1 : \cdots : \xi_n) \in \widetilde{Y} \setminus E$, то з $t_i(p') = 0$ і $t_1(p') \neq 0$ випливає, що $\xi_i = 0$ для $i = 2, \dots, n$. Отже, це є дійсним для будь-якої точки $\widetilde{Y} \cap E$, тобто існує лише одна точка в цьому перетині, а саме, $q$. Тому $E = \mathbb{P}^{n-1}$.

Покладемо $\widetilde{U}_i = \widetilde{U} \cap \mathbb{A}_i^{n-1}$ і $\widetilde{U}_i' = \widetilde{U}_i \setminus E$, де, як завжди, $\mathbb{A}_i^{n-1}$ позначає підмножину $\mathbb{P}^{n-1}$, задану нерівністю $y_i \neq 0$. Афінними координатами в $\mathbb{A}_i^{n-1}$ є $z_j = y_j/y_i$ ($j = 1, \dots, n,\ j \neq i$). В $\widetilde{U}_i'$ $t_i = t_1 z_i$, отже, це є дійсним і в $\widetilde{U}_i$. Точка $p \times q$ належить до $\widetilde{U}_1$ і $z_j(q) = 0$. Будь-яку раціональну функцію $f$ на $\widetilde{U}_1$ можна розглядати як раціональний дріб з $\mathbf{K}(U)(z_2, \dots, z_n)$. Зокрема, якщо $f \in \mathcal{O}_{\widetilde{U},p\times q}$, її знаменник є ненульовим в цій точці. Таку функцію можна завжди записати як $f = a + \sum_{j=2}^{n} z_j f_j$, де $a \in \mathbf{K}(U)$. Якщо $f(p \times q) = 0$, то $a(p) = 0$, звідки $a = \sum_{i=1}^{n} b_i t_i = t_1(b_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i z_i)$. Тому $f \in \langle t_1, z_2, \dots, z_n \rangle$, отже, $\mathfrak{m}_{\widetilde{X},p\times q} = \langle t_1, z_2, \dots, z_n \rangle$. Оскільки $n = \dim \widetilde{X}$, ця точка є регулярною на $\widetilde{X}$. □

Припустимо тепер, що $X \subset \mathbb{A}^2$ – плоска крива, $I(X) = \langle F \rangle$ і $p = (0,0)$. Тоді $\mathfrak{m} = \langle x, y \rangle$ (насправді, це - *обмеження* $x$ і $y$ на $X$). Нехай $F = F_m + F_{m+1} + O(m+2)$, де $F_k$ означає форму степеня $k$, а $O(m+2)$ – многочлен, який не має членів степенів, менших за $m+2$. (Назвемо $m$ *кратністю* точки $p$.) Розкладемо $F_m$ у добуток лінійних форм: $F_m = \prod_{i=1}^m (\beta_i x - \alpha_i y)$ для деяких $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{K}$. Назвемо точки $(\alpha_i : \beta_i) \in \mathbb{P}^1$ *коренями* $F_m$. Вони дійсно є тими точками з $\mathbb{P}^1$, для яких $F_m(\alpha_i, \beta_i) = 0$. Розглянемо знову $\widetilde{X}_i = \widetilde{X} \cap (X \times \mathbb{A}^1_i)$ ($i = 1, 2$). Координатою в $\mathbb{A}^1_1$ є $z = y_2/y_1$, і для точок з $\widetilde{X}_1$ $y = tx$. Отже, рівняннями $\widetilde{U}'_1$ є:

$$
\begin{aligned}
&y = zx\,,\\
&x^m F_m(1,z) + x^{m+1} F_{m+1}(1,z) + x^{m+2} G(x,z)
\end{aligned}
$$

для деякого многочлена $G$. Оскільки $x \neq 0$ в $\widetilde{U}'$, друге рівняння можна переписати як

$$
\widetilde{F}(x,z) = F_m(1,z) + xF_{m+1}(1,z) + x^2 G(x,z) = 0\,. \tag{4.4.1}
$$

Отже, (4.4.1) є як раз рівнянням $\widetilde{X}_1$ у координатах $x, z$. Зокрема, $\widetilde{X}_1$ є знову плоскою кривою. Перетин $\widetilde{X}_1 \cap E$ задається рівнянням $x = 0$, звідки $F_m(1,z) = 0$. Більш того, для точки $q = (0, \eta)$ з $E$

$$
\begin{aligned}
\partial \widetilde{F}/\partial x(q) &= F_{m+1}(1,\eta)\,;\\
\partial \widetilde{F}/\partial z(q) &= \partial F/\partial y(1,\eta)\,.
\end{aligned}
$$

Тому ця точка є регулярною тоді й лише тоді, коли або $\partial F/\partial y(1,\eta) \neq 0$, або $F_{m+1}(1,\eta) \neq 0$. Перше рівняння як раз означає, що $\eta$ є простим коренем $F_m(1,z)$, або, що те саме, $(1 : \eta)$ є простим коренем $F_m(x,y)$. Звичайно, те саме дійсне і для $\widetilde{X}_2$, що дає нам наступний результат.

Твердження 4.4.4. *У попередніх позначеннях, точки $E$ – це $p \times (\alpha_i : \beta_i)$ ($i = 1, \dots, m$). Така точка є регулярною в $\widetilde{X}$ тоді й лише тоді, коли або $(\alpha_i : \beta_i)$ є простим коренем $F_m$, або $F_{m+1}(\alpha_i, \beta_i) \neq 0$.*

Точка $p = (0.0)$ зветься *простою $m$-кратною точкою*, якщо $F_m$ не має кратних коренів, тобто всі точки $(\alpha_i : \beta_i)$ попарно різні.

Наслідок 4.4.5. *Якщо $p$ – проста $m$-кратна точка кривої $X$, то виключний шар $E$ складається з $m$ різних регулярних точок.*

Зауважимо, що рівняння (4.4.1) є "кращим", ніж рівняння кривої $X$. Дійсно, якщо $F_m \neq y^m$, нове рівняння містить $z$ у меншому степені, ніж $m$. Отже, кратність нових точок є меншою ніж $m$. Якщо $F_m = y^m$, $\widetilde{F}$ містить $x$ у меншому степені, ніж $F$. З цього зауваження випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.4.6. *Нехай $X$ – плоска крива. Існує ряд роздуттів:*

$$X = X_0 \xleftarrow{\sigma_1} X_1 \xleftarrow{\sigma_2} X_2 \ldots \xleftarrow{\sigma_k} X_k\,,$$

*такий що $X_k$ є гладкою кривою. Більш того, за $\sigma_i$ можна прийняти довільне роздуття в особливій точці $X_{i-1}$.*

Приклад 4.4.7. Кажуть, що плоска крива $X \subset \mathbb{A}^2$ має *особливість типу* $\mathrm{A}_n$ у початку координат, якщо $I(X) = \langle F \rangle$, де, при деякому виборі координат, $F = y^2 + x^{n+1} + O(n+2)$ ($n > 0$; якщо $n = 1$, це як раз звичайна подвійна точка, або *вузол*). У цьому випадку $E$ складається з єдиної точки і його рівняння в околі цієї точки – це $z^2 + x^{n-1} + O(n)$. Інакше кажучи, ця нова точка є особливістю типу $\mathrm{A}_{n-2}$ (якщо $n \leqslant 2$, ця точка регулярна).

Вправа 4.4.8. (1) Припустимо, що $X \subset \mathbb{A}^n$ – гіперповерхня, $I(X) = \langle F \rangle$ з $F = F_m + F_{m+1} + O(m+2)$, де $F_m$ та $F_{m+1}$ – однорідні многочлени степенів, відповідно, $m$ і $m+1$. Довести, що $E = PV(F_m)$ і точка $\xi = (\xi_1 : \cdots : \xi_n) \in E$ є регулярною на $\widetilde{X}$ тоді й лише тоді, коли або $\partial F_m/\partial x_i(\xi_1, \ldots \xi_n) \neq 0$ для деякого $i$, або $F_{m+1}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$.

(2) Нехай $X \subset \mathbb{A}^2$ – афінна крива, $I(X) = \langle F \rangle$. Точка $p$ зветься *особливістю типу* $\mathrm{D}_n$ ($n > 3$) якщо, при відповідному виборі координат в $\mathbb{A}^2$, $F = xy^2 - x^{n-1} + O(n)$. Показати, що в цьому випадку $\widetilde{X}$ є гладким, коли $n \leqslant 5$, і має єдину особливу точку, яка є особливістю типу $\mathrm{A}_{n-5}$, коли $n > 5$.

(3) Нехай $X = V(xy^2 - z^2) \subset \mathbb{A}^3$. Показати, що $\widetilde{X}$ містить афінну відкриту підмножину, ізоморфну $X$ (при цьому ізоморфізмі точці $p \in X$ відповідає деяка точка $E$).

