УДК 512.58+512.66

Д. Є. Волошин, Ю. А. Дрозд (Інст. мат. Нац. Акад. наук України)

ПОХІДНІ КАТЕГОРІЇ ВУЗЛОВИХ КРИВИХ

DERIVED CATEGORIES OF NODAL CURVES

Описано похідні категорії когерентних пучків над вузловими некомутативними кривими струнного та майже струнного типів.

We describe derived categories of coherent sheaves over nodal noncommutative curves of string and almost string types.

Вступ

Ця стаття є природним продовженням роботи [1], в якій було описано векторні розшарування над деяким класом некомутативних кривих — вузловими (*nodal*) кривими струнного та майже струнного типів. Такі криві є некомутативними аналогами лінійних конфігурацій типу A та $\tilde{A}$, які відіграють важливу роль у теорії векторних розшарувань над проективними кривими, а також у теорії модулів Коена–Маколея [2, 3]. Було також доведено, що, за винятком цих кривих і деяких зважених проективних прямих Гайгле–Ленцінга [4], всі інші некомутативні криві є дикими відносно класифікації векторних розшарувань. У даній роботі ми показуємо, що для вузлових кривих струнного та майже струнного типів можна описати не лише векторні розшарування, а й похідні категорії когерентних пучків. Це знов-таки повністю відповідає тому, що такий опис можливий для лінійних конфігурацій типу A та $\tilde{A}$ [5].

1. Похідні категорії та категорії трійок

Ми користуємося термінологією й результатами роботи [1]. Надалі $(X, \mathcal{A})$ — це проективна *вузлова* (або *нодальна*) некомутативна крива над алгебраїчно замкненим полем $\Bbbk$, $\operatorname{sg}\mathcal{A}_X$ — множина її особливих точок, $\mathcal{H}$ — такий пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр, що $\mathcal{H}_x = \operatorname{End}_{\mathcal{A}_x}(\operatorname{rad}\mathcal{A}_x)$ для кожної точки $x \in X$, $\widetilde{X} = \operatorname{spec}(\operatorname{center}\mathcal{H})$. Тоді $(\widetilde{X}, \mathcal{H})$ — некомутативна крива, всі локалізації якої спадкові, й визначено морфізм окільцьованих просторів $\pi : (\widetilde{X}, \mathcal{H}) \to (X, \mathcal{A})$. Зауважимо, що $\mathcal{H}_x = \mathcal{A}_x$, якщо $x \notin \operatorname{sg}\mathcal{A}$. Позначимо через $\widetilde{\operatorname{sg}}\,\mathcal{A}$ теоретико-множинний прообраз $\operatorname{sg}\mathcal{A}$ при цьому морфізмі, а через $\mathcal{J}$ пучок $\mathcal{A}$-ідеалів такий, що

$$\mathcal{J}_x = \begin{cases} \mathcal{A}_x & \text{якщо } x \notin \operatorname{sg}\mathcal{A}, \\ \operatorname{rad}\mathcal{A}_x & \text{якщо } x \in \operatorname{sg}\mathcal{A}. \end{cases}$$

Оскільки алгебра $\mathcal{A}_x$ вузлова, то $\operatorname{rad}\mathcal{A}_x = \operatorname{rad}\mathcal{H}_x$, тому $\mathcal{J}$ є й пучком $\mathcal{H}$-ідеалів. Позначимо також $\mathcal{S} = \mathcal{A}/\mathcal{J}$, $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{H}/\mathcal{J}$. Можна розглядати 0-вимірні некомутативні криві $(\operatorname{sg}\mathcal{A}, \mathcal{S})$ і $(\widetilde{\operatorname{sg}}\,\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{S}})$ та комутативну діаграму морфізмів

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\operatorname{sg}}\,\mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{S}}) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & (\operatorname{sg}\mathcal{A}, \mathcal{S}) \\ {\scriptstyle\tilde{\iota}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\iota} \\ (\widetilde{X}, \mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & (X, \mathcal{A}). \end{array} \tag{1.1}$$

