В.М.Бондаренко, Ю.А.Дрозд

ПРЕДСТАВЛЕНЧЕСКИЙ ТИП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Хорошо известно (см., напр.[6], §64), что конечная группа имеет конечное число неизоморфных неразложимых представлений над полем характеристики p тогда и только тогда, когда ее силовская p-подгруппа циклична. Классификация представлений нециклической p-группы G, как правило, является задачей чрезвычайной трудности. Точнее, из результатов работ [5], [9] следует, что если $(G:G')>4$, где G' - коммутант G, то эта задача включает в себя классическую нерешенную задачу о приведении пары матриц одновременными подобными преобразованиями (такие задачи называются "дикими" (*wild*) и считаются, в некотором смысле, безнадежными). Нециклические p-группы, для которых $(G:G')\leqslant 4$, т.е. G/G' - группа типа (2.2), исчерпывается тремя сериями 2-групп (см., напр. [10]):

диэдральные группы $\mathcal{D}_m=\langle x,y\,|\,x^2=y^{2^m}=1,\ yx=xy^{-1}\rangle$,

квазидиэдральные группы $Q_m=\langle x,y\,|\,x^2=y^{2^m}=1,\ yx=xy^{2^{m-1}-1}\rangle$,

обобщенные группы кватернионов $H_m=\langle x,y\,|\,x^2=y^{2^{m-1}},\ yx=xy^{-1}\rangle$.

Представления диэдральных групп описаны в [2], [12]*. В настоящей работе (§3) дается классификация представлений квазидиэдральных групп**. В обоих случаях неразложимые представления зависят от нескольких "дискретных" и одного "непрерывного" параметра, т.е. задача их описания является "ручной" (*tame*). Кроме того, используя данные в [4] определения ручных и диких задач, мы показываем (§I), что если группа G ручная над полем K, то и всякая ее подгруппа является ручной над этим полем. Поскольку группа H_m изоморфна подгруппе группы Q_{m+1}, порожденной элементами xy и y^2, отсюда следует

ТЕОРЕМА I. Нециклическая конечная p-группа G является ручной над полем K характеристики p тогда и только тогда, когда $(G:G')\leqslant 4$. В противном случае группа G - дикая над полем K.

Для произвольной конечной группы G вопрос о ее представленческом типе над полем K сводится в §I к аналогичному вопросу для ее силовской p-подгруппы G_p. Именно, доказывается, что G явля-

---

* Представления $\mathcal{D}_1$, т.е. группы типа (2,2), впервые описаны в [I]

**Соответствующий результат анонсирован в [3].

ется ручной или полудикой* над K одновременно с G_p. Учитывая, что $\mathcal{D}_m, Q_m, H_m$ – в точности все те -группы, нециклические абелевы подгруппы которых имеют порядок не больше 4 (это следует, например, из [II]), получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 2. Конечная группа G является ручной над полем K характеристики p тогда и только тогда, когда всякая ее нециклическая абелева p-подгруппа имеет порядок не больше 4. В противном случае группа G – полудикая над полем K.

Заметим, что в §3 решена более общая задача, чем описание представлений квазидиэдральных групп. Именно, здесь описаны представления локальных алгебр $\Lambda_n = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 0,\ a^2 = (ba)^n b \rangle$ над произвольным полем K (если $\operatorname{char} K = 2$, классификация представлений Q_m практически совпадает с классификацией представлений Λ_n при $n = 2^{m-1} - 1$ (см. §3)). Эти алгебры образуют одну из двух серий локальных алгебр, для которых вопрос о представленческом типе до сих пор оставался открытым [13]. Таким образом, единственными локальными алгебрами, представленческий тип которых неизвестен, остаются алгебры $\Lambda'_n = \langle a, b \mid a^2 = (ba)^n b,\ b^2 = (ab)^n a \rangle$, $n \geqslant 1$.

Описание представлений алгебры Λ_n сводится к некоторой матричной задаче (классификации S-представлений), которая решается в §2. Отметим, что частным случаем этой задачи является также задача, решенная в [2] при описании представлений диэдральных групп.

Авторы выражают глубокую благодарность А.В.Ройтеру за интерес, проявленный к этой работе, полезные советы и обсуждение полученных результатов, которое оказало большую помощь при подготовке настоящей статьи.

§ I. Ручные и дикие алгебры и группы

Пусть Λ – некоторая алгебра над полем K. Представлением алгебры Λ над K-алгеброй Γ называется гомоморфизм алгебры Λ в алгебру $M_n(\Gamma)$ квадратных матриц размерности n с коэффициентами из Γ. Как известно, задать представление – это все равно, что задать Λ – Γ-бимодуль ${}_{\Lambda}M_{\Gamma}$, который, как Γ-модуль, является свободным модулем конечного ранга. При этом изоморфным бимодулям

* Группа G называется полудикой над K, если задача описания ее представлений содержит задачу о подобии пар матриц "с точностью до конечного отношения эквивалентности" (точное определение см. [4] и §I).

соответствуют подобные представления и наоборот. В дальнейшем мы будем, как правило, отождествлять представление с бимодулем M. Число n (ранг свободного Γ-модуля M) называется размерностью представления и будет обозначаться $d(M)$. Представления алгебры Λ над алгеброй Γ образуют аддитивную категорию $R(\Lambda,\Gamma)$. В частном случае, когда $\Gamma=K$, $R(\Lambda,K)$ – это просто категория всех Λ-модулей, конечномерных над K. Множество представлений размерности n мы будем обозначать $R_n(\Lambda,\Gamma)$.

Дадим определение ручной и дикой алгебры, которое является частным случаем аналогичных определений из [4]. Все алгебры мы будем считать конечнопорожденными. Через $\bar{K}$ обозначим сепарабельное замыкание поля K.

Алгебру Λ назовем ручной, если существует такое множество $S=\{M_i \mid M_i\in R(\Lambda,\Gamma_i)\}$ ее представлений, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) каждая алгебра Γ_i является конечнопорожденной $\bar{K}$-подалгеброй в поле рациональных функций $\bar{K}(x)$, содержащей кольцо многочленов $\bar{K}[x]$;

(2) для каждого n во множестве S есть лишь конечное число представлений размерности n;

(3) для любого неразложимого представления V алгебры Λ над полем $\bar{K}$ найдутся такие представления $M_i\in S$ и $N\in R(\Gamma_i,\bar{K})$, что $V\simeq M_i\otimes_{\Gamma_i}N$ *.

Множество S назовем параметризующим семейством представлений алгебры Λ.