(4) Нехай $X \subseteq \mathbb{A}^n$ – *конус*, тобто $I = I(X)$ – однорідний ідеал. Довести, що $E = PV(I)$ і точка $\xi \in E$ є регулярною на $\widetilde{X}$ тоді й лише тоді, коли вона є регулярною на $E$.

(5) Позначимо через $S_d$ множину всіх однорідних многочленів $F$ степеня $d$ з $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, таких що $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathfrak{m}^{d+1}$, і $S = \bigcup_{d=1}^{\infty} S_d$ (див. вправу 4.3.6). Довести, що $E \simeq PV(S) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ (тобто $E$ є "проективізацією" дотичного конуса до $X$ в точці $p$).

### 4.5. Повні локальні кільця

Кожне локальне нетерове кільце $\mathbf{A}$ з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ можна розглядати як *топологічне кільце* по відношенню до так званої $\mathfrak{m}$-*адичної топології*. Базу відкритих множин у цій топології утворюють класи суміжності $a + \mathfrak{m}^k$ ($a \in \mathbf{A}$, $k \in \mathbb{N}$). Можна легко перевірити, що вони задовольняють умовам бази топології. Більш того, Теорема Артіна–Ріса гарантує, що ця топологія є *гаусдорфовою*: якщо $a \neq b$, існує $k$ таке що $a-b \notin \mathfrak{m}^k$, отже, $(a+\mathfrak{m}^k)\cap(b+\mathfrak{m}^k)=\emptyset$. Можна навіть розглядати $\mathbf{A}$ як *метричний простір.* А саме, покладемо $o(a)=\sup\{\,k \mid a\in\mathfrak{m}^k\,\}\in\mathbb{N}\cup\{\,\infty\,\}$ (звичайно, $o(a)=\infty$ означає, що $a=0$) і визначимо відстань між $a$ і $b$ як $d(a,b)=2^{-o(a-b)}$ (покладаючи $2^{-\infty}=0$). Легко перевіряється, що це є дійсно відстань, яка породжує означену вище топологію. Ця метрика є насправді *ультраметрикою*, тобто $d(a,c)\leqslant\min\{\,d(a,b),d(b,c)\,\}$. Зокрема, ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ з $a_k\in\mathbf{A}$ є рядом Коші тоді й лише тоді, коли $o(a_k)\to\infty$ при $k\to\infty$.

Так визначений метричний простір зазвичай не є повним. Наприклад, якщо $\mathbf{A}=\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0}$, будь-які ряди $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k x^k$ ($x$ – координата на $\mathbb{A}^1$) є рядами Коші , але вони сходяться в $\mathbf{A}$ тоді й лише тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\lambda_k$ є *періодичною* (оскільки границя має бути раціональною функцією від $x$). Можна перевірити, що це завжди так у випадку, коли $\mathbf{A}=\mathcal{O}_{X,p}$ для точки $p$ алгебричного многовида $X$ додатньої розмірності.

Часто корисно розглянути *поповнення* кільця $\mathbf{A}$ в $\mathfrak{m}$-адичній топології. Можна дати чисто алгебричний його опис, використовуючи поняття *оберненої границі.* Дійсно, розглянемо фактор-кільця $\mathbf{A}_k=\mathbf{A}/\mathfrak{m}^k$ і природні сюр'єкції $\pi_k:\mathbf{A}_k\to\mathbf{A}_{k-1}$. *Обернена границя* $\hat{\mathbf{A}}=\varprojlim_k\mathbf{A}_k$ є, за означенням, множиною всіх послідовностей $(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$, де $a_k\in\mathbf{A}_k$ і $\pi_k(a_k)=a_{k-1}$, з додаванням і множенням, визначеними покоординатно. Звичайно, будь-який елемент $a\in\mathbf{A}$ задає таку послідовність, якщо покласти $a_k=a+\mathfrak{m}^k$. Отже, ми одержуємо гомоморфізм $\mathbf{A}\to\hat{\mathbf{A}}$, який є зануренням за Теоремою Артіна-Ріса. Кільце $\hat{\mathbf{A}}$ є знову локальним: його єдиний максимальний ідеал $\hat{\mathfrak{m}}$ складається з усіх послідовностей $(a_k)$ з $a_1=0$ (інакше $a_k\not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ для всіх $k$, тобто всі $a_k$ є обертовними). Більш того, $\hat{\mathfrak{m}}^k$ складається з усіх послідовностей з $a_k=0$, отже, $\hat{\mathfrak{m}}^k\cap\mathbf{A}=\mathfrak{m}^k$, тобто $\mathfrak{m}$-адична топологія збігається з обмеженням на $\mathbf{A}$ $\hat{\mathfrak{m}}$-адичної топології. Послідовність $a^{(l)}=(a_k^{(l)})$ елементів $\hat{\mathbf{A}}$ є послідовністю Коші тоді й лише тоді, коли координата $a_k^{(l)}$ стабілізується для кожного $k$, тобто існує число $l_0$, таке що $a_k^{(l)}=a_k^{(l_0)}$ для всіх $l>l_0$. Тоді елемент $a$, координатами якого є ці "граничні" значення, є, очевидно, границею $a^{(l)}$. Тому $\hat{\mathbf{A}}$ повне. Ми бачимо, що $\mathbf{A}$ є щільним в $\hat{\mathbf{A}}$, отже, $\hat{\mathbf{A}}$ є поповненням $\mathbf{A}$. Ми віддаємо перевагу такому опису $\mathfrak{m}$-адичного поповнення, оскільки з ним набагато легше мати справу. Зауважимо, що з цього означення одразу випливає, що $\mathbf{A}/\mathfrak{m}^k\simeq\hat{\mathbf{A}}/\hat{\mathfrak{m}}^k$ для всіх $k$.

У випадку, коли $\mathbf{A}=\mathcal{O}_{X,p}$, поповнення $\hat{\mathbf{A}}$ позначають через $\hat{\mathcal{O}}_{X,p}$.

Приклади 4.5.1. (1) Якщо $\mathbf{A}=\mathcal{O}_{X,p}$, де $p$ – регулярна точка, $\mathfrak{m}=\langle\,t_1,t_2,\dots,t_n\,\rangle$, де $n=\dim_p X$, поповнення

$\hat{\mathbf{A}}$ можна ототожнити з алгеброю *формальних степеневих рядів* $\mathbf{K}[[\,x_1,\dots,x_n\,]]$. А саме, кожен ряд $F=\sum_{d=0}^{\infty}F_d$, де $F_d$ є однорідним многочленом степеня $k$, визначає елемент $(a_k)$ з $\hat{\mathbf{A}}$, такий що $a_k=F|_k(t_1,t_2,\dots,t_n)$, де через $F|_k$ позначено $\sum_{d<k}F_d$. З іншого боку, з теореми 4.2.6 випливає, що

$$\mathbf{A}/\mathfrak{m}^k \simeq \mathbf{K}[\,x_1,\dots,x_n\,]/\langle\, x_1,x_2,\dots,x_n\,\rangle^k \simeq \\ \simeq \mathbf{K}[[\,x_1,\dots,x_n\,]]/\langle\, x_1,x_2,\dots,x_n\,\rangle^k\,,$$

тобто цим шляхом можна одержати кожен елемент з $\hat{\mathbf{A}}$.

(2) Припустимо тепер, що $\mathbf{A}=\mathcal{O}_{X,p}$, де $X\subseteq\mathbb{A}^n$ – афінний многовид, а $p$ є початком координат. Тоді легко бачити, що $\hat{\mathbf{A}}\simeq\mathbf{K}[[\,x_1,\dots,x_n\,]]/I(X)\mathbf{K}[[\,x_1,\dots,x_n\,]]$. Це знову витікає з ізоморфізму

$$\mathbf{K}[\,x_1,\dots,x_n\,]/\langle\, x_1,x_2,\dots,x_n\,\rangle^k\simeq\mathbf{K}[[\,x_1,\dots,x_n\,]]/\langle\, x_1,x_2,\dots,x_n\,\rangle^k$$

і того, що $I=\bigcap_{k=1}^{\infty}(I+\mathfrak{m}^k)$ (див. наслідок 4.2.4).

Означення 4.5.2. Два локальні нетерові кільця $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ звуться *аналітично еквівалентними*, якщо $\hat{\mathbf{A}}\simeq\hat{\mathbf{B}}$. Зокрема, кажуть, що многовиди $X$ і $Y$ є *аналітично еквівалентними в околі* точок, відповідно, $p$ і $q$, якщо $\hat{\mathcal{O}}_{X,p}\simeq\hat{\mathcal{O}}_{Y,q}$. У цьому випадку ми писатимемо $(X,p)\,\widehat{\approx}\,(Y,q)$.

Приклад 4.5.3. Якщо точки $p\in X$ і $q\in Y$ є регулярними і $\dim_p X=\dim_q Y$, то $(X,p)\,\widehat{\approx}\,(Y,q)$.

Наступний результат має великі застосування в алгебричній геометрії й у теорії чисел.

