Литература

1. Башев В. А. Представления группы $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141, № 5. С. 1015—1018.
2. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 63—74.
3. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1977. Т. 71. С. 24—41.
4. Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах. II // Вестн. Ленингр. ун-та. 1959. № 7. С. 72—87.
5. Гудивок П. М. О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1978. Т. 148. С. 96—105.
6. Кругляк С. А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1253—1256.
7. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Линейно-алгебраический метод в теории представлений // Линейная алгебра и теория представлений. Киев, 1983. С. 3—18.
8. Саркисян Р. А. Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 6. С. 811—824.
9. Супруненко Д. А. Группы матриц. М., 1972. 352 с.
10. Фаддеев Д. К. Об эквивалентности систем целочисленных матриц // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 2. С. 449—454.
11. Brenner S. Modular representations of p-groups // J. Algebra. 1970. Vol. 15, N 1. P. 89—102.
12. Friedland S. Simultaneous similarity of matrices // Advances in Math. 1983. Vol. 50. P. 189—265.
13. Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. 1954. Vol. 21. P. 377—381.
14. Roggenkamp K. W. Darstellungen endlicher Gruppen in Polynomringen // Math. Ztschr. 1967. Bd 96. S. 399—407.

Ю. А. ДРОЗД

КОНЕЧНЫЕ МОДУЛИ НАД ЧИСТО НЕТЕРОВЫМИ АЛГЕБРАМИ

1. Введение

Назовем нетеревой алгеброй такое кольцо A, что его центр C нетеров и A является конечно-порожденным C-модулем. Если, кроме того, A не содержит минимальных идеалов, будем говорить, что A — чисто нетерова алгебра. Обозначим mod-A категорию конечно-порожденных (правых) A-модулей, pr-A — ее полную подкатегорию, состоящую из проективных модулей, и fin-A — категорию A-модулей конечной длины. Очевидно, fin-$A=\coprod$ fin-$A_{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ пробегает пространство максимальных идеалов центра $\max C$, а $A_{\mathfrak{m}}$ обозначает $\mathfrak{m}$-адическое пополнение кольца A,

Хорошо известно [2], что если $A=C$ — дедекиндово кольцо, то неразложимый A-модуль M конечной длины однозначно определяется своей длиной $l_A(M)$ и носителем $s(M)$, т. е. единственным идеалом $\mathfrak{m}\in\max C$, для которого $M_{\mathfrak{m}}\neq 0$. Из работ [5, 16] следует, что если A — наследственная чисто нетерова алгебра, то для любого $\mathfrak{m}\in\max C$ кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ обобщенно-однорядно, а потому неразложимый A-модуль M конечной длины однозначно определяется своей длиной, носителем и проективным накрытием (как $A_{\mathfrak{m}}$-модуля).

Напомним еще несколько примеров, в которых получено «хорошее» описание A-модулей конечной длины (как говорят, алгебра A — «ручная»).

1.1. $A=K[x, y]/(xy)$, где K — некоторое поле [3].

1.2. $A=K\langle x, y\rangle/(x^2, y^2)$ [1, 18].

Заметим, что в этом случае A можно отождествить с подкольцом в $M_2(K[t])$, состоящим из таких матриц (a_{ij}), в которых $a_{11}(0)=a_{22}(0)$, а $a_{12}(0)=0$ (для этого нужно отождествить x с e_{21}, а y с te_{12}).

1.3. Рассмотрим «задачу Гельфанда» [13]: описание диаграмм конечномерных векторных пространств вида

$$V_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} V_2 \underset{c}{\overset{d}{\rightleftarrows}} V_3,$$

где $ab=cd$. Легко видеть, что такие диаграммы можно трактовать как модули конечной длины над подкольцом $A \subset M_3(K[t])$, состоящим из матриц, в которых $a_{ij}(0)=0$ при $2\neq i\neq j$, для этого нужно отождествить V_i с Me_{ii}, оператор a — с умножением на e_{21}, b — с умножением на te_{12}, c — на e_{23} и d — на te_{32}.

С другой стороны, если $A=K[x, y]$, то, как показано в [4, 11], описание A-модулей конечной длины содержит в себе классификацию любых наборов линейных операторов (как говорят, алгебра A — «дикая»). Цель настоящей работы — установить, какие чисто нетеровы алгебры являются ручными, а какие дикими.

Для упрощения изложения будем предполагать, что C — конечно-порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем K, либо локализация, либо пополнение такой алгебры по некоторому максимальному идеалу. В этом случае термин «ручной» и «дикий» можно определить, как в [6, 7]. Именно, назовем представлением A над некоторой K-алгеброй Λ бимодуль ${}_\Lambda F_A$, конечно-порожденный и проективный как левый Λ-модуль. Такое представление назовем строгим, если из того, что $N\otimes {}_\Lambda F=M\otimes {}_\Lambda F$ для некоторых N, $M\in \text{fin-}\Lambda$, следует, что и $N\simeq M$. Алгебра A называется дикой, если у нее есть строгое представление над любой конечно-порожденной K-алгеброй Λ (как известно, для этого достаточно, чтобы A имела строгое представление над свободной алгеброй $\Sigma=K\langle x, y\rangle$ с двумя образующими).

Рациональной алгеброй называется [6] конечно-порожденная K-алгебра Γ, такая, что $K[t]\subset\Gamma\subset K(t)$. Говорят, что алгебра A — ручная, если для любого $\mathfrak{m}\in\max C$ и любого натурального l существует конечное множество представлений $\{F_1, \ldots, F_s\}$ алгебры A над некоторыми рациональными алгебрами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ соответственно, такое, что всякий неразложимый A-модуль длины l с носителем $\mathfrak{m}$ изоморфен $N\otimes_{\Gamma_i}F_i$ для некоторого i и некоторого $N\in\text{fin-}\Gamma_i$.