Алгебру Λ назовем полудикой, если у нее найдется такое представление $M\in R(\Lambda,\Phi)$, где $\Phi=K\{x,y\}$ – свободная алгебра с двумя образующими, что для любого представления $N\in R(\Phi,\bar{K})$ существует лишь конечное число попарно неизоморфных представлений $N_i\in R(\Phi,\bar{K})$ таких, что $M\otimes_\Phi N\simeq M\otimes_\Phi N_i$. Если, более того, из $M\otimes_\Phi N\simeq M\otimes_\Phi N'$ следует, что $N\simeq N'$, алгебру Λ назовем дикой.

В [4] показано, что никакая алгебра не может быть ручной и полудикой одновременно.

Будем говорить, что группа G ручная (полудикая, дикая) над полем K, если групповая алгебра KG является ручной (полудикой, дикой).

* Как отмечено в [4], всегда можно считать, что $d(N)=1$; кроме того, если алгебра Λ конечномерна, то в качестве Γ_i всегда можно взять кольцо многочленов к .

Расширением алгебры Λ будем называть такую алгебру $\Sigma \supset \Lambda$, которая как правый Λ-модуль является свободным модулем конечного ранга, а как Λ-бимодуль разлагается в прямую сумму $\Lambda \oplus B$ (т.е. подбимодуль Λ дополняем в Σ). Если, кроме того, эпиморфизм Σ-бимодулей $\Sigma \otimes_\Lambda \Sigma \to \Sigma$ (переводящий $a \otimes b$ в ab) расщепляем, будем говорить, что Σ - сепарабельное расширение алгебры Λ.

Для любого расширения $\Sigma \supset \Lambda$ определен функтор ограничения $Res: R(\Sigma,\Gamma) \to R(\Lambda,\Gamma)$: для любого представления $M \in R(\Sigma,\Gamma)$ $Res\, M$ - это просто M, рассматриваемое как представление Λ над Γ. Очевидно, $d(Res\, M) = d(M)$. Кроме того, определен функтор индуцирования $Ind: R(\Lambda,\Gamma) \to R(\Sigma,\Gamma)$, переводящий $N \in R(\Lambda,\Gamma)$ в $Ind\, N = \Sigma \otimes_\Lambda N \in R(\Sigma,\Gamma)$. При этом $d(Ind\, N) = r d(N)$, где r - ранг Σ как свободного Λ - модуля (степень расширения).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть Σ - расширение алгебры Λ. Тогда $Res(Ind\, N) \simeq N \otimes X$ для любого $N \in R(\Lambda,\Gamma)$. Если, кроме того, это расширение сепарабельно, то $Ind(Res\, M) \simeq M \otimes Y$ для любого $M \in R(\Sigma,\Gamma)$.

Доказательство первого утверждения тривиально, а второе следует из того, что

$$\Sigma \otimes_\Lambda M \simeq \Sigma \otimes_\Lambda (\Sigma \otimes_\Sigma M) \simeq (\Sigma \otimes_\Lambda \Sigma) \otimes_\Sigma M \simeq (\Sigma \oplus I) \otimes_\Sigma M,$$

где I - ядро эпиморфизма $\Sigma \otimes_\Lambda \Sigma \to \Sigma$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть Σ - расширение степени r алгебры Λ. Если Γ - поле, то всякое неразложимое представление $N \in R(\Lambda,\Gamma)$ изоморфно прямому слагаемому представления вида $Res\, M$, где M - некоторое неразложимое представление Σ над Γ размерности $d(M) \leqslant r d(N)$. Если, кроме того, это расширение сепарабельно, то всякое неразложимое представление $M \in R(\Sigma,\Gamma)$ изоморфно прямому слагаемому представления $Ind\, N$, где N - некоторое неразложимое представление Λ над Γ размерности $d(N) \leqslant d(M)$.

Доказательство непосредственно вытекает из предложения I и теоремы Крулля-Шмидта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (I) Пусть Σ - расширение алгебры Λ. Тогда если алгебра Σ ручная, то и алгебра Λ ручная. Если Λ полудикая, то и Σ полудикая.

(2) Пусть Σ - сепарабельное расширение алгебры Λ. Тогда если алгебра Λ ручная, то и алгебра Σ ручная. Если Σ полудикая, то и Λ полудикая*.

---

* Утверждения (I) и (2) о дикости алгебр Σ и Λ авторам неизвестны (но неизвестны и контрпримеры к ним).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) Пусть алгебра Σ ручная, $S=\{M_i\}$ – параметризующее семейство ее представлений. Тогда, ввиду следствия I, всякое неразложимое представление $V\in R(\Lambda,\bar{K})$ изоморфно прямому слагаемому представления $Res(M_i\otimes_{\Gamma_i}N)\simeq(Res M_i)\otimes_{\Gamma_i}N$ для некоторого $M_i\in S$ и $N\in R_1(\Gamma_i,\bar{K})$, причем $d(Res M_i)=d'(M_i)\leqslant \tau d(V)$. Как показано в [4], отсюда следует, что Λ – ручная алгебра.

Предположим теперь, что алгебра Λ полудикая, M – соответствующее представление Λ над $\Phi=K\{x,y\}$. Положим $N=\Sigma\otimes_\Lambda M$. Если для некоторых представлений $U,V\in R(\Phi,\bar{K})$ существует изоморфизм $N\otimes_\Phi U\simeq N\otimes_\Phi V$, это означает, что $Ind(M\otimes_\Phi U)\simeq Ind(M\otimes_\Phi V)$. Но, очевидно, есть всего конечное число таких представлений $V_i\in R(\Lambda,\bar{K})$, что $Ind V_i$ – заданное представление Σ над $\bar{K}$. Поэтому при фиксированном U для $M\otimes_\Phi V$, а, следовательно, и для V есть лишь конечное число возможностей. Значит, Σ – полудикая алгебра.

Совершенно аналогично доказывается и (2).

Применим полученные результаты к представлениям групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (I) Пусть H – подгруппа конечного индекса τ группы G. Тогда, если группа G ручная над полем K, то и H ручная над полем K. Если H полудикая над K, то и G полудикая над K.

(2) Предположим, что индекс τ не делится на $char\,K$. Тогда если группа H ручная над полем K, то и G ручная над полем K. Если G полудикая над K, то и H полудикая над G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I) следует из предложения 2 (I), поскольку $KG=KH\oplus B$, где $B=\Sigma\sigma(KH)$ (σ пробегает представителей классов смежности G по H, отличных от H) является KH-подбимодулем в KG.