Всі шари пучків $\mathcal{S}$ і $\widetilde{\mathcal{S}}$ є скінченновимірними напівпростими $\Bbbk$-алгебрами, тому когерентні пучки модулів над $\mathcal{S}$ і $\widetilde{\mathcal{S}}$ природно ототожнюються зі скінченновимірними модулями над напівпростими скінченновимірними $\Bbbk$-алгебрами, відповідно, $\mathbf{S} = \bigoplus_{x\in \mathrm{sg}\,\mathcal{A}} \mathcal{A}_x/\mathcal{J}_x$ і $\widetilde{\mathbf{S}} = \bigoplus_{x\in \widetilde{\mathrm{sg}}\,\mathcal{A}} \mathcal{H}_x/\mathcal{J}_x$.

Ми писатимемо $\mathcal{O}$ та $\widetilde{\mathcal{O}}$ замість $\mathcal{O}_X$ та $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ і позначатимемо через $\mathcal{K}$ пучок раціональних функцій на X (або на $\widetilde{X}$, що те саме), а через $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ — пучок $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{K} \simeq \mathcal{H}\otimes_{\widetilde{\mathcal{O}}}\mathcal{K}$. Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_s$ — незвідні компоненти $\widetilde{X}$, позначимо $\widetilde{\mathcal{O}}_i = \widetilde{\mathcal{O}}|_{X_i}$ і $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}|_{X_i}$.

Через $\mathcal{D}^-(\mathscr{C})$ позначатимемо похідну категорію обмежених праворуч комплексів над абелевою категорією $\mathscr{C}$. Якщо $\mathscr{C} = \mathrm{coh}(\mathcal{R})$ — категорія когерентних пучків на проективному некомутативному многовиді $(V,\mathcal{R})$, то з теореми Серра [6, Теорема II.5.17] випливає, що кожен комплекс з $\mathcal{D}^-(\mathscr{C})$ ізоморфний у цій категорії комплексу локально проективних пучків (*векторних розшарувань* у термінології [1]). Діаграма (1.1) індукує діаграму похідних функторів

$$\begin{CD}
\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) @>{L\pi^*}>> \mathcal{D}^-(\mathcal{H})\\
@V{L\iota^*}VV @VV{L\tilde{\iota}^*}V\\
\mathcal{D}^-(\mathcal{S}) @>{L\bar{\pi}^*}>> \mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}}).
\end{CD} \tag{1.2}$$

Ця діаграма є комутативною в тому розумінні, що існує природний ізоморфізм функторів $\gamma : L\bar{\pi}^* L\iota^* \xrightarrow{\sim} L\tilde{\iota}^* L\pi^*$.

Аналогічно [5], визначимо *категорію трійок* $\mathcal{T}(\mathcal{A})$:

- *Об'єкти* категорії трійок — це трійки $(\mathcal{G}_\bullet, \mathcal{V}_\bullet, \theta)$, де $\mathcal{G}_\bullet$ і $\mathcal{V}_\bullet$, відповідно, — це комплекси з $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ і $\mathcal{D}^-(\mathcal{S})$, а θ — ізоморфізм $L\bar{\pi}^*\mathcal{V}_\bullet \xrightarrow{\sim} L\tilde{\iota}^*\mathcal{G}_\bullet$ у категорії $\mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}})$.
- *Морфізм* із трійки $(\mathcal{G}_\bullet, \mathcal{V}_\bullet, \theta)$ до трійки $(\mathcal{G}'_\bullet, \mathcal{V}'_\bullet, \theta')$ — це така пара морфізмів $\Phi : \mathcal{G}_\bullet \to \mathcal{G}'_\bullet$ і $\phi : \mathcal{V}_\bullet \to \mathcal{V}'_\bullet$ у категоріях, відповідно, $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ і $\mathcal{D}^-(\mathcal{S})$, що діаграма

  $$\begin{CD}
  L\bar{\pi}^*\mathcal{V}_\bullet @>{\theta}>> L\tilde{\iota}^*\mathcal{G}_\bullet\\
  @V{L\bar{\pi}^*\phi}VV @VV{L\tilde{\iota}^*\Phi}V\\
  L\bar{\pi}^*\mathcal{V}'_\bullet @>{\theta'}>> L\tilde{\iota}^*\mathcal{G}'_\bullet
  \end{CD}$$

  є комутативною.