Никакая алгебра не может быть одновременно ручной и дикой [6], причем A ручная тогда и только тогда, когда все $A_\mathfrak{m}$ ручные. Более того, если некоторая $A_\mathfrak{m}$ дикая, то и A дикая. Наследственная чисто нетерова алгебра ручная, так как имеет лишь конечное число неразложимых модулей с данной длиной и носителем. Из дальнейших выкладок следует, что, и наоборот, если для любых l и $\mathfrak{m}$ существует лишь конечное число неразложимых A-модулей длины l с носителем $\mathfrak{m}$ (где A — чисто нетерова алгебра), то A наследственна.

Для формулировки основной теоремы введем следующие обозначения. Если $\mathfrak{m}\in\max C$, положим $J_\mathfrak{m}=\operatorname{rad}A_\mathfrak{m}$ (радикал Джекобсона), $B_\mathfrak{m}=\operatorname{End}J_\mathfrak{m}$ (как левого $A_\mathfrak{m}$-модуля). Так как A чисто нетерова, естественный гомоморфизм $A_\mathfrak{m}\to B_\mathfrak{m}$ инъективен, т. е. $A_\mathfrak{m}$ можно рассматривать как подкольцо в $B_\mathfrak{m}$. Обозначим $d_\mathfrak{m}(A)=\max_U l_A(B_\mathfrak{m}\otimes_A U)$, где U пробегает все простые левые A-модули.

Теорема 1. *Для того чтобы чисто нетерова алгебра A была ручной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathfrak{m}\in\max C$ выполнялись условия:*

1) $B_\mathfrak{m}$ *наследственно;*

2) $\operatorname{rad}B_\mathfrak{m}=J_\mathfrak{m}$;

3) $d_\mathfrak{m}(A)\leqslant 2$.

В противном случае алгебра A дикая.

Замечание 1. При соответствующем изменении определений ручной и дикой алгебры теорема 1 остается верной для любых чисто нетеровых алгебр. Принципиальная схема доказательства также сохраняется, хотя выкладки становятся более громоздкими.

Замечание 2. Если алгебра $A_{\mathfrak{m}}$ является базисной, т. е. $A_{\mathfrak{m}}/J_{\mathfrak{m}}$ — прямое произведение тел, то $d_{\mathfrak{m}}(A)$ совпадает с числом образующих $B_{\mathfrak{m}}$ как правого $A_{\mathfrak{m}}$-модуля. Однако в общем случае это не так. Действительно, пусть $S=K[[t]]$ и A — подкольцо в $M_3(S)$, состоящее из таких матриц (a_{ij}), в которых $a_{13}(0)=a_{23}(0)=0$. Тогда $C=S$ содержит единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}$, причем $A_{\mathfrak{m}}=A$. Легко видеть, что $J=\operatorname{rad} A=M_3(\mathfrak{m})$, а $B=\operatorname{End} J=M_3(S)$, откуда сразу получаем $d_{\mathfrak{m}}(A)=2$, но число образующих B как A-модуля равно 3. Этот пример показывает, что в формулировке основной теоремы, приведенной в докладе [8], условие (3) неверно: в нем вместо числа образующих должна фигурировать величина $d_{\mathfrak{m}}(A)$.

Замечание 3. Из условий 1), 2) и результатов работы [10] следует, что $B_{\mathfrak{m}}$ совпадает и с кольцом эндоморфизмов $J_{\mathfrak{m}}$ как правого $A_{\mathfrak{m}}$-модуля. Поэтому в определениях и формулировке теоремы 1 можно заменять друг на друга слова «левый» и «правый» (в любом варианте).

2. Предварительные результаты

Очевидно, алгебра A удовлетворяет условиям 1)—3) тогда и только тогда, когда им удовлетворяют алгебры $A_{\mathfrak{m}}$ при всех $\mathfrak{m}\in\max C$. Поэтому далее предположим, что C — полная локальная алгебра с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, причем $C/\mathfrak{m}=K$. Обозначим $J=\operatorname{rad} A$, $B=\operatorname{End} J$ (как левого A-модуля).

Если $e\in A$ — идемпотент, обозначим $A_e=eAe$. Алгебру A_e назовем минором A. Если, кроме того, $e=e_1+\ldots+e_r$, где e_i — ортогональные, попарно не сопряженные, примитивные идемпотенты, будем говорить, что A_e является r-минором алгебры A. Из работы [15] непосредственно вытекает следующее утверждение.

2.1. Если алгебра A ручная, то и любой ее минор ручной, а если какой-нибудь минор A дикий, то и алгебра A дикая.

Обозначим $S=K[[t]]$. При сделанных предположениях S — это единственная локальная наследственная алгебра. Алгебру A назовем полумаксимальной, если $A_e\simeq S$ для любого примитивного идемпотента e. Мы докажем уточненную версию основной теоремы.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны*:

а) *алгебра A ручная*;

ам) *все 1-миноры, 2-миноры и полумаксимальные 3-миноры алгебры A ручные*;

б) *алгебра A удовлетворяет условиям* 1)—3) *теоремы* 1;

бм) *все 1-, 2- и полумаксимальные 3-миноры алгебры A удовлетворяют условиям* 1)—3) *теоремы* 1;

в) *алгебра A недикая*;

вм) *все 1-, 2- и полумаксимальные 3-миноры алгебры A недикие.*

Ввиду 2.1 и того, что ручная алгебра не может быть дикой, достаточно доказать импликации вм) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а). Отметим прежде всего, что все условия теоремы 2, как легко видеть, сохраняются при Морита-эквивалентности. Поэтому алгебру A далее будем считать базисной (в данном случае это означает, что $A/J \simeq K^n$). Фиксируем разложение $1=e_1+\ldots+e_n$, где e_i — примитивные ортогональные идемпотенты. Всякий идемпотент в A сопряжен с некоторым $e=e_{i_1}+\ldots+e_{i_r}$, так что всякий r-минор A изоморфен некоторому $A_e=A(i_1 i_2 \ldots i_r)$. Если V — какой-нибудь A-бимодуль, обозначим $V_{ij}=e_i V e_j$, $V_i=V_{ii}$. Пирсовское разложение $V=\oplus V_{ij}$ будем записывать в «матричном виде»:

$$V=\begin{bmatrix} V_1 & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ V_{21} & V_2 & \ldots & V_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & V_{nn} \end{bmatrix}.$$

Следующий результат непосредственно вытекает из списка недиких локальных алгебр, данного К. М. Рингелем [19].