(2) следует из предложения 2 (2), поскольку отображение $\varphi: KG\to KG\otimes_{KH}KG$ переводящее $g\in G$ в $\frac{1}{\tau}\sum_\sigma \sigma^{-1}\otimes\sigma g$ (σ пробегает представителей всех правых смежных классов G по H), является гомоморфизмом KG-бимодулей, расщепляющим эпиморфизм $KG\otimes_{KH}KG\to KG$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – конечная группа, G_p – ее силовская p-подгруппа, где $p=char\,K$. Тогда группы G и G_p являются ручными (полудикими) над K одновременно.

Пример применения предложения 3 к бесконечным группам дает

СЛЕДСТВИЕ 3. Свободное произведение $\mathcal{D}_\infty$ двух групп второго порядка является ручной группой над любым полем K.

Доказательство для $char\,K=2$ следует из [2], [12]. Если же

$\mathrm{char}K\neq 2$, то наше утверждение вытекает из предложения 3 (2) и того, что $\mathcal{D}_\infty$ содержит ручную подгруппу индекса 2 – бесконечную циклическую группу.

Таким образом, для доказательства теорем I и 2 остается проверить, что группы Q_m являются ручными над произвольным полем характеристики 2.

§ 2. S-представления

В этом и следующем параграфе нам часто придется иметь дело с клеточными матрицами, т.е. матрицами A, разбитыми на горизонтальные и вертикальные полосы, которые занумерованы элементами некоторого множества I. Клетку, стоящую на пересечении i-й горизонтальной и j-й вертикальной полос, мы будем обозначать A_i^j; i-ю горизонтальную (вертикальную) полосу – A_i (A^j) (здесь всюду $i,j\in I$)*. Некоторые полосы A_i или A^i могут отсутствовать (быть "пустыми" или иметь 0 строк, см. [8]). Будем говорить, что горизонтальное разбиение клеточной матрицы A согласовано с вертикальным разбиением клеточной матрицы B (и наоборот), если число строк в полосе A_i равно числу столбцов в полосе B^i для любого $i\in I$. В этом случае определено произведение $C=BA$, которое также является клеточной матрицей, причем ее можно считать поклеточно: $C_i^j=\sum_{k\in I}B_i^k A_k^j=B_iA^j$. Аналогичным образом определяется согласованность горизонтальных (вертикальных) разбиений двух матриц. В дальнейшем будем всегда считать, что при согласованных разбиениях полосы расположены в одном и том же порядке.

Если в i-й горизонтальной (вертикальной) полосе клеточной матрицы A проведено дополнительное разбиение на более мелкие полосы, то номера этих полос мы будем приписывать в виде второго нижнего (верхнего) индекса: A_{ik} (A^{ik}). Аналогично, дальнейшее разбиение приведет к появлению третьего индекса и т.д.

Сформулируем на языке клеточных матриц одну матричную задачу, к которой, как будет показано в §3, сводится вычисление представлений квазидиэдральных групп.

Пусть $\mathcal{Y}$ – линейно упорядоченное конечное множество, β – бинарное симметричное отношение на $\mathcal{Y}$, причем для любого $x\in\mathcal{Y}$ существует не более одного $y\in\mathcal{Y}$ такого, что $\beta(x,y)$ (возможно, $y=x$). Класс всех множеств такой структуры обозначим $\mathfrak{S}$. Для

---

*n-ю степень клеточной матрицы мы будем обозначать $(A)^n$, чтобы не перепутать ее с вертикальной полосой A^n (если $n\in I$).

всякого $x \in \mathcal{Y}$ такого, что $\beta(x,x)$, введем новый символ $\bar{x}$ и обозначим $\bar{\mathcal{Y}}$ объединение $\mathcal{Y}$ со множеством всех $\bar{x}$. Распространим на $\bar{\mathcal{Y}}$ порядок, считая, что неравенства $\bar{x} < y$, $x < \bar{y}$ и $\bar{x} < \bar{y}$ (точнее, те из них, которые имеют смысл) выполняются тогда и только тогда, когда $x < y$. Заметим, что элементы x и $\bar{x}$ всегда несравнимы в $\bar{\mathcal{Y}}$. Построим категорию $S(\mathcal{Y},K)$ S-представлений множества $\mathcal{Y} \in \mathfrak{S}$ над полем K следующим образом. Объектами этой категории (S-представлениями $\mathcal{Y}$ над K) будут клеточные квадратные матрицы $B=(B_i^j)$ $(i,j \in \bar{\mathcal{Y}})$ с коэффициентами из K такие, что:

а) горизонтальное и вертикальное разбиения B согласованы;

б) если $x,y \in \mathcal{Y}$ – такие элементы, что $\beta(x,y)$, то полосы B_x и B_y имеют одинаковое число строк (а потому B^x и B^y имеют одинаковое число столбцов);

в) $(B)^2=0$ (или, что то же, $B_i B^j = 0$ для всех $i,j \in \bar{\mathcal{Y}}$).

Морфизмом S-представления B в S-представление C назовем клеточную матрицу $T=(T_i^j)$ $(i,j \in \bar{\mathcal{Y}})$ с коэффициентами из K такую, что:

а) горизонтальное (вертикальное) разбиение T согласовано с вертикальным (горизонтальным) разбиением $C(B)$;

б) $TB=CT$;

в) если $j \nleq i$ в , то $T_i^j = 0$;

г) если $\beta(x,y)$ $(x,y \in \mathcal{Y})$, то $T_x^x = T_y^y$.

Очевидно, $S(\mathcal{Y},K)$ – аддитивная категория, причем морфизм $T=(T_i^j)$ обратим тогда и только тогда, когда все "диагональные" клетки T_i^i обратимы.

Размерностью S-представления B назовем целочисленный вектор $d=d(B)=(d_i)$ $(i \in \bar{\mathcal{Y}})$, где d_i – число строк в полосе B_i (или число столбцов в полосе B^i). Множество всех представлений данной размерности d обозначим $S_d(\mathcal{Y},K)$.

Мы покажем, что описание S-представлений сводится к матричной задаче, решенной Л.А.Назаровой и А.В.Ройтером в работе [8]. Напомним соответствующее определение в удобном для нас виде.