Теорема 4.5.4 (Лема Гензеля). *Нехай* $\mathbf{A}$ *– повне локальне кільце з максимальним ідеалом* $\mathfrak{m}$, $F\in\mathbf{A}[\,x_1,\dots,x_n\,]$ *– многочлен, і* $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ *–* $n$*-ка елементів з* $\mathbf{A}$, *таких що:*

(1) $F(\mathbf{a})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{2k+1}}$.

(2) $J=\langle\,\partial F/\partial x_1(\mathbf{a}),\dots,\partial F/\partial x_n(\mathbf{a})\,\rangle\supseteq\mathfrak{m}^k$.

*Тоді існує* $n$*-ка* $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, *така що* $F(\mathbf{b})=0$ *і* $\mathbf{b}\equiv\mathbf{a} \pmod{\mathfrak{m}^{k+1}}$, *тобто* $b_i\equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}^{k+1}}$ *для всіх індексів* $i$.

Доведення. Побудуємо рекурсивно послідовність $n$-ок $\mathbf{b}^{(l)}$ для всіх $l\geqslant k$, таку що:

(1) $\mathbf{b}^{(k)}=\mathbf{a}$,

(2) $\mathbf{b}^{(l+1)}\equiv\mathbf{b}^{(l)} \pmod{\mathfrak{m}^{l+1}}$ для кожного $l$,

(3) $F(\mathbf{b}^{(l)})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{k+l+1}}$ для кожного $l$.

Оскільки $\mathbf{A}$ повне, існує $n$-ка $\mathbf{b}$, така що $\mathbf{b}\equiv\mathbf{b}^{(l)} \pmod{\mathfrak{m}^l}$ для кожного $l$. Тоді, зокрема, $\mathbf{b}\equiv\mathbf{a} \pmod{\mathfrak{m}^k}$ і $F(\mathbf{b})\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^l}$ для кожного $l$, звідки $F(\mathbf{b})=0$.

Припустимо, що $\mathbf{b}^{(l)}$ побудована. Тоді $F(\mathbf{b}) \in \mathfrak{m}^{k+l+1} \subseteq J\mathfrak{m}^{l+1}$, тому існує $n$-ка $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, така що $h_i \in \mathfrak{m}^{l+1}$, $F(\mathbf{b}^{(l)}) = -\sum_{i=1}^{n} \partial F/\partial x_i(\mathbf{a}) h_i$. Але $\partial F/\partial x_i(\mathbf{a}) \equiv \partial F/\partial x_i(\mathbf{b}^{(l)}) \pmod{\mathfrak{m}^{k+1}}$. Отже, покладаючи $\mathbf{b}^{(l+1)} = \mathbf{b}^{(l)} + \mathbf{h}$, ми одержимо:

$$F(\mathbf{b}^{(l+1)}) = F(\mathbf{b}^{(l)}) + \sum_{i=1}^{n} \partial F/\partial x_i(\mathbf{b}^{(l)}) h_i + \sum_{i,j} c_{ij} h_i h_j \equiv 0 \,(\operatorname{mod} \mathfrak{m}^{k+l+2}),$$

що й треба. □

Приклад 4.5.5. Застосуємо цей результат до випадку *ізольованих особливостей гіперповерхонь*. А саме, нехай $X \subset \mathbb{A}^n$ – гіперповерхня, $I = I(X) = \langle F \rangle$. Припустимо, що початок координат $p = (0, \dots, 0)$ є особливою точкою на $X$. Це означає, що $F = O(2)$. Позначимо через $F_m$ однорідну частину $F$ степеня $m$. Крім того, припустимо, що ця особливість є ізольованною, тобто існує окіл $U \ni p$, в якому більше немає особливих точок. Це означає, що $V(F, \partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n) \cap U = \{ p \}$, або, що те саме (внаслідок Теореми Гільберта про нулі), ідеал у локальному кільці $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$, породженний образами $\partial F/\partial x_i$, містить деякий степінь $\mathfrak{m}^k$ максимального ідеала $\mathfrak{m}$. Нехай $t_1, t_2, \dots, t_n$ позначають образи афінних координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ в $\mathbf{A}$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Розглянемо многочлен $\widetilde{F} = \sum_{i=2}^{2k} F_i \in \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n]$. Тоді $\widetilde{F}(\mathbf{t}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^{2k+1}}$. Більш того,

$$\partial \widetilde{F}/\partial x_i(\mathbf{t}) \equiv \partial F/\partial x_i(\mathbf{t}) \pmod{\hat{\mathfrak{m}}^{2k}},$$

отже, також $\langle \partial \widetilde{F}/\partial x_1(\mathbf{t}) \rangle \supseteq \hat{\mathfrak{m}}^k$. За Лемою Гензеля, існують елементи $t'_i \in \hat{\mathbf{A}}$, такі що $\widetilde{F}(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = 0$ і $t'_i \equiv t_i \pmod{\hat{\mathfrak{m}}^{k+1}}$. Тоді $t'_1, t'_2, \dots, t'_n$ породжують $\hat{\mathfrak{m}}$, тому їх можна також використати для розкладу елементів $\hat{\mathbf{A}}$ в степеневі ряди. Але оскільки $\hat{\mathbf{A}}$ є *повним*, будь-який степеневий ряд визначає елемент з $\hat{\mathbf{A}}$. Це означає, що $\hat{\mathbf{A}} \simeq \mathbf{K}[[x_1, \dots, x_n]]/\langle \widetilde{F} \rangle$. Отже, $(X, p) \,\widehat{\sim}\, (X', p)$, де $I(X') = \langle \widetilde{F} \rangle$. Інакше кажучи, розглядаючи ізольовані особливості гіперповерхонь, можна завжди опустити члени досить високих степенів у визначальному співвідношенні (у розглянутому випадку, починаючи з $2k+1$).

Наслідок 4.5.6. *Припустимо, що $p$ – особлива точка гіперповерхні $X \subset \mathbb{A}^n$, така що матриця $(\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j)$, де $I(X) = \langle F \rangle$, є обертовною. Якщо* $\operatorname{char} \mathbf{K} \neq 2$, *$(X, p) \,\widehat{\sim}\, (C, 0)$, де $C$ – квадратичний афінний конус: $C = V(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$.*

Доведення. Можна припустити знову, що $p$ є початком координат, тобто $F = O(2)$. Заміна координат дозволяє покласти $F_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i^2$. Тоді $\langle \partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \dots, \partial F/\partial x \rangle = \mathfrak{m}$ і ми можемо застосувати приклад 4.5.5. □

Вправи 4.5.7. В усіх цих вправах $X$ позначає гіперповерхню в $\mathbb{A}^n$ і ми припускаємо, що $p = (0, \dots, 0) \in X$ є особливою точкою $X$. Нехай $I(X) = \langle F \rangle$. Тоді $F = F_2 + \dots + F_m$, де $F_k$ – однорідні степеня $k$. Ми пишемо $O(m)$ замість довільного многочлена, який не має членів степенів, менших за $m$.

(1) ("Формальна лема Морса"). Нехай $r = \operatorname{rk} F_2$ (ранг матриці квадратичної форми $F_2$). Довести, що $(X, p) \widehat{\sim} (Y, p)$, де $I(Y) = \langle \sum_{i=1}^r x_i^2 + G(x_{r+1}, \dots, x_n) \rangle$, а $G = O(3)$.
(2) Припустимо, що $p$ є особливістю типу $\mathrm{A}_k$, тобто $n = 2$ і $F = y^2 + x^{k+1} + O(k+2)$. Довести, що $(X, p) \widehat{\sim} (Y, p)$, де $I(Y) = \langle y^2 + x^{k+1} \rangle$.
(3) Довести, що *звичайна $n$-кратна точка* плоскої кривої аналітично еквівалентна вершині її дотичного конуса.

## 4.6. Будова многовиду в околі регулярної точки

### 4.6.1. Однозначність розкладу в кільці степеневих рядів.

Теорема 4.6.1. *Кільце формальних степеневих рядів є факторіальним, тобто кільцем з однозначним розкладом на незвідні множники*

Доведення цієї теореми дамо індукцією за кількістю змінних. Позначимо $\mathbf{A} = \mathbf{K}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, $\mathbf{B} = \mathbf{K}[[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]]$. Позначивши також $x_n = x$, можна розглядати кільце $\mathbf{B}[x]$ як підкільце в $\mathbf{A} = \mathbf{B}[[x]]$. Нехай $\mathfrak{m} = \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle$ — максиамльний ідеал кільця $\mathbf{B}$. Будемо казати, що ряд $f \in \mathbf{A}$ *регулярний*, якщо $f \not\equiv 0 \mod \mathfrak{m}$, тобто $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$, або $f$ містить якийсь одночлен $x_n^k$ з ненульовим коефіцієнтом. Найменше $k$ з цією властивістю позначимо $o_n(f)$. Перш за все, зауважимо, що питання подільності в кільці $\mathbf{A}$ можна звести до розгляду лише регулярних рядів.