2. 2. Если алгебра A — локальная и недикая, то она изоморфна либо S, либо $T_1=K[[x,y]]/(xy)$, либо $T_2=K\langle\langle x, y\rangle\rangle/(x^2, y^2)$.

Для доказательства достаточно заметить, что алгебры типов 2—8 из списка Рингеля содержат минимальные идеалы, чисто нетерова алгебра типа 1 изоморфна T_1 и типа 9 — T_2.

2. 3. Следствие 1. *Если все 1-миноры алгебры A недикие, то в C нет нильпотентов и* Kr. dim $C=1$.

Доказательство. Ввиду 2. 2 для любого i алгебра A_i изоморфна либо T_1, либо T_2, либо S. В первом случае ее центр C_i изоморфен T_1, в остальных — S, так что в C_i нет нильпотентов и Kr. dim $C_i=1$. Но C вкладывается в $\oplus C_i$, следовательно, то же верно и для C.

Напомним, что чисто нетерова наследственная алгебра всегда полупервична [14], а размерность Крулля ее центра равна 1 (это следует, например, из [17]). Поэтому далее будем считать, что в C нет нильпотентов и Kr. dim $C=1$.

Обозначим $\tilde{C}$ полное кольцо частных C (оно является прямым произведением полей). Для любого C-модуля M пусть $\tilde{M}=M\otimes_C \tilde{C}$, а $\tilde{\varphi}: \tilde{M}\to\tilde{N}$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмом $\varphi: M\to N$. Так как алгебра A чисто нетерова, ее можно отождествить с $A\otimes 1\subset\tilde{A}$. При этом B отождествляется с $\{a\in\tilde{A}\mid Ja\subset J\}$. Очевидно, алгебра $\tilde{A}$ артинова.

По аналогии с [7] определим бимодуль $U=U_A$ над категорией pr-A формулой $U(Q, P)=\mathrm{Hom}_A(Q, PJ)$ и рассмотрим категорию $R(U)$, множество объектов которой — объединение всевозможных $U(Q, P)$, а морфизм из объекта $u\in U(Q, P)$ в объект $u'\in U(Q', P')$ определяется как такая пара (g, f), что $g: Q\to Q'$, $f: P\to P'$ и $fu=u'g$. Сопоставляя u его коядро, получим полный функтор $\pi=\pi_A: R(U)\to$ mod-A. Обозначим $R_0(U)$ полную подкатегорию в $R(U)$, состоящую из таких $u\in U(Q, P)$, что Ker $u\in QJ$, а $R_1(U)$ — полную подкатегорию в $R_0(U)$, состоящую из тех u, для которых Coker $\tilde{u}=0$.

2. 4. Ограничение π на $R_0(U)$ — представленческая эквивалентность, т. е. всякий объект из mod-A изоморфен некоторому $\pi(u)$, причем если $\pi(u)\simeq\pi(u')$, то и $u\simeq u'$. При этом $\pi(u)\in$ fin-A тогда и только тогда, когда $u\in R_1(U)$.

Доказательство первого утверждения аналогично [7], второе следует из того, что Kr. dim $C=1$, а потому fin-$A=\{M\in$ mod-$A\mid\tilde{M}=0\}$.

Напомним [7], что для любой K-алгебры Λ можно определить бимодуль $U\otimes\Lambda$ над категорией pr-$A\otimes\Lambda$ (полагая для $P, Q\in$ pr-A. $(U\otimes\Lambda)(Q, P)=U(Q, P)\otimes\Lambda$) и строгие элементы в нем. Повторяя рассуждения из § 5 работы [7], устанавливаем следующий результат.

2.5. Алгебра A дикая тогда и только тогда, когда найдется такой строгий элемент $u \in R(U \otimes \Sigma)$, что $\mathrm{Coker}\,\tilde{u} = 0$. Если же бимодуль U_A ручной, то и алгебра A ручная.

Надкольцом алгебры A назовем такую чисто нетерову алгебру $A' \supset A$, что $\mathfrak{m}^k A' \subset A$ для некоторого k. Это означает, что $\tilde{A}' = \tilde{A}$ и фактор-модуль A'/A конечной длины. В частности, алгебра B является надкольцом A.

2.6. Если какое-нибудь надкольцо A' алгебры A дикое, то и A дикая.*)

Доказательство. Из теоремы Крула—Шмидта следует, что всякий проективный A'-модуль изоморфен прямому слагаемому некоторого модуля $P' = PA'$, где P — проективный A-модуль. Если алгебра A' дикая, то ввиду (2.5) существует строгий элемент u, такой, что $\mathrm{Coker}\,\tilde{u} = 0$. Пусть $u \in (U_{A'} \otimes \Sigma)(Q_1, P_1)$. Подберем проективные A-модули Q и P, такие, что $Q' = Q_1 \oplus Q_2$ и $P' = P_1 \oplus P_2$. Увеличивая Q, можно добиться, чтобы существовал эпиморфизм $Q_2 \to P_2 J$. Тогда u продолжается до строгого элемента $u' \in (U_{A'} \otimes \Sigma)(Q', P')$, такого, что $\mathrm{Coker}\,\tilde{u}' = 0$. Выберем неделитель нуля $c \in \mathfrak{m}^{k+1}$. Тогда $cP' \subset \mathfrak{m}P \subset PJ$, т. е. cu' можно рассматривать как элемент из $(U_A \otimes \Sigma)(Q, P)$. Очевидно, он строг и $\mathrm{Coker}\, c\tilde{u}' = 0$, значит, ввиду 2.5, алгебра A дикая.

Пусть V — конечнопорожденный A-бимодуль, $\bar{V} = V/(JV + VJ)$ и $\bar{V}_{ij} = e_i \bar{V} e_j$. Положим $d_{ij}(V) = [V_{ij} : K]$ (размерность над полем K) и определим колчан $\mathrm{sq}(V)$ как граф с $2n$ вершинами σ_i и τ_i $(i = 1, \ldots, n)$, в котором из σ_i в τ_i ведет $d_{ij}(V)$ стрелок для любых i, j (и других стрелок нет). Если V — подбимодуль в $\tilde{A}$, то найдется такой неделитель нуля $c \in C$, что $cV \subset J$. Очевидно, $\mathrm{sq}(cV) \simeq \mathrm{sq}(V)$. Учитывая, что $V_{ij} \simeq \mathrm{Hom}_A(P_j, P_i V)$, где $P_i = e_i A$, из 2.5 непосредственно получаем следующее утверждение.