Пусть E и F – два непересекающихся линейно упорядоченных множества, α – бинарное симметричное отношение на их объединении $X=E \cup F$, причем для любого $x \in X$ существует не более одного $y \in X$ такого, что $\alpha(x,y)$ (возможно, $x=y$). Класс всех множеств такой структуры обозначим $\mathfrak{X}$. Для всякого $x \in X$ такого, что $\alpha(x,x)$, введем новый символ $\bar{x}$ и обозначим $\bar{E}$ $(\bar{F})$ объединение E (F) с множеством всех $\bar{x}$ для $x \in E$ $(x \in F)$. Распространим на $\bar{E}$ и $\bar{F}$ порядок, подобно тому, как мы это сделали выше для $\bar{\mathcal{Y}}$, и положим $\overline{X}=E\cup\overline{F}$. Определим категорию $\Gamma(X,K)$ следующим образом. Ее объектами (Γ-представлениями множества $X\in\mathfrak{X}$ над полем K) будут клеточные матрицы $A=(A_i^j)$ ($i\in\overline{E}$, $j\in F$) с коэффициентами из поля K такие, что:

а) если $\alpha(x,y)$, где $x,y\in E$ ($x,y\in F$), то число строк в полосах A_x и A_y (соответственно, столбцов в A^x и A^y) одинаково;

б) если $\alpha(x,y)$, где $x\in E$, $y\in F$, то число строк в полосе A_x равно числу столбцов в полосе A^y.

Морфизмом Γ-представления A в Γ-представление B назовем пару клеточных матриц (S_1,S_2), где $S_1=(S_i^j)$ ($i,j\in\overline{E}$), $S_2=(S_i^j)$ ($i,j\in\overline{F}$), такую, что:

а) горизонтальное (вертикальное) разбиение S_1 согласовано с горизонтальным разбиением $B(A)$;

б) вертикальное (горизонтальное) разбиение S_2 согласовано с вертикальным разбиением $A(B)$;

в) $S_1A=B_1S_2$;

г) если $j\nleq i$ в $\overline{E}$ (или F), то $S_i^j=0$;

д) если $\alpha(x,y)$ ($x,y\in X$), то $S_x^x=S_y^y$;

Нетрудно убедиться, что классификация Γ-представлений с точностью до изоморфизма – это в точности та задача, которая сформулирована в [8] на языке элементарных преобразований.

Размерностью Γ-представления A назовем целочисленный вектор $d=d(A)=(d_i)$ ($i\in\overline{X}$), где d_i при $i\in\overline{E}$ ($i\in\overline{E}$) – число строк (столбцов) в полосе A_i (A^i). Множество всех представлений размерности d обозначим $\Gamma_d(X,K)$.

Пусть $\Gamma^*(X,K)$ – полная подкатегория категории $\Gamma(X,K)$, состоящая из матриц с линейнонезависимыми строками, $\Gamma_d^*(X,K)=\Gamma_d(X,K)\cap\Gamma^*(X,K)$; $S^*(Y,K)$ – полная подкатегория $S(Y,K)$, состоящая из S-представлений, не содержащих нулевых прямых слагаемых, $S_d^*(Y,K)=S_d(Y,K)\cap S^*(Y,K)$.

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 3. Для любого множества $Y\in\mathfrak{S}$ существует множество $X\in\mathfrak{X}$ и аддитивный функтор $\Psi:\Gamma^*(X,K)\to S^*(Y,K)$ такой, что

(1) всякий неразложимый объект из $S^*(Y,K)$ изоморфен $\Psi(A)$ для некоторого объекта $A\in\Gamma^*(X,K)$;

(2) если $\Psi(A)\simeq\Psi(B)$, то и $A\simeq B$;

(3) для любого целочисленного вектора $d=(d_i)(i\in\overline{X})$ найдется такой вектор $\psi(d)=(d_i')$ ($i\in\overline{Y}$), что $\Psi(\Gamma_d^*(X,K)\subset S_{\psi(d)}^*(Y,K)$,

причем индуцированное отображение $\Gamma_d^*(X,K) \to S^*_{\Psi(d)}(\mathcal{Y},K)$ является морфизмом алгебраических многообразий.

Функтор, удовлетворяющий условиям (I)-(3), мы будем называть классифицирующим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Построение X и Ψ.

Сопоставим всякому элементу $x \in \mathcal{Y}$ два новых символа x_+ и x_-. Кроме того, если существует $y \in \mathcal{Y}$ такой, что $\beta(x,y)$, то введем еще два символа x_+° и x_-°. Пусть $E(F)$ – множество всех символов x_+ и x_+° (соответственно, x_- и x_-°), $X = E \cup F$. Введем на E и F порядок, считая, что

$$x_+^\circ < x_+ \quad \text{и} \quad x_-^\circ < x_- \quad \text{для любого } x \in X;$$

$$x_+ < y_+, \quad x_+^\circ < y_+, \quad x_+ < y_+^\circ \text{ и } x_+^\circ < y_\circ^+, \text{как только } x < y;$$

$$x_- < y_-, \quad x_-^\circ < y_-, \quad x_- < y_-^\circ \text{ и } x_-^\circ < y_-^\circ, \text{как только } x > y.$$

Отношение α на X определим, считая, что в нем находятся пары вида (x_+, y_+), (x_-, y_-) и (x_+°, y_-°) при $\beta(x,y)$ и только они. Очевидно, $X \in \mathfrak{X}$.

Обозначим $\mathcal{Y}_1 = \{x \in \mathcal{Y} \mid \overline{\beta}(x,y)$ для всех $y \in \mathcal{Y}\}$;

$$\mathcal{Y}_2 = \{x \in \mathcal{Y} \mid \beta(x,x)\}; \qquad \overline{\mathcal{Y}}_2 = \{\overline{x} \mid x \in \mathcal{Y}_2\};$$

$$\mathcal{Y}_3 = \{x \in \mathcal{Y} \mid \beta(x,y) \text{ для некоторого } y > x\};$$

$$\mathcal{Y}_4 = \{x \in \mathcal{Y} \mid \beta(x,y) \text{ для некоторого } y < x\}.$$

Определим отображение $f: \overline{X} \to \mathcal{Y} \times N$, полагая:

$$f(x_+) = \begin{cases} (x,2) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_1 \\ (x,3) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_2 \\ (x,4) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_3 \cup \mathcal{Y}_4 \end{cases}$$

$$f(x_+^\circ) = \begin{cases} (x,2) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_4 \\ (x,3) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_3 \end{cases}$$

$$f(x_-^\circ) = \begin{cases} (x,2) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 \\ (x,3) & \text{при } x \in \mathcal{Y}_4 \end{cases}$$

$$f(x_-) = (x,1); \quad f(\overline{x}_+) = (\overline{x},3); \quad f(\overline{x}_-) = (\overline{x},1); \quad f(\overline{x}_\pm^\circ) = (\overline{x},2).$$