Комутативність діаграми (1.2) дає можливість визначити функтор $\mathbf{F} : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}(\mathcal{A})$, поклавши $\mathbf{F}(\mathcal{F}_\bullet) = (L\pi^*\mathcal{F}, L\iota^*\mathcal{F}, \gamma(\mathcal{F}_\bullet))$. Повторюючи міркування з [5, Теорема 4.2], одержимо такий результат.

Теорема 1.1. *Функтор* $\mathbf{F}$ *є* щільним (*тобто кожен об'єкт з* $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ *ізоморфний якомусь образу* $\mathbf{F}(\mathcal{F}_\bullet)$)*та* консервативним (*тобто з ізоморфізму* $\mathbf{F}(\mathcal{F}_\bullet) \simeq \mathbf{F}(\mathcal{F}'_\bullet)$ *випливає, що* $\mathcal{F}_\bullet \simeq \mathcal{F}'_\bullet$).

З цих двох властивостей випливає також, що $\mathbf{F}$ переводить нерозкладні об'єкти в нерозкладні.

Як і в комутативному випадку [5], функтор $\mathbf{F}$ не є еквівалентністю категорій, бо він не є строгим (тобто може переводити в нуль ненульові морфізми). Він є еквівалентністю лише при обмеженні на повну підкатегорію векторних розшарувань [1].

Розглянемо ідеал $\mathcal{N}$ категорії трійок, який складається з морфізмів вигляду $(\Phi, 0)$ (тоді $\tilde{\imath}^*\Phi = 0$). Покладемо $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}(\mathcal{A})/\mathcal{N}$. Очевидно, композиція $\overline{\mathbf{F}}$ функтора $\mathbf{F}$ з проекцією $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \to \overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ також є щільним і консервативним функтором. Тому класи ізоморфізму об'єктів з $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ й $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ збігаються.

Зауважимо, що якщо $\mathcal{F}_\bullet = (\mathcal{F}_n, \partial_n)$ — комплекс локально проективних пучків над $\mathcal{A}$, то $L\pi^*\mathcal{F}_\bullet$ можна рахувати почленно, як $(\pi^*\mathcal{F}_n, \pi^*\partial_n)$, і те саме має місце для інших складових діаграми (1.2). Категорії $\mathrm{coh}(\mathcal{S})$ і $\mathrm{coh}(\widetilde{\mathcal{S}})$ є напівпростими, тому кожен комплекс у $\mathcal{D}^-(\mathcal{S})$ або $\mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}})$ розкладається у пряму суму "зсунутих простих модулів," тобто комплексів $\mathcal{U}[n]$, де $\mathcal{U}$ — простий $\mathbf{S}$-модуль, а $[n]$ позначає зсув у категорії комплексів. Категорія $\mathrm{coh}(\mathcal{H})$ є *спадковою*, тобто в ній $\mathrm{Ext}^2 = 0$, тому кожен комплекс $\mathcal{F}_\bullet$ з $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ ізоморфний (у цій похідній категорії) прямій сумі зсунутих пучків гомологій: $\mathcal{F}_\bullet \simeq \bigoplus_n H_n(\mathcal{F}_\bullet)[n]$ [7, Теорема 3.1]. Крім того, кожен когерентний пучок над $\mathcal{H}$ розкладається у пряму суму векторних розшарувань та *хмарочосів*, тобто пучків з носієм у одній (замкненій) точці. Нерозкладний хмарочос $\mathcal{F}$ з носієм у точці $x \in \widetilde{\mathrm{sg}}\,\mathcal{A}$ ізоморфний фактору $P_x/\mathcal{J}_x P_x$, де P_x — нерозкладний проективний $\mathcal{H}_x$-модуль. Більш того, завжди існує таке векторне розшарування $\mathcal{P}$ над $\mathcal{H}$ таке, що $\mathcal{P}_x \simeq P_x$. При цьому $\mathrm{End}_{\mathcal{H}_x} P_x \simeq \widetilde{\mathcal{O}}_x$, отже $\mathcal{E}nd_{\mathcal{H}}\mathcal{P} \simeq \widetilde{\mathcal{O}}_i$, де X_i — компонента $\widetilde{X}$, яка містить точку x. Такі векторні розшарування ми зватимемо *лінійними розшаруваннями*. Відомо (дивись, наприклад, [8]), що ґратка підмодулів у нерозкладному проективному $\mathcal{H}_x$-модулі є ланцюгом. Тому в $\mathcal{P}$ існує єдиний підпучок $\mathcal{P}'$ такий, що $\mathcal{P}/\mathcal{P}' \simeq \mathcal{F}$, причому $\mathcal{F}$ однозначно визначається своєю довжиною $l = \mathrm{length}_{\mathcal{H}}\mathcal{F}$ і фактором $\mathcal{U} = \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}$, який є простим $\mathcal{H}_x$-модулем. Отже, у категорії $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ пучок $\mathcal{F}$ можна замінити на комплекс