2.7. Если V — конечно-порожденный A-подбимодуль в $\tilde{A}$ (например, идеал или надкольцо A), причем колчан $\mathrm{sq}(V)$ дикий, то и алгебра A дикая.

Замечание 4. Если A удовлетворяет условиям 1)—2) теоремы 1, то условие 3) равносильно тому, что $[Be_j/Je_j : K] \leqslant 2$ для любого номера j, т. е. $\Sigma_i d_{ij}(B) \leqslant 2$ (иными словами, в колчане $\mathrm{sq}(B)$ в каждую точку входит не более двух стрелок).

3. Доказательство импликации вм) $\Rightarrow$ б)

Сохраним все предположения и обозначения § 2. Тогда $B_{ij} = \bigcap_{k=1}^{n} B_{ij}^{(k)}$, где $B_{ij}^{(k)} = \{a \in \tilde{A}_{ij} / J_{ki} a \subset J_{kj}\} \simeq \mathrm{Hom}_{A_k}(J_{ki}, J_{kj})$. Поскольку при $i \neq j$ идемпотенты e_i и e_j не сопряжены в A, то $J_{ij} = A_{ij}$. Пусть, далее, A удовлетворяет условию вм) теоремы 2.

3.1. Алгебра A полупервична.

Доказательство. Полупервичность равносильна полупростоте $\tilde{A}$. Обозначим $\tilde{I} = \mathrm{rad}\,\tilde{A}$, $I = A \cap \tilde{I}$. Из 2.2 следует, что все алгебры A_i полупервичны, так что $I_i = 0$. Покажем, что если $I_{ij} \neq 0$, то минор $A(ij)$ дикий. Для упрощения обозначений будем считать, что $A = A(ij)$, $i = 1$, $j = 2$. Так как $I_{21} I_{12} = I_{12} I_{21} = 0$, то I_{21} — идеал в A и достаточно доказать дикость A/I_{21}. Поэтому можно считать, что $I_{21} = 0$. Так как алгебры $\tilde{A}_i$ полупростоты, у A_i есть максимальное надкольцо A_i' [9], а у A — надкольцо $A' = A_1' + A_2' + A_1' I_{12} A_2'$. Если f_i — примитивные идемпотенты в A_i', то $f_i A' f_i \simeq S$. Пусть $f = f_1 + f_2$. В силу 2.1

*) Из теоремы 2 легко вывести, что если A ручная, то и любое ее надкольцо ручное.

и 2.6 достаточно доказать дикость алгебры A'_f, поэтому можно считать, что $A=A'_f$. Тогда A изоморфна алгебре матриц вида

$$\begin{bmatrix} S & W \\ 0 & S \end{bmatrix},$$

где $W=A_{12}$ — некоторый S-бимодуль.

Рассмотрим в W ряд подмодулей W_k, где $W_0=W$ и $W_{k+1}=tW_k+W_kt$. Так как W конечно порожден и не содержит конечномерных подмодулей, то $W_k \neq W_{k+1}$. Выберем $\omega_k \in W_k \setminus W_{k+1}$ и рассмотрим элемент $u \in (U_A \otimes \Sigma)(P_1^5 \oplus P_2^2,\ P_1^5)$, задаваемый матрицей

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & t^5 & 0 & 0 & \omega_2 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & t^7 & 0 & \omega_3 & \omega_3 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^9 & \omega_4 & \omega_4 y \end{bmatrix}$$

(мы учитываем, что $\mathrm{Hom}_A(P_j,\ P_i) \simeq A_{ij}$). Очевидно, $\mathrm{Coker}\,\tilde{u}=0$. Проверим, что u — строгий элемент. Пусть в Σ-модуле M умножение на x задается матрицей X, а умножение на y — матрицей Y. Тогда элемент $u \otimes M \in U(P_1^5 \otimes M \oplus P_2^5 \otimes M,\ P_1^5 \otimes M)$ задается матрицей

$$u(X,\ Y)=\begin{bmatrix} tE & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0 E & 0 \\ 0 & t^3E & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 E \\ 0 & 0 & t^5E & 0 & 0 & \omega_2 E & \omega_2 E \\ 0 & 0 & 0 & t^7E & 0 & \omega_3 E & \omega_3 X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^9E & \omega_4 E & \omega_4 Y \end{bmatrix},$$

где E — единичная матрица.

Пусть Σ-модуль N задается парой матриц $(X',\ Y')$. Морфизм $\varphi: u \otimes M \to u \otimes N$ задается парой матриц $\Phi=(\Phi_{ij})$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ 5)$ и $\Psi=(\Psi_{ij})$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ 7)$, такой, что $\Phi u(X,\ Y)=u(X',\ Y')\Psi$. При этом для $i,\ j=1,\ \ldots,5$ элементы Φ_{ij} и Ψ_{ij} лежат в $\mathrm{Hom}_A(P_1 \otimes M,\ P_1 \otimes N) \simeq \mathrm{Mat}_{a\times b}(S)$, где $a=[N:K]$, $b=[M:K]$. Если $i,\ j=6,\ 7$, то Ψ_{ij} лежат в $\mathrm{Hom}_A(P_2 \otimes M,\ P_2 \otimes N) \simeq \mathrm{Mat}_{a\times b}(S)$. Если $i \geqslant 6$, $j \leqslant 5$, то $\Psi_{ij}=0$, и если $i \leqslant 5$, $j \geqslant 6$, то $\Psi_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(P_2 \otimes M,\ P_1 \otimes N) \simeq \mathrm{Mat}_{a\times b}(W)$. Приравнивая элементы на местах с номером (16) в матрицах $\Phi u(X,\ Y)$ и $u(X',\ Y')\Psi$, получим $\Phi_{11}\omega_0 \equiv \omega_0\Psi_{66} \pmod{W_1}$, откуда $\Phi_{11} \equiv \Psi_{66} \pmod t$. На месте (27) аналогично получим $\Phi_{22} \equiv \Psi_{77} \pmod t$. На местах с номерами (ij), где $1 \leqslant j < i \leqslant 5$, получаем $\Phi_{ij} \equiv 0 \pmod{t^{2(i-j)}}$, а при $1 \leqslant i < j \leqslant 5$ — $\Psi_{ij} \equiv 0 \pmod{t^{2(j-i)}}$.