Лема 4.6.2. *Для довільних рядів $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbf{A}$ існує такий автоморфізм $\phi$ кільця $\mathbf{A}$, що всі ряди $\phi(f_1), \dots, \phi(f_m)$ регулярні.*

Доведення. Оскільки добуток рядів є регулярним тоді й лише тоді, коли всі множники регулярні, замість набору $f_1, f_2, \dots, f_m$ достатньо розглянути один ряд $f = f_1 f_2 \dots f_m$. Припустимо, що поле $\mathbf{K}$ нескінченне, і нехай $d = \operatorname{ord}(f)$. Тоді існує лінійна заміна змінних (яка індукує автоморфізм кільця $\mathbf{A}$), така що після неї форма степені $d$ з ряду $f$ не буде обертатися в нуль на векторі $(0, \dots, 0, 1)$, отже $f(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$. У випадку скінченного поля можна повторити доведення леми 1.4.10 до нормалізаційної теореми Нетера з незначними змінами. Залишаємо це як вправу. □

Основну роль у подальшому відіграє наступний результат, відомий під назвою «*підготовча теорема Вайєрштрасса*».

Теорема 4.6.3. *Нехай $f \in \mathbf{A}$ — регулярний ряд, $k = o_n(f)$. Для кожного ряду $g \in \mathbf{A}$ існують єдині ряд $q \in \mathbf{A}$ та многочлен $r(x) \in \mathbf{B}[x]$ степеня, меншого за $k$ такі, що $g = qf + r$.*

Доведення. Кожен ряд $g \in \mathbf{A}$ можна однозначно записати у вигляді $\alpha(g)x^k + \beta(g)$, де $\beta(g) \in \mathbf{B}[x]$ — многочлен степеня, меншого за $k$, $\alpha(g) \in \mathbf{A}$. Зауважимо, що $\alpha(f)$ — обертовний ряд, а $\beta(f) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}$. Оскільки, очевидно, $\alpha(qf) = q\alpha(f) + \alpha(q\beta(f))$, рівність $g = qf + r$ можна переписати у вигляді $\alpha(g) = q\alpha(f) + \alpha(q\beta(f))$, або, позначивши $\alpha(g) = u$, $q\alpha(f) = v$, $\beta(f)\alpha(f)^{-1} = -w$, у вигляді $v - \alpha(vw) = u$. Позначимо, для кожного ряду $h$, $\phi(h) = \alpha(vh)$. Зауважимо, що коли $h \equiv 0 \mod \mathfrak{m}^s$, то $\phi(h) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}^{s+1}$. Тому, для довільного $h$, визначений ряд $(1-\phi)^{-1}(h) = \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s(h)$. Оскільки нас цікавить розв'язок рівняння $(1-\phi)(v) = w$, звідси випливає, що він існує, причому єдиний: $v = (1-\phi)^{-1}(w)$. □

Наслідок 4.6.4. *Якщо ряд $f \in \mathbf{A}$ регулярний, $o_n(f) = k$, існує обертовний ряд $q$, такий що $qf = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i$, де $b_i \in \mathfrak{m}$.*

Доведення. Застосуємо теорему 4.6.3 до $g = x^k$. Одержимо: $x^k = qf + r$, де $r = \sum_{i=1}^{k-1} b_i x^i$ ($b_i \in \mathbf{B}$). Очевидно, $b_i(0,\dots,0) = 0$, а $f(0,\dots,0,x) = a_0x^k + a_1x^{k+1} + \dots$, де $a_0 \neq 0$. Тому $q(0,\dots,0,0) = a_0 \neq 0$, тобто $q$ обертовний. □

Многочлени вигляду $x^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i$, де $b_i \in \mathfrak{m}$, звуться *многочленами Вайєрштрасса.* Отже, наслідок 4.6.4 свідчить, що кожен регулярний ряд асоційований з деяким (очевидно, єдиним) многочленом Вайєрштрасса. Нам потрібний ще наступний простий факт.

Твердження 4.6.5. *Нехай $f$ — незвідний регулярний ряд, $f'$ — асоційований з ним многочлен Вайєрштрасса. Тоді $f'$ є назвідним у кільці $\mathbf{B}[x]$.*

Доведення. Очевидно, $f'$ — незвідний у кільці $\mathbf{A}$. Розглянемо довільний розклад $f' = gh$, де $g, h \in \mathbf{B}[x]$ і необертовні. Старший коефіцієнт многочлена $f'$ дорівнює 1. Тому старші коефіцієнти $g$ та $h$ обертовні, отже $\deg g > 0$ і $\deg h > 0$. Крім того, $f' \equiv x^k \mod \mathfrak{m}$, тому $g \equiv x^l \mod \mathfrak{m}$ і $h \equiv x^r \mod \mathfrak{m}$, причому $l > 0$ і $r > 0$. Отже, ані $g$, ані $h$ не обертовні в кільці $\mathbf{A}$, що неможливо. □

Доведення теореми 4.6.1. Достатньо довести, що коли незвідний ряд $f$ ділить добуток $gh$, він ділить якийсь із співмножників. За лемою 4.6.2, можна вважати всі ряди $f, g, h$ регулярними. Нехай $f', g', h'$ — асоційовані з ними многочлени Вайєрштрасса. Очевидно, $f'|g'h'$. За припущенням індукції, можна вважати, що кільце $\mathbf{B}$ факторіальне. Тоді таким є й кільце многочленів $\mathbf{B}[x]$. Оскільки $f'$ незвідний в цьому кільці, або $f'|g'$, або $f'|h'$. Відповідно, матимемо, що $f|g$ або $f|h$. □

**4.6.2. Однозначність розкладу в локальному кільці неособливої точки.**

Теорема 4.6.6. *Нехай $p$ — неособлива точка многвиду $X$. Тоді кільце $\mathcal{O}_{X,p}$ факторіальне.*

Зробимо спочатку наступні зауваження. Нехай $\mathbf{A}$ — локальне кільце з максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$, $\hat{\mathbf{A}}$ — його поповнення, $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{\mathbf{A}}$ — максимальний ідеал $\hat{\mathbf{A}}$.

Твердження 4.6.7. *Для кожного ідеалу $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{A}$ має місце рівність $\mathbf{I}\hat{\mathbf{A}} \cap \mathbf{A} = \mathbf{I}$.*

Доведення. Якщо $a \in \mathbf{I}\hat{\mathbf{A}} \cap \mathbf{A}$, то $a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$, де $a_i \in \hat{\mathbf{A}}$, $b_i \in \mathbf{I}$. Підберемо $a_i' \in \mathbf{A}$, $a_i' \equiv a_i \mod \hat{\mathfrak{m}}^n$. Тоді $a \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i' b_i \mod \mathfrak{m}^n$. Отже $a \in \mathbf{I} + \mathfrak{m}^n$. Оскільки це виконується для кожного $n$, а $\bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathbf{I} + \mathfrak{m}^n) = \mathbf{I}$, звідси $a \in \mathbf{I}$. $\square$

Коли $\mathbf{I} = a\mathbf{A}$ — головний ідеал, одержимо наступний наслідок.

Наслідок 4.6.8. *Якщо $a, b \in \mathbf{A}$ і $a|b$ у поповненні $\hat{\mathbf{A}}$, то $a|b$ в $\mathbf{A}$.*

Тепер ми можемо довести такий загальний результат.

Теорема 4.6.9. *Якщо кільце $\hat{\mathbf{A}}$ є факторіальним, таким є й кільце $\mathbf{A}$.*

Оскільки $\hat{\mathcal{O}}_{X,p} \simeq \mathbf{K}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, з теорем 4.6.9 та 4.6.1 випливає теорема 4.6.6.