Пусть теперь $A = (A_i^j)$ – объект $\Gamma^*(X,K)$. Построим S-представление $B = \Psi(A)$ следующим образом. Горизонтальные и вертикальные полосы B будут согласованным образом разбиты на более мелкие полосы B_{ik} и B^{ik}, где $i \in \overline{\mathcal{Y}}$, а K принимает следующие значения:

$$K=1,2 \text{ при } i\in Y_1;$$
$$K=1,2,3 \text{ при } i\in Y_2\cup\overline{Y}_2;$$
$$K=1,2,3,4 \text{ при } i\in Y_3\cup Y_4;$$

Клетки B_{ik}^{jl} определим следующим образом:

$B_{ik}^{jl}=A_s^t$, если $(i,k)=f(s)$, $(j,l)=f(t)$, где $s\in\overline{E}$, $t\in F$ и $t\neq\overline{x}_-^o$;

$B_{ik}^{\overline{x}2}=-A_s^t$, если $(i,k)=f(s)$, где $s\in\overline{E}$, а $t=\overline{x}_-^o$;

$B_{ik}^{jl}=0$ во всех остальных случаях (размеры этих нулевых клеток – наименьшие такие, чтобы выполнялись условия а) и б) из определения S -представления). Непосредственно проверяется, что $(B)^2=0$, т.е. B является S -представлением множества Y. Из дальнейшего будет следовать, что $B\in S^*(Y,K)$. Очевидно, тогда выполняется условие (3) теоремы.

Аналогично определяется действие Ψ на морфизмах категории $\Gamma^*(X,K)$, так что получается аддитивный функтор $\Psi:\Gamma^*(X,K)\to S^*(Y,K)$.

2) Проверка условий (I) и (2).

Эта проверка основывается на следующей простой лемме о матрицах с коэффициентами в поле K.

ЛЕММА I. а) Для любой матрицы A найдется обратимая матрица S такая, что

$$SA=\begin{pmatrix}0\\A_1\end{pmatrix}$$

где строки A_1 линейно независимы.

б) Для любых двух матриц A и B с одинаковым числом столбцов найдутся такие обратимые матрицы S и T, что

$$SA=\begin{pmatrix}0\\A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad TB=\begin{pmatrix}0\\A_1\\B_2\end{pmatrix}$$

где строки матриц A_1, A_2, B_2 линейно независимы в совокупности.

в) Для любых двух матриц A и B с одинаковым числом строк найдется такая обратимая матрица S, что

$$SA=\begin{pmatrix}0\\0\\A_1\\A_2\end{pmatrix},\quad SB=\begin{pmatrix}0\\B_1\\0\\B_2\end{pmatrix}$$

3 443

(разбиения обеих матриц согласованы), где строки матриц A_1 и A_2, а также строки матриц B_1 и B_2, линейно независимы в совокупности.

Указанный вид сохраняется при умножении справа на произвольные обратимые матрицы.

Доказательства очевидны.

Пусть теперь B – произвольное S-представление множества Y. Заменяя B на TBT^{-1}, где T – обратимая клеточная матрица той же размерности такая, что $T_i^j=0$ при $i\neq j$, а $T_x^x=T_y^y$ при $\beta(x,y)$, и учитывая лемму I, мы видим, что существует представление C, изоморфное B, и такое, что ее горизонтальные полосы имеют вид:

$$C_x=\begin{pmatrix}0\\ \bar{C}_x\end{pmatrix} \quad (x\in Y_1),$$

где строки $\bar{C}_x$ линейно независимы;

$$C_x=\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{D}_x\\ \bar{C}_x\end{pmatrix},\quad C_{\bar{x}}=\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{D}_x\\ \bar{C}_{\bar{x}}\end{pmatrix} \quad (x\in Y_2),$$

где строки $\mathcal{D}_x$, $\bar{C}_x$ и $\bar{C}_{\bar{x}}$ линейно независимы в совокупности;

$$C_x=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \mathcal{D}_x\\ \bar{C}_x\end{pmatrix},\quad C_y=\begin{pmatrix}0\\ \mathcal{D}_y\\ 0\\ \bar{C}_y\end{pmatrix} \quad (\beta(x,y),\ x<y)$$

(разбиения одинаковые), где строки $\mathcal{D}_x$ и $\bar{C}_x$ ($\mathcal{D}_y$ и $\bar{C}_y$) линейно независимы в совокупности. Мы будем предполагать, что общее число строк матриц $\mathcal{D}_x, \bar{C}_x$ и $\bar{C}_{\bar{x}}$ наименьшее среди всех S-представлений такого вида, изоморфных B. Тогда, как легко видеть, строки всех матриц $\mathcal{D}_x$, $\bar{C}_x$, $\bar{C}_{\bar{x}}$ линейно независимы в совокупности: иначе либо какую-нибудь из них можно сделать нулевой, либо какие-нибудь две строки из $\bar{C}_x$ и $\bar{C}_{\bar{x}}$ можно сделать равными и отнести в $\mathcal{D}_x$, отчего общее число строк в $\mathcal{D}_x, \bar{C}_x, \bar{C}_{\bar{x}}$ уменьшится на I.

Разобьем вертикальные полосы C^i на части, согласовано с указанным разбиением горизонтальных полос C_i и занумеруем новые полосы числами I,2,3,4 в естественном порядке. Тогда из линейной независимости строк $\mathcal{D}_x, \bar{C}_x, \bar{C}_{\bar{x}}$ и того, что $(C)^2=0$ сразу следует, что все полосы C^{jl} такие, что $(j,l)\neq f(t)$ ни для какого $t\in\bar{F}$ – нулевые. Заметим, что горизонтальные полосы C_{ik} такие, что $(i,k)=f(s)$ ни для какого $s\in\bar{E}$, нулевые по построению. Кроме того, из тех же соображений получаем, что

$C^{\bar{x}z} = -C^{xz}$ (а по построению $C_{\bar{x}z} = C_{xz}$). Но это как раз и означает, что C может отличаться от $\Psi(A)$, где $A_s^t = C_{f(s)}^{f(t)}$, только нулевыми прямыми слагаемыми. Иначе говоря, если $B \in S^*(Y,K)$, то $C = \Psi(A)$, т.е. условие (I) теоремы выполнено.