Далее, место с номером (17) дает $\Psi_{67} \equiv 0 \pmod t$, а место с номером (26) — $\Psi_{76} \equiv 0 \pmod t$. Тогда на месте с номером (36) получаем, что $\Phi_{33} \equiv \Psi_{66} \pmod t$, на месте с номером (37) — $\Phi_{33} \equiv \Psi_{77} \pmod t$, а на местах с номерами (46) и (56) — $\Phi_{44} \equiv \Phi_{55} \equiv \Psi_{66} \pmod t$. Итак, все диагональные элементы в Φ и Ψ сравнимы между собой по модулю t; это общее значение обозначим Φ_0. Наконец, места с номерами (47) и (57) дают, что $\Phi_0 X \equiv X'\Phi_0$ и $\Phi_0 Y \equiv Y'\Phi_0 \pmod t$. Поэтому если φ — изоморфизм, то пары матриц $(X,\ Y)$ и $(X',\ Y')$ сопряжены, т. е. модули M и N изоморфны, что и требовалось доказать. Итак, u — строгий элемент, значит, минор $A(ij)$ дикий, что невозможно. Следовательно, $I_{ij}=0$ для любых номеров $i,\ j$, откуда $I=0$, т. е. алгебра A полупервична.

Замечание 5. Поскольку доказательства строгости всегда сводятся к стандартным выкладкам, подобным тем, которые были только что проделаны, в дальнейшем эти вычисления мы будем опускать, ограничиваясь явным указанием строго элемента.

Обозначим $H_i = \operatorname{End} J_i = B_{ii}^{(i)}$. Ввиду 2.2 каждая из алгебр A_i изоморфна S, T_1 или T_2. В первом случае $H_i = A_i$, а тогда и $B_i = A_i$, в остальных H_i наследственно, является единственным минимальным надкольцом A_i и всякий A_i-модуль без кручения либо содержит свободное прямое слагаемое, либо является H_i-модулем [10]. В частности, либо $A_{ij} \simeq A_j$ как правый и $A_{ij} \simeq A_i$ как левый модуль, либо $H_i A_{ij} H_j = A_{ij}$.

3.2. $B_i = H_i$ для всех i.

Доказательство. Пусть $B_i \neq H_i$. Тогда $A_{ji} H_i \neq A_{ji}$ для некоторого $j \neq i$. Поэтому $A_{ji} \simeq A_i$ как правый модуль, откуда следует, что $A_j \simeq A_i$ и минор $A(ij)$ изоморфен кольцу матриц вида

$$\begin{bmatrix} A_i & I \\ A_i & A_i \end{bmatrix},$$

где I — идеал кольца A_i.

Покажем, что $A(ij)$ — дикая алгебра. Вновь предположим, что $A = A(ij)$, $i = 1$, $j = 2$. Заменяя A надкольцом, можно считать, что $I = J_1$. Так как $A_1 \not\simeq S$, найдутся элементы α, $\beta \in I$, линейно независимые по модулю I^2. Тогда строгий элемент $u \in (U \otimes \Sigma)(P_1 \oplus P_2^2,\ P_1^2)$ задается матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha x & \beta + \alpha y \end{bmatrix}.$$

Полученное противоречие с условием вм) и доказывает, что $B_i = H_i$.

3.3. Следствие 2. *$B_i A_{ij} B_j = A_{ij}$ для любых $i \neq j$.*

3.4. Если $A_i \neq B_i$ или $A_j \neq B_j$, то $B_{ij} = A_{ij}$.

Доказательство. Обозначим $W = B_{ij}^{(i)} \cap B_{ij}^{(j)}$ и покажем, что если $W \neq A_{ij}$, то минор $A(ij)$ дикий. Отсюда будет следовать, что $W = A_{ij}$ и, тем более, $B_{ij} = A_{ij}$. Поэтому далее можно считать, что $A = A(ij)$, $i = 1$, $j = 2$, а тогда $W = B_{12}$. Пусть $A_1 \neq B_1$, но $W \neq A_{12}$. Из 3.3 вытекает, что, заменяя A_2 на B_2, получим надкольцо A с тем же радикалом, так что можно считать $A_2 = B_2$. Заменяя, если нужно, A минором, как в доказательстве 3.1, можно считать, что $A_2 = S$. Тогда $\tilde{A}_{12}$ — простой $\tilde{A}_1$-модуль, а потому $A_{12} \subset J_1 B_{12}$ (это следует из результатов [10]). Кроме того, $B_{12} B_{21} \subset J_1$, откуда $A_{12} A_{21} \subset J_1 B_{12} B_{21} \subset J_1^2$. Следовательно,

$$J^2 = \begin{bmatrix} J_1^2 & \tilde{M}_{12} \\ M_{21} & J_2 \end{bmatrix},$$

где M_{ij} — максимальный подмодуль в A_{ij}. Поэтому колчан $\operatorname{sq}(J)$ имеет вид $\tau_2 \leftarrow \sigma_1 \rightrightarrows \tau_1 \leftarrow \sigma_2$ и является диким [12], т. е. A дикая согласно 2.7. Случай $A_2 \neq B_2$ рассматривается аналогично.