Доведення. Нехай $f$ — незвідний елемент кільця $\mathbf{A}$, $f|gh$. Позначимо через $d$ найбільший спільний дільник многочленів $f$ і $g$ у факторіальному кільці $\hat{\mathbf{A}}$; тоді $f = df'$, $g = dg'$, де $f', g'$ вже співпервинні в цьому кільці, і $g'f = gf'$. Для кожного $n$ існують елементи $f_n, g_n \in \mathbf{A}$ такі, що $f' \equiv f_n \mod \hat{\mathfrak{m}}^n$ і $g' \equiv g_n \mod \hat{\mathfrak{m}}^n$. Тоді $g_n f - g f_n \in \langle f, g \rangle \hat{\mathfrak{m}}^n \cap \mathbf{A} = \langle f, g \rangle \mathfrak{m}^n$. Отже, $g_n f - g f_n = f a_n + g b_n$, де $a_n, b_n \in \hat{\mathfrak{m}}^n$, або $f(g_n - a_n) = g(b_n + f_n)$, звідки також $f'(g_n - a_n) = g'(b_n + f_n)$. Але $f', g'$ — співпервинні елементи факторіального кільця $\hat{\mathbf{A}}$, тому в цьому кільці $f'|(b_n + f_n)$: $b_n + f_n = f'c$. Візьмемо $n$ таким, що $f' \notin \hat{\mathfrak{m}}^n$. Оскільки $f' \equiv f_n \mod \hat{\mathfrak{m}}^n$, звідси $c \not\equiv 0 \mod \hat{\mathfrak{m}}$, тобто елемент $c$ обертовний в кільці $\hat{\mathbf{A}}$. Отже також $(b_n + f_n)|f'$, а тому $(b_n + f_n)|f$ в кільці $\hat{\mathbf{A}}$. Тоді $a_n + f_n|f$ в $\mathbf{A}$: $f = (b_n + f_n)q$. Але згадаємо, що $f$ незвідний. Тому або $b_n + f_n$, або $q$ має бути обертовним. У першому випадку обертовним є й елемент $f'$. Тоді $f|d|g$. У другому випадку елементи $f$ та $f'$ асоційовані, $f'|g'h$ і $f', g'$ співпервинні в $\hat{\mathbf{A}}$. Тому $f'|h$ і $f|h$. $\square$

### 4.6.3. Наслідки.

Теорема 4.6.10. *Нехай $p$ — неособлива точка алгебричного многовиду $X$, $Y$ — незвідний підмноговид $X$ корозмірності $1$, який містить точку $p$. Існує такий афінний окіл $U$ точки $p$, що в кільці $\mathbf{K}[U]$ ідеал $I(Y \cap U)$ головний.*

Доведення. Очевидно, многовид $X$ можна вважати афінним. Тоді $I(Y) = \mathfrak{p}$ — первинний ідеал висоти 1 кільця $\mathbf{K}[X]$. У локальному кільці $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$ ідеал $\mathfrak{p}\mathbf{A}$ також первинний висоти 1. Оскільки кільце $\mathbf{A}$ факторіальне, цей ідеал головний: $\mathfrak{p}\mathbf{A} = f\mathbf{A}$, причому можна вважати, що $f \in \mathbf{K}[X]$. Нехай $\mathfrak{p} = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ у кільці $\mathbf{K}[X]$. Тоді $a_i = fb_i/c_i$, де $b_i, c_i \in \mathbf{K}[X]$, $c_i(p) \neq 0$. Отже, можна покласти $U = D(c_1c_2 \dots c_m)$. $\square$

Звичайно, останню теорему можна розповсюдити на довільний підмноговид $Y \subset X$, всі незвідні компоненти якого (або навіть лмише ті, які містять точку $p$) мають корозмірність 1. Нагадаємо, що обернений результат має місце завжди: якщо $X$ незвідний афінний многовид, то всі компоненти многовиду, заданого всередині $X$ одним рівнянням, мають корозмірність 1. Зауважимо, що коли точка $p$ неособлива, вона напевне має незвідний афінний окіл.

Коли йдеться про підмноговиди більшої корозмірності, аналогічних загальних результатів немає. Наведемо лише один факт, який стосується найпростішого випадку.

Теорема 4.6.11. *Нехай $p$ — неособлива точка алгебричного многовиду $X$, $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{X,p}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{X,p}$.*

(1) *Якщо елементи $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathfrak{m}$ такі, що класи $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$, де $\overline{a} = a + \mathfrak{m}^2$, лінійно незалежні в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, то існує афінний окіл $U$ точки $p$ такий, що $a_i \in \mathbf{K}[U]$, підмноговид $Y \subset U$, визначений рівняннями $a_1 = \dots = a_m = 0$ незвідний, корозмірності $m$, точка $p$ є його неособливою точкою і $I(Y \cap U) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$.*

(2) *Навпаки, якщо $Y \subset X$ — незвідний підмноговид корозмірності $m$ такий, що $p$ є його неособливою точкою, то існує афінний окіл $U$ точки $p$ і елементи $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbf{K}[U]$ такі, що $I(Y \cap U) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ і класи $\overline{a}_i$ лінійно незалежні в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Доведення. 1. Можна вважати, що $X$ афінний і $a_i \in \mathbf{K}[X]$. За наслідком 4.2.8, факторкільце $\mathbf{A}/\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ є регулярним розмірності $n - m$. Зокрема, воно без дільників нуля, отже ідеал $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ первинний, тобто через точку $p$ проходить лише одна компонента $Y_1$ многовиду $Y$. Зменшивши окіл $U$, можна вважати, що $Y_1 \cap U = Y \cap U$ і $I(Y \cap U) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$. Тоді $\mathcal{O}_{Y,p} = \mathbf{A}/\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$. Отже, $p$ є неособливою точкою многовиду $Y$.

2. Знов-таки, вважаємо $X$ афінним. Позначимо $\mathfrak{p} = I(Y)$. Тоді $\mathcal{O}_{Y,p} = \mathbf{A}/I\mathbf{A}$, $\mathfrak{m}_{Y,p} = \mathfrak{m}/I\mathbf{A}$. Зокрема, кількість твірних останнього ідеалу дорівнює $\dim\big(\mathfrak{m}/(I\mathbf{A} + \mathfrak{m}^2)\big)$. Оскільки $p \in Y$ — неособлива точка, ця розмірність дорівнює $m - n$. Отже, в ідеалі $\mathbf{I}$ є $m$ елементів $a_1, a_2, \dots, a_m$ таких, що класи $\overline{a}_i$ лінійно незалежні. Розглянемо підмноговид $Y' \subseteq X$, визначений рівняннями $a_1 = \dots = a_m = 0$. Ясно, що $Y' \supseteq Y$. Згідно з пунктом 1, існує такий афінний окіл $U \ni p$, що $Y' \cap U$ — незвідний многовид розмірності $n - m$ і $I(Y' \cap U) = \langle\, a_1, a_2, \dots, a_m \,\rangle$. Оскільки $Y \cap U$ має ту саму розмірність, $Y \cap U = Y' \cap U$. □

Розділ 5

# Теорія перетинів

Ця глава є найкоротшою. Вона містить лише перші кроки в напрямку теорії перетинів. А саме, ми розглянемо перетини проективних многовидів в проективному просторі. Кульмінаційною точкою є *теорема Безу*, яка узагальнює той елементарний факт, що многочлен від однієї змінної має стільки коренів, який його степінь (звичайно, якщо ми рахуємо їх з "відповідними кратностями"). Насправді, основна задача полягає в тому, щоб правильно визначити, що таке "відповідні кратності".

Означення 5.1. (1) *Градуйоване кільце* – кільце $\mathbf{A}$ разом з прямим розкладом його адитивної групи: $\mathbf{A} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k$, таким що $\mathbf{A}_k\mathbf{A}_l \subseteq \mathbf{A}_{k+l}$ для всіх $k, l$.[1]

(2) *Градуйований модуль* над градуйованим кільцем $\mathbf{A}$ – це $\mathbf{A}$-модуль $M$ разом з прямим розкладом його адитивної групи: $M = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty}$, таким що $\mathbf{A}_k M_l \subseteq M_{k+l}$.

Елементи з $\mathbf{A}_k$ або $M_k$ звуться *однорідними степеня* $k$. Звичайно, розглядаючи елементи з градуйованого кільця або модуля, ми вважатимемо їх однорідними. Для довільного елемента $u \in M$ його *однорідними компонентами* є, за означенням, такі елементи $u_k \in M_k$, що $u = \sum_k u_k$. (Вони визначаються однозначно і майже всі дорівнюють нулю.)

(3) Підмодуль $N$ градуйованого модуля $M$ (зокрема, ідеал градуйованого кільця) зветься *однорідним*, якщо як тільки елемент $a$ (неоднорідний!) належить до $N$, всі його однорідні компоненти також належать до $N$, або, що те саме, $N = \bigoplus_k (N \cap M_k)$. Ми завжди розглядаємо такий підмодуль, як градуйований модуль, покладаючи $N_k = N \cap M_k$.

(4) Для градуйованого модуля $M$, *зсунутий* модуль $M(m)$ визначається як той самий модуль, але з новим градуюванням: $M(m)_k = M_{k+m}$.

Приклад 5.2. Алгебру многочленів $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,] = \mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_n\,]$ можна розглядати як градуйовану, якщо позначити через $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]_k$ множину однорідних многочленів степеня $k$ (включаючи нуль).

[1] Іноді розглядають більш загальне поняття градуйованого кільця, коли індекс $k$ пробігає напівгрупу; зокрема, часто зустрічається випадок $k \in \mathbb{Z}$. Читач може сам легко внести очевидні зміни в означення.

Ми завжди розглядаємо $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$ з цим градуюванням (хоча в деяких питаннях й інші градуювання бувають корисними).

Якщо $N \subseteq M$ – однорідний підмодуль, фактор-модуль $M/N$ можна також розглядати як градуйований: $M/N = \bigoplus_k M_k/N_k$. Зокрема, якщо $I \subseteq \mathbf{A}$ – однорідний ідеал, фактор-кільце $\mathbf{A}/I$ знов є градуйованим кільцем. Якщо градуйований модуль $M$ є скінченно породженим, можна завжди вибрати скінченну множину твірних $M$, яка складається з однорідних елементів (досить взяти ненульові однорідні компоненти довільних твірних). Тому існує індекс $k_0$, такий що $M_k = 0$ при $k < k_0$ (візьміть мінімальний степінь однорідних твірних).