Для дальнейшего заметим, что размеры полос $\mathcal{D}_x, \bar{C}_x, \bar{C}_{\bar{x}}$ – однозначно определяются классом изоморфизма представления B (конечно, в предположении линейной независимости строк всех этих полос). Действительно, обозначим $B(i)$ $(i \in Y)$ матрицу, образованную всеми горизонтальными полосами B_j ($j \in \bar{Y}$, $j < i$) и положим

$$\tilde{B}_i = \begin{pmatrix} B(i) \\ B_i \end{pmatrix}; \qquad B_{x\bar{x}} = \begin{pmatrix} B(x) \\ B_x \\ B_{\bar{x}} \end{pmatrix} \text{ при } \beta(x,x);$$

$$B_{xy} = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & B(y) \\ B_x & B_y \end{pmatrix} \text{ при } \beta(x,y), x \neq y.$$

Из определения морфизмов S -представлений непосредственно вытекает, что ранги $r(B(i))$, $r(B_i)$, $r(B_{x\bar{x}})$ и $r(B_{xy})$ у изоморфных представлений совпадают. Но из линейной независимости строк строк $\mathcal{D}_x$, $\bar{C}_x$, $\bar{C}_{\bar{x}}$ следует, что число строк в этих матрицах равно:

$$m(\bar{C}_x) = r(\tilde{C}_x) - r(C(x)) \qquad \text{при } x \in Y_1;$$

$$m(\bar{C}_x) = r(C_{x\bar{x}}) - r(\tilde{C}_{\bar{x}}) \qquad \text{при } x \in Y_2;$$

$$m(\bar{C}_{\bar{x}}) = r(C_{x\bar{x}}) - r(\tilde{C}_x);$$

$$m(\mathcal{D}_x) = r(\tilde{C}_x) + r(\tilde{C}_{\bar{x}}) - r(C_{x\bar{x}}) - r(C(x)) \text{ при } x \in Y_2;$$

$$m(\bar{C}_x) = r(\tilde{C}_x) + r(\tilde{C}_y) - r(C_{xy}) \quad \text{при } \beta(x,y),\ x \neq y;$$

$$m(\mathcal{D}_x) = r(C_{xy}) - r(\tilde{C}_y) - r(C(x)) \text{ при } \beta(x,y),\ x \neq y.$$

Следовательно, если $\Psi(A) \simeq \Psi(A')$, то A и A' имеют одинаковую размерность. Пусть T – изоморфизм между $\Psi(A)$ и $\Psi(A')$. Тогда из линейной независимости строк, аналогично тому, что было сделано при доказательстве свойства (I), нетрудно вывести, что если в T сделать нулевыми все клетки, которые являются нулевыми во всех морфизмах вида $\Psi(S)$, то полученная матрица T имеет вид $\Psi(S)$, где S – изоморфизм A и A'. Теорема доказана.

§ 3. Представления квазидиэдральных групп

В этом параграфе мы дадим классификацию представлений K-алгебры $\Lambda_n = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 0,\ a^2 = (ba)^n b \rangle$ ($n \geq 1$) над произвольным полем K. Как известно, (см., напр. [13]), описание представлений квазидиэдральной группы $Q_m = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1,\ yx = xy^{2^{m-1}-1} \rangle$ ($m \geq 3$) является частным случаем этой задачи. Точнее, если $\operatorname{char} K = 2$, групповая алгебра KQ_m локальна и фробениусова [6], значит, в ней есть единственный минимальный идеал I (ее цоколь) и всякое неразложимое представление, кроме регулярного, является представлением факторалгебры KQ_m/I , которая изоморфна Λ_n при $n = 2^{m-1} - 1$ *.

Представление алгебры Λ_n – это пара матриц (A, B), такая, что

$$A^3 = 0,\quad B^2 = 0,\quad A^2 = (BA)^n B \tag{1}$$

Приводя A к нормальной форме Жордана и очевидным образом переставляя строки и столбцы, можно считать, что A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

(диагональные клетки квадратные, E – единичная матрица). Если два представления (A, B) и (A', B') подобны, а матрицы A и A' имеют вид (2), то, очевидно, $A = A'$, а $B' = TBT^{-1}$, где T – матрица перестановочная с A. Если разбить матрицы T и B на клетки так, чтобы горизонтальное и вертикальное разбиения были согласо-

---

* Этот изоморфизм можно явно задать, например, так:

$$a \mapsto (1+\bar{x})\Big(\sum_{K=0}^{2^{m-3}-1} \bar{y}^{4K+1} + \sum_{K=2^{m-3}+1}^{2^{m-2}} \bar{y}^{4K-1}\Big) + \bar{y}^{2^{m-1}} + x\bar{y}^{2^m-1},$$

$$b \mapsto (1+\bar{x}) \sum_{\substack{K=0 \\ K=2^{m-2}}}^{2^{m-1}-1} \bar{y}^{2K}, \qquad \text{где } \bar{x} = x + I,\ \bar{y} = y + I$$

ваны с разбиением A, то, как легко видеть, $T_i^j=0$ при $i>j$, $T_1^1=T_4^4=T_6^6$, $T_2^2=T_5^5$, $T_4^3=0$, $T_2^1=T_5^4$, $T_4^1=T_6^4$ и $T_4^2=T_6^5$ (и наоборот, если клетки T удовлетворяют этим соотношениям, то T перестановочна с A). Аналогично соотношения (I) равносильны следующим соотношениям для клеток матрицы B:

(3а) $(B)^2=0$;

(3б) $B_1^i=B_i^6=0$ для всех i

(это соотношение получается из равенства $A^2B=BA^2=0$);

(3в) $B_i^5(B_2^5)^{n-1}B_2^j=0$, если $(i,j)=(6,1)$;

(3г) $B_6^5(B_2^5)^{n-1}B_2^1=E$.

В частности, $(B_2^5)^{n+1}=0$.

Преобразованием типа t_i^j матрицы B мы назовем замену B матрицей TBT^{-1}, где матрица T перестановочна с A, а все ее клетки, кроме T_i^j (и клеток, равных T_i^j в силу приведенных выше соотношений), – такие же, как у единичной матрицы. В частности, клетка B_2^5, как можно проверить, меняется лишь при преобразованиях типа t_2^2 (или, что то же, t_5^5); при этом она заменяется на $T_2^2B_2^5(T_2^2)^{-1}$. Приводя B_2^5 к нормальной форме Жордана и переставляя столбцы и строки, можно считать, что $B_2^5=\bigoplus_{i=1}^{n+1}E_i\otimes \bar{J}_i$,

где $\bar{J}$ – клетка Жордана размерности i с собственным числом 0, E_i – единичная матрица некоторой размерности, $\otimes$ – тензорное умножение матриц [6]. Проведем дополнительно в матрице B согласованные вертикальное и горизонтальное разбиения так, чтобы клетки E_i матрицы B_2^5 были в точности клетками этого нового разбиения (очевидно, при этом новые клетки появятся только во 2-й и 5-й горизонтальных и вертикальных полосах). Обозначим $\alpha_z(\beta_z)$ номер z-й по счету нулевой вертикальной (горизонтальной) полосы матрицы B_2^5 $(z=1,2,\dots,n+1)$.