3.5. Если $A_i = B_i$ и $A_j = B_j$, то минор $A(ij)$ либо наследствен, либо изоморфен кольцу T_3, где

$$T_3 = \begin{bmatrix} S & tS \\ tS & S \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Так как $A_i \simeq A_j \simeq S$, то $A(ij)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} S & t^k S \\ tS & S \end{bmatrix} \quad (k \geqslant 0).$$

Если $k=0$, то $A(ij)$ наследствен. Покажем, что если $k>1$, то минор $A(ij)$ дикий. Снова считаем, что $A=A(ij)$, $i=1$, $j=2$, причем, очевидно, достаточно рассмотреть случай $k=2$. Но тогда в $(U\otimes\Sigma)(P_1^2\oplus P_2^2,\ P_1^2\oplus P_2^2)$ есть строгий элемент u, заданный матрицей

$$\begin{bmatrix} t & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & t^2 & t^3x & t^3y \\ t & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & t & 0 & t \end{bmatrix}.$$

Итак, остается случай $k=1$, т. е. $A(ij)\simeq T_3$.

3.6. Пусть $A_i\simeq A_j\simeq A_k\simeq S$. Тогда не менее двух из миноров $A(ij)$, $A(ik)$, $A(jk)$ наследственны.

Доказательство. Минор $A(ijk)$ полумаксимален. Предположим, что два из указанных миноров, например $A(ij)$ и $A(jk)$, ненаследственны, и покажем, что тогда $A(ijk)$ дикий. Будем считать $A=A(ijk)$, $i=1$, $j=2$, $k=3$. Тогда, согласно 3.5, $A_{12}\simeq A_{13}\simeq T_3$ и алгебру A можно заменить надкольцом вида

$$\begin{bmatrix} S & tS & tS \\ tS & S & tS \\ tS & S & S \end{bmatrix}.$$

Но тогда в $(U\otimes\Sigma)(P_1^2\oplus P_1^2\oplus P_3,\ P_1^2\oplus P_2^2)$ содержится строгий элемент, задаваемый матрицей

$$\begin{bmatrix} t & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & tx & ty & t \end{bmatrix},$$

и алгебра A дикая. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

3.7. $\operatorname{rad} B=J$.

Доказательство. Обозначим $I=\operatorname{rad} B$. Нужно проверить, что $I_{ij}=J_{ij}$ для любых i, j. Если $i=j$, это следует из 3.2, так как $\operatorname{rad} H_i=J_i$. Пусть $i\neq j$. Если $A_i\not\simeq S$ или $A_j\not\simeq S$, то $I_{ij}=B_{ij}=A_{ij}=J_{ij}$ согласно 3.4. Если же $A_i\simeq A_j\simeq S$, то равенство $I_{ij}=J_{ij}$ следует из 3.5, так как для алгебры T_3 оно проверяется непосредственно.

Из работы [10] следует, что B — наследственное кольцо, причем $BJ=JB=J$.

3.8. Алгебра A удовлетворяет условию б) теоремы 2.

Доказательство. Остается проверить, что $d_m(A)\leqslant 2$, т. е. $\Sigma_i[\bar B_{ij}:K]\leqslant 2$ для всех j. Ввиду 3.4 если $A_j\not\simeq S$, то $\bar B_{ij}=0$ для всех $i\neq j$. Так как $[\bar B_j:K]=2$, для таких индексов получаем требуемое неравенство. Пусть $A_j\simeq S$. Если $A_i\not\simeq S$, то снова $\bar B_{ij}=0$ согласно 3.4. Если $A_i\simeq S$ и минор $A(ij)$ наследствен, то $B_{ij}=A_{ij}$. Ввиду 3.6 найдется не более одного номера $i\neq j$, для которого $A(ij)$ ненаследствен и $A_i\simeq S$. Тогда, по 3.5, $A(ij)\simeq T_3$, откуда $[\bar B_{ij}:K]=1$. Так как $[\bar B_j:K]=1$, вновь получается нужное неравенство и доказательство окончено.

4. Доказательство импликации б) $\Rightarrow$ а)

Пусть теперь алгебра A удовлетворяет условию б) теоремы 2. Доказательство того, что A ручная, основывается на рассуждении 2.5. При этом используем функтор $\rho: R(U_A)\to R(U_B)$, который гомоморфизму $u\in\operatorname{Hom}_A(Q,\ PJ)$ сопоставляет индуцированный им гомоморфизм $\rho(u): QB \to PJB$ (заметим, что $JB = BJ = J$ [10]).

4.1. Всякий элемент $v \in R(U_B)$ разлагается в прямую сумму $v = \oplus_i v_i$, где $v_i \in U_B(Q_i, P_i)$, причем каждый из модулей Q_i, P_i либо неразложим, либо нулевой.

Доказательство следует из [5].

4.2. Пусть $u \in U_A(Q, P)$. Обозначим $O(u)$ множество классов изоморфизма таких элементов $u' \in U_A(Q, P)$, что $\rho(u') \simeq \rho(u)$. Тогда существует биекция $O(u)$ на множество двойных смежных классов $(\mathrm{Aut}\, Q \times \mathrm{Aut}\, P) \diagdown (\mathrm{Aut}\, QB \times \mathrm{Aut}\, PB) / \mathrm{Aut}\, \rho(u)$.

Доказательство непосредственно следует из определения изоморфизма в категории $R(U)$.

Для любого A-модуля P обозначим $\bar{P} = P/PJ$. Если P проективен, то естественный гомоморфизм $\mathrm{Aut}\, P \to \mathrm{Aut}\, \bar{P}$ эпиморфен, причем ядро эпиморфизма $\mathrm{Aut}\, PB \to \mathrm{Aut}\, \overline{PB}$ содержится в $\mathrm{Aut}\, P$, откуда получаем такое следствие.