З означення витікає, що $\mathbf{A}_0$ є підкільцем у $\mathbf{A}$ і всі компоненти $\mathbf{A}_k$, як і всі компоненти $M_k$ градуйованого $\mathbf{A}$-модуля $M$, є $\mathbf{A}_0$-модулями.

Найчастіше ми розглядатимемо випадок, коли $\mathbf{A}$ є насправді градуйованою $\mathbf{K}$-алгеброю (тобто всі $\mathbf{A}_k$ є підпростірами). Більш того, ми майже завжди матимемо справу з такими градуйованими алгебрами, що $\mathbf{A}_0 = \mathbf{K}$; вони звуться *зв'язними градуйованими* $\mathbf{K}$-алгебрами.

Приклад 5.3. Наші головні приклади пов'язані з проективними многовидами. Якщо $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, ідеал $I(X)$ є однорідним ідеалом в $\mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]$. Покладемо $\mathbf{K}^{\mathrm{h}}[\,X\,] = \mathbf{K}[\,\mathbf{x}\,]/I(X)$ і назвемо $\mathbf{K}^{\mathrm{h}}[\,X\,]$ *градуйованою координатною алгеброю* $X$. Насправді, вона залежить не лише від $X$, але також від занурення $X \subseteq \mathbb{P}^n$ (див. вправу 2.3.11(9)).

Наступне твердження є цілком очевидним.

Твердження 5.4. *Припустимо, що $\mathbf{A}$ – скінченно породжена градуйована $\mathbf{K}$-алгебра, $M$ – скінченно породжений градуйований $\mathbf{A}$-модуль. Тоді $\dim_{\mathbf{K}} M_k < \infty$ для кожного $k$.*

В цій ситуації функція $h_M(k) = \dim_{\mathbf{K}} M_k$ зветься *функцією Гільберта* модуля $M$.

Приклади 5.5. (1) Для $M = \mathbf{A} = \mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_n\,]$, маємо $h_M(k) = \binom{k+n}{n}$. Отже, це многочлен степеня $n$ зі старшим коефіцієнтом $1/n!$.

(2) Нехай тепер $M = \mathbf{A} = \mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_n\,]/\langle\, F\,\rangle$, де $F$ – однорідний многочлен степеня $m$. Тоді

$$h_M(k) = \begin{cases} \binom{k+n}{n} & \text{якщо } k < m \\ \binom{k+n}{n} - \binom{k-m+n}{n} & \text{якщо } k \geqslant m \end{cases}$$

Отже, при $k \geqslant m$ $h_M(k)$ збігається з многочленом, старший коефіцієнт якого такий самий, як у $x^n/n! - (x-m)/n!$, тобто $m/(n-1)!$.

Ми збираємося довести, що ці приклади насправді є типовими. А саме, будемо казати, що дві функції $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *збігаються для достатньо великих* $k$, якщо існує $k_0$, таке що $f(k) = g(k)$ для всіх $k \geqslant k_0$. Позначимо через $\mathbb{S}$ градуйовану алгебру $\mathbf{K}[\,x_0, x_1, \dots, x_n\,]$.

Теорема 5.6 (Теорема Гільберта–Серра). *Нехай $M$ – скінченно породжений градуйований $\mathbb{S}$-модуль, $d(M) = \dim PV(\operatorname{Ann}_{\mathbb{S}} M)$. Існує многочлен $H_M(x) \in \mathbb{Q}[x]$ степеня $d = d(M)$, такий що $h_M(k) = H_M(k)$ для достатньо великих $k$. Більш того, старший коефіцієнт $H_M(x)$ дорівнює $e/d!$ для деякого додатнього цілого $e$.*

Многочлен $H_M$ зветься *многочленом Гільберта* модуля $M$, а число $e$ зветься *степенем* модуля $M$ і позначається $\deg M$. Якщо $M = \mathbb{S}/I(X)$, де $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективний многовид, $H_M$ зветься *многочленом Гільберта* многовида $X$ і позначається $H_X$, а $\deg M$ зветься *степенем* многовида $X$ і позначається $\deg X$.

Приклади, наведені вище, показують, що $\deg \mathbb{P}^n = 1$, а якщо $X$ – гіперповерхня в $\mathbb{P}^n$ і $I(X) = \langle\, F\,\rangle$, то $\deg X = \deg F$. Нагадаємо, що і многочлен Гільберта, і степінь проективного многовида є інваріантами *не самого* цього многовида, але ще й його *занурення* в проективний простір. Наприклад, $\mathbb{P}^1 \simeq C$, де $C \subset \mathbb{P}^2$ – незвідна коніка, але $\deg \mathbb{P}^1 = 1$, в той час як $\deg C = 2$.

Зауваження. Нехай $\sqrt{\operatorname{Ann} M} = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{p}_i$ – первинний розклад $\sqrt{\operatorname{Ann} M}$. Тоді $PV(\operatorname{Ann} M) = \bigcup_{i=1}^s PV(\mathfrak{p}_i)$ є незвідним розкладом многовида $PV(\operatorname{Ann} M)$. Отже, $\dim PV(\operatorname{Ann} M) = \max_i \dim PV(\mathfrak{p}_i)$ $= \max_i(n - \operatorname{ht} \mathfrak{p}_i)$ (див. теорему 3.5.1 і твердження 3.5.10). Нагадаємо також, що $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s$ – це мінімальні серед первинних ідеалів, які містять $\operatorname{Ann} M$.

Спершу встановимо деякі властивості многочленів з $\mathbb{Q}[x]$, які приймають цілі значення в усіх цілих точках. Назвемо такі многочлени *цілими многочленами.*

Лема 5.7. (1) *Якщо $f \in \mathbb{Q}[x]$ – цілий многочлен степеня $d$, існують цілі $c_i$, такі що*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x+i}{i}. \tag{5.1}$$

*Зокрема, старший коефіцієнт $f$ дорівнює $c_d x^d/d!$ з цілим $c_d$.*

(2) *Якщо $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ – така функція, що для достатньо великих $k$* різницева функція $\Delta h(k)$ *збігається з цілим многочленом, то $h(k)$ також збігається для досить великих $k$ з цілим многочленом.*

Доведення. Доведемо *1* і *2* використовуючи для *1* індукцію за $d = \deg f$. Твердження *1* є тривіальним при $d = 0$. Тепер припустимо, що *1* справедливе для многочленів степеня $d-1$. Різницева функція многочлена степеня $d$ – многочлен степеня $d-1$. Отже, досить розглянути функцію $h(k)$, для якої $\Delta h(k)$ збігається при $k \geqslant k_0$ з цілим многочленом $g(x)$ вигляду

$$g(x) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \binom{x+i}{i}$$

для деяких цілих $c_i$. Покладемо

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} c_{i-1} \binom{x+i}{i} + h(k_0) - \sum_{i=1}^{d} c_{i-1} \binom{k_0+i}{i}.$$

Тоді $\Delta f(x) = g(x)$ і $f(k_0) = h(k_0)$, отже, $f(k) = h(k)$ для всіх $k \geqslant k_0$ і $f(x)$ має вигляд (5.1). $\square$

Доведення теореми 5.6. Скористаємось індукцією за $d(M)$. Спершу розглянемо випадок $d(M) = -1$ (тобто $M = \emptyset$), або, що те саме, $\sqrt{\operatorname{Ann} M} = I_+ = \langle\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,\rangle$ (див. теорему 2.1.3). Тоді $I_+^m M = 0$ для деякого $m$, звідки, очевидно, випливає, що $M_k = 0$ для досить великих $k$ (а саме, для $k > m + k_0$, де $k_0$ є найбільше ціле, таке що $M_{k_0}$ містить елементи з вибраної множини твірних). Тому $h_M(k) = 0$ для досить великих $k$.

Тепер припустимо, що теорема виконується для модулів $N$ з $d(N) = d(M) - 1$. Розглянемо випадок, коли $M = \mathbb{S}/\mathfrak{p}$ для первинного однорідного ідеала $\mathfrak{p} \neq I_+$. Виберемо $x_i \notin \mathfrak{p}$. Тоді множення на $x_i$ є мономорфізмом $M(-1) \to M$. (Ми пишемо тут $M(-1)$, оскільки $x_i u \in M_{k+1}$, коли $u \in M_k$, а $M(-1)_{k+1} = M_k$.) Отже $M$ містить підмодуль $x_i M \simeq M(-1)$. Покладемо $N = M/x_i M$. Тоді $h_N(k) = h_M(k) - h_{M(-1)}(k) = \Delta h_M(k)$. З іншого боку, $\operatorname{Ann} N = \mathfrak{p} + \langle\, x_i \,\rangle$, отже, за Теоремою Крулля про головний ідеал, $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = \operatorname{ht} \mathfrak{p} + 1$ для будь-якого мінімального первинного ідеала $\mathfrak{q} \supseteq \operatorname{Ann} N$, звідки $d(N) = d(M) - 1$. За припущеннями індукції, $h_N(k) = H_N(k)$ для досить великих $k$, де $H_N(k)$ є цілим многочленом степеня $d(N)$, отже, за лемою 5.7, $h_M(k) = H_M(k)$ для досить великих $k$, де $H_M(k)$ є цілим многочленом степеня $d(M)$.