Преобразованиям типа t_5^i и t_2^j ($i=1,2,3,4$; $j=3,4,5,6$) можно добиться того, чтобы $B_{2k}^{il}=0$ при $k\neq\beta_z$, а также $B_{jk}^{5l}=0$ при $l\neq\alpha_z$, кроме случая $j=5$, $k=\alpha_z(z=1,2,\dots,n+1)$. Тогда из равенства (3а) следует, что полосы B_{5k} $(k=\alpha_z)$ и B^{2l} $(l=\beta_z)$ – нулевые, а равенство (3в) при $i=2$ $(j=5)$ означает, что $B_{2\beta_{n+1}}=0$ $(B^{5\alpha_{n+1}}=0)$.

В дальнейшем мы будем заботиться, чтобы наши преобразования не меняли указанного вида матрицы B. В частности, для преобразований типа t_2^2 это означает, что при разбиении, согласованном с разбиением матрицы B_2^5, $T_{2\alpha_z}^{2\alpha_z} = T_{2(\alpha_z+1)}^{2(\alpha_z+1)} = \ldots = T_{2\beta_z}^{2\beta_z}$ для всех $z = 1, 2, \ldots, n+1$, а также клетки $T_{2(\alpha_z+k)}^{2(\alpha_z+\ell)}$ равны между собой при фиксированной разности $\ell - k$ (здесь, конечно $\alpha_z + k \leq \beta_z$ и $\alpha_s + \ell \leq \beta_s$) и являются нулевыми при $z < s$, $\ell < k + s - z$ и при $z \geq s$, $\ell < k$ (см.,напр. 7 ,§I6). Такие преобразования мы будем называть преобразованиями типа $t_2^2 - I$, если все внедиагональные клетки – нулевые, и преобразованиями типа $t_2^2 - II$, если все диагональные клетки – единичные. Аналогично можно получить ограничения и на остальные клетки T_i^j.

Обозначим $C_1 = B_6^{5\alpha_n}$, $C_2 = B_{2\beta_n}^1$. Равенство (3г) равносильно тому, что $C_1 C_2 = E$. Поэтому преобразованиями типа $t_2^2 - I$ эти матрицы можно привести к виду (разбиения согласованы):

$$C_1 = (0, E), \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}.$$

Разобьем дополнительно полосы с номерами $5i$ и $2j$ ($\alpha_n \leq i, j \leq \beta_n$) согласовано с разбиением C_1 и C_2. Тогда равенства (3в) при $i=6$ ($j=$I) равносильны тому, что все клетки полосы $B_{2\beta_n 2}$ ($B^{5\alpha_n 2}$) кроме единичной клетки из C_2 (C_1) – нулевые. Преобразованиями типа $t_2^2 - II$ и t_i^2 ($i > 2$) можно сделать нулевыми все клетки полосы B^1, кроме единичной клетки из C_2 (точнее,те из них, которые еще остались ненулевыми). В силу равенства (3а) полоса $B^{2\beta_n 2}$ нулевая. Далее, делая преобразования t_2^2 и t_5^i ($i=2,3,4$) можно добиться того, чтобы все клетки полосы B_6, кроме единичной клетки из C_1, были нулевыми. В силу (3а) полоса $B_{5\alpha_n 2}$ нулевая.

Матрицу B полученного вида назовем приведенной. Вот вид приведенной матрицы при $n=1$:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\mathcal{D}_{-1}^{-1}$	0	0	$\mathcal{D}_{-1}^{-2}$	$\mathcal{D}_{-1}^{0}$	$\mathcal{D}_{-1}^{\bar{0}}$	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	E	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\mathcal{D}_{0}^{-1}$	0	0	$\mathcal{D}_{0}^{-2}$	$\mathcal{D}_{0}^{0}$	$\mathcal{D}_{0}^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{0}^{1}$	0	0	0	0
0	$\mathcal{D}_{\bar{0}}^{-1}$	0	0	$\mathcal{D}_{\bar{0}}^{-2}$	$\mathcal{D}_{\bar{0}}^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{\bar{0}}^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{\bar{0}}^{1}$	0	0	0	0
0	$\mathcal{D}_{1}^{-1}$	0	0	$\mathcal{D}_{1}^{-2}$	$\mathcal{D}_{1}^{0}$	$\mathcal{D}_{1}^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{1}^{1}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\mathcal{D}_{2}^{-1}$	0	0	$\mathcal{D}_{2}^{-2}$	$\mathcal{D}_{2}^{0}$	$\mathcal{D}_{2}^{\bar{0}}$	$\mathcal{D}_{2}^{1}$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	E	0	0	0

(указано исходное деление, согласованное с делением матрицы A). Занумеруем те полосы приведенной матрицы B , в которых еще есть клетки, отличные от 0 и E , целыми числами от $-(n+1)$ до $(n+1)$ и символом $\bar{0}$ по правилу:

номер	$-k$ ($k=0$, n)	припишем	полосе	$2\beta_k$
-"-	$-n$	-"-	-"-	$2\beta_n 1$
-"-	0	-"-	-"-	3
-"-	$\bar{0}$	-"-	-"-	4
-"-	n	-"-	-"-	$5\alpha_n 1$
-"-	$k(k\neq 0,n)$	-"-	-"-	$5\alpha_k$

(в примере $n=1$ выдержаны именно эти обозначения).