4.3. Существует биекция $O(u)$ на множество

$$(\mathrm{Aut}\, \bar{Q} \times \mathrm{Aut}\, \bar{P}) \diagdown (\mathrm{Aut}\, \overline{QB} \times \mathrm{Aut}\, \overline{PB}) / A(u),$$

где $A(u)$ — образ $\mathrm{Aut}\, \rho(u)$ при эпиморфизме

$$\mathrm{Aut}\, QB \times \mathrm{Aut}\, PB \to \mathrm{Aut}\, \overline{QB} \times \mathrm{Aut}\, \overline{PB}.$$

Пусть $\bar{R}$ — фактор-категория категории $R(U_B)$ по идеалу, состоящему из морфизмов, сравнимых с нулем по модулю J; $D = \mathrm{pr}\text{-}(\bar{A} \times \bar{A})$. Объекты категории D можно рассматривать как пары $\bar{A}$-модулей (Y, X). Поскольку алгебра A полусовершенна, всякий $\bar{A}$-модуль изоморфен P/PJ для некоторого $P \in \mathrm{pr}\text{-}A$. Определим D-$\bar{R}$-бимодуль V, полагая $V((Y, X), u) = \mathrm{Hom}_A(Y, \bar{Q}) \oplus \mathrm{Hom}_A(X, \bar{P})$, если $u \in U_B(Q, P)$. Обозначим $R_0(V)$ полную подкатегорию в $R(V)$, состоящую из тех пар (f, g), в которых f и g — изоморфизмы. Тогда предложение (4.3) можно переформулировать следующим образом.

4.4. Существует представленческая эквивалентность категории $R_0(U_A)$ на категорию $R_0(V)$. В частности, если бимодуль V ручной, то и бимодуль U_A ручной, а потому A — ручная алгебра.

Обозначим $Q_1, \ldots, Q_m$ все попарно неизоморфные проективные B-модули, $U_{ij} = \mathrm{Hom}_B(Q_j, Q_i J)$. Если $v \in U_{ij}$, а $w \in U_{kl}$, обозначим $R_1(v, w)$ и $R_2(v, w)$ проекции $R(v, w)$ соответственно на $\mathrm{Hom}_B(Q_j, Q_l)$ и на $\mathrm{Hom}_B(Q_i, Q_k)$. Следующий результат описывает строение категории $\bar{R}$.

4.5. Пусть $v \in U_{ij}$, $w \in U_{kl}$, причем $v \not\simeq w$. Тогда $[\bar{R}(v, w): K] \leqslant 1$, причем либо $\bar{R}(v, w) = \bar{R}_1(v, w)$, либо $\bar{R}(v, w) = \bar{R}_2(v, w)$ и, кроме того, $[\bar{R}_1(v, w) \oplus \bar{R}_1(w, v): K] = \delta_{jl}$, а $[\bar{R}_2(v, w) \oplus \bar{R}_2(w, v): K] = \delta_{ik}$.

Доказательство. Пусть $(g, f) \in R(v, w)$. Если $i \neq k$ $(j \neq l)$, то $\bar{f} = 0$ $(\bar{g} = 0)$. Пусть $i = k$. Тогда либо $w = fv$, где $f: Q_i \to Q_l$, либо $w = f'v$, где $f': Q_l \to Q_j$ [5], причем так как $v \not\simeq w$, то $\bar{f} = 0$ (или $\bar{f}' = 0$), поэтому одновременно оба равенства невозможны. Следовательно, либо пара $(1, f)$ порождает $\bar{R}_2(v, w)$, а $\bar{R}_2(w, v) = 0$, либо пара $(1, f')$ порождает $\bar{R}_2(w, v)$, а $\bar{R}_2(v, w) = 0$. Аналогично при $j = l$ либо $v = wg$, пара $(g, 1)$ порождает $\bar{R}_1(v, w)$, а $\bar{R}_1(w, v) = 0$, либо $w = vg'$, пара $(g', 1)$ порождает $\bar{R}_1(w, v)$, а $\bar{R}_1(v, w) = 0$. Остается заметить, что при $i = k$ и $j = l$ одновременно равенства $w = fv$ и $v = wg$ невозможны, так как из первого следует, что $l_B(\mathrm{Coker}\, w) < l_B(\mathrm{Coker}\, v)$, а из второго — противоположное неравенство.

4.6. Следствие 3. *Неизоморфные неразложимые объекты из* $\bar{R}$ *можно занумеровать* $\{v_t\}$ *целыми числами, так, что если* $v_t \in U_{ij}$, *а* $v_s \in U_{il}$ (*или* $v_s \in U_{kj}$), *то* $\bar{R}_2(v_t, v_s) = 0$ *при* $t > s$ *и* $\bar{R}_2(v_t, v_s) \simeq K$ *при* $t < s$ (*соответственно* $\bar{R}_1(v_s, v_t) = 0$ *при* $t > s$ *и* $\bar{R}_1(v_s, v_t) \simeq K$ *при* $t < s$).

Если $v_t \in U_{ij}$, обозначим $i = \alpha(t)$ и $j = \beta(t)$. Положим также $H_{ij} = \mathrm{Hom}_A(\bar{P}_i, \bar{Q}_j)$.

4.7. $[H_{ij} : K] \leqslant 1$ для любых i, j. Кроме того, для любого номера i найдется не более двух таких j, что $H_{ij} \neq 0$, и для любого j найдется не более двух таких i, что $H_{ij} \neq 0$. Наконец, если $H_{ij} \neq 0$ и $H_{ik} \neq 0$, где $j \neq k$, то $H_{lj} = 0$ для всех $l \neq i$, а если $H_{ij} \neq 0$ и $H_{kj} \neq 0$, где $i \neq k$, то $H_{il} = 0$ для всех $l \neq j$.

Доказательство. Поскольку $d_{\mathfrak{m}}(A) \leqslant 2$, в колчане sq (B) в каждую точку входят не более двух стрелок, причем, поскольку $B_i \neq J_i$, всегда присутствуют стрелки $\sigma_i \to \tau_i$. Пусть в нем есть стрелка $\sigma_i \to \tau_k$, где $i \neq k$. Это значит, что $B_{ik} \neq A_{ik}$, т. е. $B_{ik} \not\subset J$, а потому в кольце B идемпотенты e_i и e_k сопряжены. Следовательно, и $B_{ki} \neq A_{ki}$, т. е. в колчане sq (B) есть стрелка $\sigma_k \to \tau_i$. Но тогда этот колчан распадается в несвязное объединение компонент вида:

$$\text{I} \quad \sigma_i \to \tau_i \qquad \text{II} \quad \sigma_i \rightrightarrows \tau_i \qquad \text{III} \quad \begin{array}{ccc} \sigma_i & \to & \tau_i \\ \downarrow & & \uparrow \\ \tau_k & \leftarrow & \sigma_k \end{array}$$