Решта доведення спирається на наступну лему, яка є корисною і в багатьох інших випадках.

Лема 5.8. *Нехай* $\mathbf{A}$ *– градуйоване нетерове кільце,* $M$ *– скінченно породжений градуйований* $\mathbf{A}$*-модуль. Існує скінченна фільтрація*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_l = \langle\, 0 \,\rangle, \tag{5.2}$$

*де* $M_i$ *є однорідними підмодулями і* $M_{i-1}/M_i \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{p}_i(m_i)$ *для кожного* $i = 1, \ldots l$, *де* $\mathfrak{p}_i$ *– деякі однорідні первинні ідеали, а* $m_i$ *– деякі цілі числа.*

Така фільтрація надалі буде зватися “*доброю фільтрацією.*”

Маючи добру фільтрацію в скінченно породженому $\mathbb{S}$-модулі $M$, ми можемо обчислити $h_M(k)$ як $\sum_{i=1}^{l} h_{N_i}(k)$, де $N_i = \mathbb{S}/\mathfrak{p}_i(m_i)$. Як ми довели вище, кожен доданок збігається для досить великих $k$ з цілим многочленом $H_i(k)$ степеня $n - \operatorname{ht}\mathfrak{p}_i$. Тому $h_M(k)$ збігається для досить великих $k$ з цілим многочленом $H_M(k) = \sum_{i=1}^{l} H_i(k)$. Зауважимо тепер, що $\operatorname{Ann} M \subseteq \operatorname{Ann} M_{i-1}/M_i = \mathfrak{p}_i$ для кожного $i$ й $\operatorname{Ann} M \supseteq \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_l$. Отже, первинний ідеал $\mathfrak{p}$ містить $\operatorname{Ann} M$ тоді й лише тоді, коли він містить один з $\mathfrak{p}_i$. Тому $d(M) = \max_i \{\, n - \operatorname{ht}\mathfrak{p}_i \,\} = \deg H_M(k)$, що й завершує доведення теореми. □

Доведення леми 5.8. Розглянемо анулятори всіх ненульових однорідних елементів $M$. Вони є власними однорідними ідеалами в $\mathbf{A}$. Оскільки $\mathbf{A}$ нетерове, їхня множина містить максимальний елемент $I = \operatorname{Ann} v_0$. Ми покажемо, що ідеал $I$ первинний. Дійсно, нехай $ab \in I$ але $a \notin I$. Очевидно, ми можемо вибрати $a$ і $b$ однорідними. Тоді $av_0 \neq 0$, але $(I + \langle\, b \,\rangle)(av_0) = 0$. Оскільки $I$ є максимальним серед ануляторів, $b \in I$. Тому, якщо $v_0 \in M_m$, $\langle\, v_0 \,\rangle \simeq \mathbf{A}/I(m)$, тобто кожен (ненульовий) скінченно породжений градуйований $\mathbf{A}$-модуль $M$ містить підмодуль вигляду $\mathbf{A}/\mathfrak{p}(m)$. Оскільки $M$ нетеровий, можна вибрати максимальний підмодуль $N \subseteq M$, який має добру фільтрацію. Якщо $M/N \neq \langle\, 0 \,\rangle$, цей фактор-модуль має підмодуль вигляду $\mathbf{A}/\mathfrak{p}(m)$, отже, прообраз цього підмодуля в $M$ є більшим підмодулем $N' \supset N$, який має добру фільтрацію, що неможливо. Тому $N = M$ і лему доведено. □

Добра фільтрація модуля $M$, побудована в лемі 5.8, не є єдиною. Одначе, якщо $\mathfrak{p}$ є *мінімальним* первинним ідеалом, який містить $\operatorname{Ann} M$, кратність $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$ як фактора цієї фільтрації визначена однозначно, про що свідчить наступна лема.

Лема 5.9. *Нехай* $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_l = \{\, 0 \,\}$ *– добра фільтрація градуйованого* $\mathbf{A}$*-модуля* $M$*, як у лемі 5.8, і* $\mathfrak{p}$ *– мінімальний первинний ідеал, який містить* $\operatorname{Ann} M$*. Тоді число* $\operatorname{mult}_{\mathfrak{p}}(M) = \#\{\, i \mid \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \,\}$ *не залежить від вибору доброї фільтрації.*

Це число зветься *кратністю* $\mathfrak{p}$ в $M$.

Доведення. Для будь-якого $\mathbf{A}$-модуля $M$ і будь-якої мультиплікативної підмножини $S \subseteq \mathbf{A}$ визначимо модуль $M[\,S^{-1}\,]$ над кільцем $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$ як множину “формальних часток” $\{\, v/s \mid v \in M,$

$s \in S\,\}$ за тими самими правилами, що й для кільця часток, а саме:

$\dfrac{v}{s} = \dfrac{u}{t}$ тоді й лише тоді, коли існує $r \in S$, такий що $rtv = rsu$;
$\dfrac{v}{s} + \dfrac{u}{t} = \dfrac{tv + su}{st}$;
$\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{u}{t} = \dfrac{au}{st}$.

(В останньому рядку $a/s \in \mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$.) Легко перевірити, що ці правила насправді сумісні й визначають $\mathbf{A}[\,S^{-1}\,]$-модуль. Більш того, якщо $N \subseteq M$ є підмодулем, $N[\,S^{-1}\,]$ є підмодулем в $M[\,S^{-1}\,]$ і $M[\,S^{-1}\,]/N[\,S^{-1}\,] \simeq M/N[\,S^{-1}\,]$. (Кажуть, що ця процедура, або "функтор" $M \mapsto M[\,S^{-1}\,]$, є *точною*.)

Розглянемо випадок, коли $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$; тоді замість $M[\,S^{-1}\,]$ пишуть $M_{\mathfrak{p}}$. Нехай $N = \mathbf{A}/\mathfrak{q}$ для деякого первинного $\mathfrak{q}$. Якщо $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$, існує $s \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$, отже, для кожного $v \in N$ з $sv = 0$ випливає, що $v/t = 0$ в $N_{\mathfrak{p}}$ для всіх $t$, тобто $N_{\mathfrak{p}} = \{\,0\,\}$. Навпаки, якщо $N = \mathbf{A}/\mathfrak{p}$, то $N_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbf{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ є простим $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$-модулем.

Тепер, якщо задано добру фільтрацію $M$, ми одержимо фільтрацію $M_{\mathfrak{p}} = M_{0\mathfrak{p}} \supseteq M_{1\mathfrak{p}} \supseteq \ldots \supseteq M_{l\mathfrak{p}} = \{\,0\,\}$ з факторами $(\mathbf{A}/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}}$. Але тільки-но $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$, також і $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$ (оскільки $\mathfrak{p}$ мінімальний). Отже, лише ненульові фактори останньої фільтрації є такими, що $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, і всі вони – прості $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$-модулі. Тому $\operatorname{mult}_{\mathfrak{p}}(M)$ збігається з *довжиною* $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$-модуля $M_{\mathfrak{p}}$, яка, звичайно, не залежить від фільтрації. $\square$

Нехай тепер $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ – проективні многовиди. Відомо, що $X \cap Y = PV(I(X) + I(Y))$. Позначимо через $M(X.Y)$ фактор-модуль $\mathbb{S}/I(X) + I(Y)$. Тоді незвідні компоненти $X \cap Y$ мають вигляд $PV(\mathfrak{p})$, де $\mathfrak{p}$ пробігає мінімальні первинні ідеали, які містять $I(X) + I(Y) = \operatorname{Ann} M(X.Y)$. Для кожної такої компоненти $Z = PV(\mathfrak{p})$ покладемо $\operatorname{mult}(X.Y; Z) = \operatorname{mult}_{\mathfrak{p}}(M(X.Y))$. Це число також зветься *кратністю* $Z$ у перетині $X \cap Y$. Добра фільтрація (5.2) модуля $M = M(X.Y)$ дає таку рівність для многочлена Гільберта:

$$H_M(x) = \sum_Z \operatorname{mult}(X.Y; Z) H_Z(x)\,,$$

де $Z$ пробігає незвідні компоненти $X \cap Y$. Якщо нас цікавить *степінь* $M(X.Y)$, ми маємо лише розглянути компоненти найбільшого степеня в цій формулі, звідки

$$\deg(M(X.Y)) = \sum_Z \operatorname{mult}(X.Y; Z) \deg Z\,, \tag{5.3}$$

де $Z$ пробігає незвідні компоненти $X \cap Y$, такі що $\dim Z = \dim X \cap Y$.