Обозначим через $\mathcal{D}$ клеточную матрицу $\mathcal{D}_k^l$ $(k,l=-(n+1),\dots,-1,$ $0,\bar{0},1,\dots,n+1$). Тогда равенства (3а) и (3в) равносильны таким равенствам:

(4а) $(\mathcal{D})^2=0$

(4б) $\mathcal{D}_l^n\,\mathcal{D}_{-n}^k=0$ для любых k и l ;

Кроме того, из вида приведенной матрицы следует, что

(4в) $\mathcal{D}_k^l=0$ при $k<0,\ l>0;$

(4г) $\mathcal{D}_{-(n+1)}=0$ и $\mathcal{D}^{n+1}=0$

Пусть $\mathcal{Y}_n$ – множество целых чисел от $-(n+1)$ до $n+1$ с обычным отношением порядка. Введем на $\mathcal{Y}_n$ бинарное симметричное отношение β , считая, что $\beta(k,-k)$ для любого $k\in\mathcal{Y}_n$. Тогда $\mathcal{Y}_n\in\mathfrak{S}$ и можно рассмотреть категорию $S(\mathcal{Y}_n,K)$, введенную в предыдущем параграфе. Рассмотрим в $S(\mathcal{Y}_n,K)$ полную подкатегорию $\widetilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)$, состоящую из матриц $\mathcal{D}=(\mathcal{D}_k^l)$, удовлетворяющих условиям (4б)–(4г). Тривиально проверяется, что вместе со всяким S-представлением категория $\widetilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)$ содержит и все представления, ему изоморфные. Всякому объекту $\mathcal{D}$ из $\widetilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)$ можно естественным образом сопоставить приведенную матрицу B , т.е. представление $\Phi(\mathcal{D})$ алгебры Λ_n. Аналогичным образом, каждому морфизму $T:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ категории $\widetilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)$ можно сопоставить гомоморфизм представлений $\Phi(T):\Phi(\mathcal{D})\to\Phi(\mathcal{D}')$, так что получается функтор $\Phi:\widetilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)\to R(\Lambda_n,K)$. Нетрудно убедиться, что этот функтор удовлетворяет всем условиям (I)–(3) теоремы 3, т.е. является классифицирующим.

Объединяя этот результат с теоремой 3, мы получим классифицирующий функтор $\Phi\Psi:\widetilde{\Gamma}^*(X_n,K)\to R(\Lambda_n,K)$, где $X_n\in\mathfrak{X}$ – множество, соответствующее $\mathcal{Y}_n$ по теореме 3, а $\tilde{\Gamma}^*(X_n,K)$ – полная подкатегория категории $\Gamma^*(X_n,K)$, состоящая из всех таких объектов A, что $\Psi(A)\in\tilde{S}(\mathcal{Y}_n,K)$. Однако из описания функтора Ψ, приведенного в предыдущем параграфе, легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $A\in\tilde{\Gamma}^*(X_n,K)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

а) $A_s^t=0$ при $s=k_+,k_+^\circ$, $t=\ell_-,\ell_-^\circ$, где $k<0$, $\ell>0$;

б) полоса A^t нулевая при $t=(n+1)_-,n_-^\circ$ и пустая при $t=(n+1)_-^\circ$;

в) полосы A_s пустые при $s=\pm(n+1)_+,-(n+1)_+^\circ$

(см.определение множества $X_n=E_n\cup F_n$ в пункте I) доказательства теоремы 3).

Пусть E_n° (F_n°) – множество всех элементов из X_n, указанных в пункте в) (б)). Положим $X_n'=E_n'\cup F_n'$, где $E_n'=E_n\setminus E_n^\circ$, $F_n'=F_n\setminus F_n^\circ$ (отношение α переносится на X_n' естественным образом). Очевидно, $X_n'\in\mathfrak{X}$. Множество всех пар (s,t), указанных в пункте а) и таких, что $s,t\in X_n'$, обозначим Z_n. Тогда в силу предложения 4 категория $\tilde{\Gamma}^*(X_n,K)$ фактически совпадает с полной подкатегорией категории $\Gamma^*(X_n',K)$, состоящей из всех таких объектов A, что $A_s^t=0$ при $(s,t)\in Z_n$. Эту подкатегорию обозначим $\tilde{\Gamma}^*(X_n',K)$.

Таким образом, мы построили классифицирующий функтор $\tilde{\Gamma}^*(X_n',K)\to R(\Lambda_n,K)$ для любого $n\geqslant 1$ и любого поля K.

Заметим, что из классификации неразложимых Γ-представлений произвольного множества $X\in\mathfrak{X}$, приведенной в [8], непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A – неразложимое Γ-представление множества X_n', соответствующее инварианту* $g\in I(K,X_n')$. $A\in\tilde{\Gamma}^*(X_n',K)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

а) тип последнего фрагмента графа g отличен от $2'$,4,6 и $\varphi(t)\neq(t-1)^k$, если этот тип равен 3;

б) граф g не содержит находящихся в отношении "–" элементов s и t таких, что $(s,t)\in Z_n$.

Из этих результатов и классификации Γ-представлений, данной в [8], мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Алгебра Λ_n – ручная для любого n и любого поля K.

---

* Определение $I(K,X)$ см. [8], § 4, стр.65; построение представления по его инварианту – там же, стр.66.

Отметим, что указанная конструкция функторов Ψ и Φ дает явный вид неразложимых представлений Λ_n.

СЛЕДСТВИЕ 5. Группа Q_m – ручная над любым полем K характеристики 2.

Как было показано в §I, отсюда вытекают теоремы I и 2, сформулированные во введении.

Литература

I. Б а ш е в В.А. Представление группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2. – Докл.АН СССР, I96I, т.I4I, № 5, с.I0I5–I0I8.

2. Б о н д а р е н к о В.М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2. – Матем.сб.,I975, т.96,№I, с.63–74.

3. Б о н д а р е н к о В.М. Модулярные представления квазидиэдральных групп. – В кн.:Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Новосибирск, I976, с.I0–II.

4. Д р о з д Ю.А. О ручных и диких матричных задачах. – В кн.: Матричные задачи, Киев, Институт математики АН УССР, I977.

5. К р у г л я к С.А. О представлениях группы (p,p) над полем характеристики p. – Докл.АН СССР, I963,т.I53,№6, с.I253–I256.

6. К э р т и с Ч., Р а й н е р И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.,"Наука", I969. 668с.

7. М а л ь ц е в А.И. Основы линейной алгебры. М.,"Наука", I970. 398с.

8. Н а з а р о в а Л.А., Р о й т е р А.В. Об одной задаче Гельфанда. – Функц.анализ и его прил., I973, т.7, № 4, с.54–69.

9. B r e n n e r S. Modular representations of p-groups. – J. Algebra, 1970, vol.15, N1, p.89–102.

10. H u p p e r t B. Endliche Gruppen. Berlin, Springer, 1967. 793 S.

11. J o h n s e n K. Über 2-Gruppen in denen jede abelsche Untergruppe von höchstens 2 Elementen erzeugt wird. – J. Algebra, 1974, vol.30, N 1, p.31–36.

12. R i n g e l C.M. The indecomposable 2-groups. – Math.Ann., 1975, Bd.214, N 1, S. 19–34.

13. R i n g e l C.M. The representation type of local algebras. – Lect.Notes.Math., 1975, vol.488, p.282–305.