Для компонент вида I $P_iB = P_i \simeq Q_j$ для некоторого j, откуда $H_{ij} \simeq K$, а $H_{ik} = 0$ и $H_{lj} = 0$ при $k \neq j$ и $l \neq i$. Для компоненты вида II $P_iB/P_iJ \simeq \bar{P}_i^2$. В этом случае $P_iB \simeq Q_j \oplus Q_k$, причем $j \neq k$, так как иначе $\bar{B}_i \simeq M_2(K)$, что невозможно. Аналогично Q_j не может входить в разложение P_lB при $l \neq i$, а потому $H_{lj} = 0$. Наконец, для компоненты вида III $P_iB/P_iJ \simeq P_kB/P_kJ \simeq \bar{P}_i \oplus \bar{P}_k$. Тогда P_iB и P_kB неразложимы, так как $B_i = A_i$ и $B_k = A_k$, т. е. $P_iB \simeq P_kB \simeq Q_j$. Следовательно, $H_{ij} \simeq H_{kj} \simeq K$, причем $H_{lj} = 0$ для всех l, кроме i и k, а $H_{il} = 0$ для всех $l \neq j$, что и требовалось доказать.

4.8. Бимодуль V ручной.

Доказательство. Пусть $X = \oplus_i \bar{P}_i^{x_i}$, $Y = \oplus_j \bar{P}_j^{y_j}$, $v = \oplus_t v_t^{z_t}$. Представим $V((X, Y), v)$ в виде прямой суммы $V_1 \oplus V_2$, где $V_1 = \oplus_{i,t} H_{i,\alpha(t)}^{x_i z_t}$ и $V_2 = \oplus_{j,t} H_{j,\beta(t)}^{y_j z_t}$. Из утверждений 4.6 и 4.7 легко выводится, что всякий элемент из V_1 изоморфен прямой сумме нулевых гомоморфизмов, изоморфизмов $\bar{P}_i \simeq \bar{Q}_j$ для некоторых i, j, таких, что $H_{ij} \neq 0$, изоморфизмов $\bar{P}_i \oplus \bar{P}_k \to \bar{Q}_j$ для таких i, j, k, что $H_{ij} \neq 0 \neq H_{kj}$, и диагональных вложений $\bar{P}_i \to \bar{Q}_j \oplus \bar{Q}_k$ для таких i, j, k, что $H_{ij} \neq 0 \neq H_{ik}$. Поэтому далее можно рассматривать лишь те элементы $\omega \in V((X, Y), v)$, для которых $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где $\omega_i \in V_i$, причем ω_1 имеет указанный выше вид. Но тогда нетрудно убедиться, учитывая 4.6, что для компоненты ω_2 получится матричная задача, решенная в работе [13]. Из данного там описания неразложимых элементов следует, что эта задача, а потому и бимодуль V, ручные.

Из утверждения 4. 4 и 4. 8 вытекает, что A — ручная алгебра, это завершает доказательство теоремы 2, а тем самым и теоремы 1.

Замечание 6. Учитывая 2. 4 и 4. 4, мы видим, что для ручной алгебры с локальным центром получается «рациональная параметризация» не только модулей конечной длины, но и всех конечно-порожденных модулей. В общем случае это приводит к описанию «родов» конечно-порожденных модулей (два модуля, M и N, принадлежат одному роду, если $M_{\mathfrak{m}} \simeq N_{\mathfrak{m}}$ для всех $\mathfrak{m} \in \max C$).

Описание же модулей с точностью до изоморфизма требует применения техники аделей либо какого-нибудь ее эквивалента для «локально-глобального перехода».

Литература

1. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 63—74.
2. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., 1971. 707 с.
3. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 2. С. 3—60.
4. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Замечание о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функцион. анализ и его прил. 1969. Т. 3, № 4. С. 81—82.
5. Дрозд Ю. А. Об обобщенно однорядных кольцах // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 5. С. 705—710.
6. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. Киев, 1977. С. 104—114.
7. Дрозд Ю. А. Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. Киев, 1979. С. 39—74.
8. Дрозд Ю. А. О классификации конечнопорожденных модулей над нетеровыми алгебрами // IV Всесоюз. симпоз. по теории колец, алгебр и модулей. Кишинев, 1980. С. 36.
9. Дрозд Ю. А. О существовании максимальных порядков // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 3. С. 313—316.
10. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. О квазибассовых порядках // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 2. С. 328—370.
11. Кругляк С. А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1263—1265.
12. Назарова Л. А. Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 3. С. 752—791.
13. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Об одной проблеме Гельфанда // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 1. С. 41—43.
14. Chatters A. W. A decomposition theory for Noetherian hereditary rings // Bull. London Math. Soc. 1972. Vol. 4, N 1. P. 125—126.
15. Drozd Ju. A. Minors and theorems of reduction // Colloquym Publ. Math. Soc. J. Bolyai. 1971. Vol. 6. P. 173—176.
16. Eisenbud D., Griffith Ph. Serial rings // J. Algebra. 1972. Vol. 17, N 3. P. 389—400.
17. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary rings // J. Algebra. 1969. Vol. 13, N 3. P. 327—344.
18. Ringel C. M. The indecomposable representations of the dihedral 2-groups // Math. Ann. 1975. Vol. 214, N 1. P. 19—34.
19. Ringel C. M. The representation type of local algebras // Lecture Notes Math. 1975. Vol. 488. P. 282—305.

А. Е. ЗАЛЕССКИЙ

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ 1 МАТРИЦ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

Введение

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании собственного значения 1 матриц, соответствующих полупростым элементам простых групп Шевалле в их комплексных представлениях. По-видимому, лишь в порядке исключения представление φ простой группы G может обладать тем свойством, что для некоторого элемента $g \in G$ матрица $\varphi(g)$ не имеет собственного значения 1. Таким образом, задача состоит в том, чтобы описать все исключения. Можно ставить вопрос несколько шире: не предполагая простоты группы G, рассматривать элементы, никакая степень которых не является отличным от 1 центральным элементом группы G. Для унипотентных элементов простого порядка групп Шевалле эта задача рассматривалась в статье автора [2]; для полноты картины