Приклад 5.10 (Теорема Безу). Розглянемо випадок, коли $Y$ – гіперповерхня степеня $m$, тобто $I(Y) = \langle F \rangle$ з $\deg F = m$. Припустимо, крім того, що $Y$ не містить компонент $X$. Це означає, внаслідок Теореми Гільберта про нулі, що образ $F$ у $\mathbb{S}/I(X)$ не є дільником нуля. Отже, ми маємо точну послідовність

$$0 \longrightarrow \mathbb{S}/I(X)(-m) \xrightarrow{F} \mathbb{S}/I(X) \longrightarrow M(X.Y) \longrightarrow 0\,,$$

яка дає: $H_M(x) = H_X(x) - H_X(x-m)$, де $M = M(X.Y)$. Таким чином, старший коефіцієнт $H_M$ збігається зі старшим коефіцієнтом $ex^d/d! - e(x-m)^d/d!$, де $d = \dim X$, $e = \deg X$. Тому $\deg M = em$, що разом з (5.3) дає наступну формулу, відому як "*теорема Безу*":

$$\sum_Z \operatorname{mult}(X.Y;Z) \deg Z = \deg X \deg Y\,, \tag{5.4}$$

де $Z$ пробігає всі ті компоненти перетину $X \cap Y$, розмірність яких дорівнює $\dim X - 1$.

Теорема Безу є особливо простою, якщо $X$ і $Y$ – *плоскі криві*, тобто $n = 2$, $I(X) = \langle G \rangle$, $I(Y) = \langle F \rangle$, де $F$ і $G$ не мають спільних дільників. Тоді в (5.4) всі $Z$ є просто точками, отже, $\deg Z = 1$, звідки:

$$\sum_{p \in X \cap Y} \operatorname{mult}(X.Y;p) = \deg X \deg Y\,.$$

Це – класична теорема Безу для "числа коренів системи двох нелінійних рівнянь". Зауважимо, що, як часто буває, щоб одержати "гарну" форму теореми, треба запровадити "нескінченні точки," тобто перейти від афінної до проективної площини, а також трохи потурбуватися, щоб приписати "правильні" кратності кореням.

Вправи 5.11. Визначити *кратності* $\operatorname{mult}(X_1.X_2.\dots.X_k;Z)$ для перетину кількох многовидів і довести аналог формули (5.3) і теореми Безу. Зокрема, для $n$ гіперповерхонь $X_1, X_2, \dots, X_n$ у $\mathbb{P}^n$ "у загальному положенні" довести, що

$$\sum_{p \in \bigcup_{i=1}^n X_i} \operatorname{mult}(X_1.X_2.\dots.X_k;p) = \deg X \deg Y\,.$$

("Загальне положення" означає, що $\dim \bigcap_{i=1}^n X_i = 0$.)

# Покажчик

алгебра
  афінна, 15
  градуйована
    зв’язна, 104
  координатна, 5
    градуйована, 104
  редукована, 15
  ціла, 17
анулятор, 13
база
  трансцендентності, 50
висота
  ідеалу, 59
відображення
  біраціональне, 43
  домінантне, 19
  дотичне, 91
  кодотичне, 91
  обмеження, 19
  обчислення, 5
  раціональне, 42
    домінантне, 43
  регулярне, 6
  Фробеніусове, 7
Гільберта
  теорема про базу, 3
  теорема про нулі, 8
    проективна, 24
гіперповерхня, 2
  проективна, 23
гомоморфізм
  локальний, 91
група
  алгебрична, 78
  афінна, 79
ґрассманніан, 47
дерівація, 91
дія
  алгебричної групи, 78
добуток
  просторів з функціями, 33
елемент
  однорідний, 103
  цілий, 10
елементи
  алгебрично залежні, 50
  алгебрично незалежні, 50
замикання
  ціле, 13
занурення, 31
  Веронезе, 37
  відкрите, 31
  замкнене, 19, 31
  Сеґре, 36
ідеал
  визначальний, 5
  істотний, 25
  максимальний, 9
  однорідний, 23
  первинний, 17
  радикальний, 8
ізоморфізм
  алгебричних многовидів, 28
  афінних многовидів, 6
  просторів з функціями, 28
індукція
  нетерова, 17
кільце
  артінове, 65
  градуйоване, 103
  дискретної оцінки, 70
  локальне, 61
    регулярне, 85
  нетерове, 3
  нормальне, 68
  факторіальне, 67
  цілозамкнене, 68
  часток, 21
    повне, 21
компонента
  однорідна, 23, 103
компоненти, 18

незвідні, 18
первинні, 18
конус
афінний, 24
дотичний, 93
координати
ґрассманнові, 45
однорідні, 23
плюкерові, 45
корінь
ідеала, 8
корозмірність, 73
кратність, 107, 108
крива
плоска, 2, 23
локалізація, 63
многовид
алгебричний, 29
афінний, 2, 29
Веронезе, 37
відокремлюваний, 38
гладкий, 85
ґрассманнів, 47
квазіпроективний, 27
нормальний, 68
особливий, 85
повний, 39
проективний, 23, 29
раціональний, 44
Сегре, 36
многовиди
бираціонально еквівалентні, 43
многочлен
Гільберта, 105
мінімальний, 69
однорідний, 23
унітальний, 69
цілий, 105
множина
головна відкрита, 7
мультиплікативна, 20
породжуюча, 11
модуль, 11
градуйований, 103
зсунутий, 103
нетеровий, 12
скінченно породжений, 12
точний, 13
морфізм
алгебричних многовидів, 29
афінних многовидів, 6
векторних розшарувань, 48
просторів з функціями, 27
Нетера
нормалізаційна лема, 11
проективна, 58
нормалізація, 80
обмеження
простору з функціями, 28
образ
обернений
векторного розшарування, 49
орбіта, 78
перерізи
пучка, 19
перетворення
афінне, 7
Кремони, 44
перетин
повний, 75
множинний, 75
підмноговид, 30
відкритий, 30
замкнений, 30
підмножина
конструктивна, 57
локально замкнена, 30
підмодуль, 11
однорідний, 103
породжений множиною, 12
підрозшарування, 48
поверхня
просторова, 2, 23
покриття
афінне
канонічне, 25
поле
лишків, 61
проекція
центральна, 58
простір
афінний, 2
дотичний, 90
з функціями, 27
відокремлюваний, 38
кодотичний, 90
незвідний, 16
нетеровий, 16
проективний, 23
пучок, 19
структурний, 20, 26
ранг
векторного розшарування, 48
розклад

незвідний, 18
первинний, 18
розмірність, 59
в точці, 85
занурення, 85
в точці, 86
комбінаторна, 59
круллева, 59
розшарування
векторне, 48
розширення
скінченного типу, 15
ціле, 10
чисто трансцендентне, 50
ряд
Тейлора, 88
склеювання, 81
морфізмів, 33
спектр, 59
максимальний, 16
стабілізатор, 78
стебло, 61
степінь
многовида, 105
модуля, 105
символічний, 64
трансцендентності, 50
топологія
Зариського, 4, 24
точка
особлива, 85
регулярна, 85
раціонального відображення, 42
спеціальна
раціонального відображення, 42
фактор-модуль, 11
функція
Гільберта, 104
раціональна, 42
регулярна, 5, 20, 27

# Зміст


Розділ 1. Афінні многовиди 2
- 1.1. Ідеали і многовиди. Теорема Гільберта про базу 2
- 1.2. Регулярні функції та регулярні відображення 5
- 1.3. Теорема Гільберта про нулі 7
- 1.4. Ціла залежність 10
- 1.5. Геометрія і алгебра 15
- 1.6. Структурний пучок. Кільця часток 19

Розділ 2. Проективні та абстрактні многовиди 23
- 2.1. Проективні многовиди та однорідні ідеали 23
- 2.2. Абстрактні алгебричні многовиди 27
- 2.3. Добутки многовидів 33
- 2.4. Відокремлювані та повні многовиди 38
- 2.5. Раціональні відображення 42
- 2.6. Ґрассманнові многовиди й векторні розшарування 45
- A. Додаток: Степінь трансцендентності 50

Розділ 3. Теорія розмірності 54
- 3.1. Скінченні морфізми 54
- 3.2. Розмірності 60
- 3.3. Локальні кільця 62
- 3.4. Нормальні многовиди 69
- 3.5. Розмірності афінних і проективних многовидів 74
- 3.6. Розмірності шарів 78
- 3.7. Нормалізація 82

Розділ 4. Регулярні та особливі точки 87
- 4.1. Регулярні кільця та гладкі многовиди 87
- 4.2. Структура регулярних локальних кілець 89
- 4.3. Дотичний простір 92
- 4.4. Роздуття 96
- 4.5. Повні локальні кільця 100
- 4.6. Будова многовиду в околі регулярної точки 104

Розділ 5. Теорія перетинів 109

Покажчик 116