$$\mathcal{P}(l, x, \mathcal{U}): \quad 0 \to \mathcal{P}' \to \mathcal{P} \to 0,$$

в якому $\mathcal{P}$ стоїть на нульовому місці. Зсуви цього комплексу позначимо через $\mathcal{P}(x,l,\mathcal{U})[n]$ (у цьому комплексі $\mathcal{P}$ стоїть на n-му місці). Отже, кожен об'єкт з $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ можна розглядати як пряму суму зсунутих векторних розшарувань $\mathcal{P}[n]$ і зсунутих комплексів $\mathcal{P}(x,l,\mathcal{U})[n]$.

2. Криві струнного типу

Нагадаємо, що вузлова некомутативна крива зветься кривою *струнного типу*, якщо всі компоненти X_k є раціональними, тобто ізоморфними $\mathbb{P}^1$, а кожен перетин $\widetilde{\mathrm{sg}}_k\,\mathcal{A} = \widetilde{\mathrm{sg}}\,\mathcal{A} \cap X_k$ містить щонайбільше 2 точки. У цьому випадку кожне нерозкладне векторне розшарування над $\mathcal{H}$ є лінійним [1, 4] і з точністю до підкрутки визначається своїми локалізаціями в особливих точках. Тому ці розшарування зручно занумерувати в такий спосіб.

Випадок 1. Нехай x — єдина точка з $\widetilde{\mathrm{sg}}_k\,\mathcal{A}$, причому $\mathcal{H}_x$ має n простих модулів, тобто $\mathcal{H}_x$ є Моріта-еквівалентною до алгебри $R(1;n)$ у позначеннях [1, Теорема 2.1]. Нерозкладні проективні $\mathcal{H}_x$-модулі $P_1, P_2, \dots, P_n$ можна вибрати так, що $P_{i+1} = \mathcal{J}_x P_i$ при $1 \le i < n$, а $\mathcal{J}_x P_n = tP_1$, де t — уніформізуючий елемент з $\widetilde{\mathcal{O}}_x$. Фіксуємо такі лінійні розшарування $\mathcal{P}(x,i)$ $(1 \le i \le n)$, що $\mathcal{P}(x,i)_x = P_i$. Тоді кожне лінійне розшарування над $\mathcal{H}_i$ ізоморфне $\mathcal{P}(x,i)(d)$ для деякого d. Позначимо $U(x,i) = P_i/\mathcal{J}_x P_i$ (це простий $\mathcal{H}_x$-модуль).

Випадок 2. Нехай тепер $\widetilde{\mathrm{sg}}_k\,\mathcal{A} = \{\,x, y\,\}$, причому $\mathcal{H}_x$ має n простих модулів, а $\mathcal{H}_y$ має m простих модулів. Виберемо нерозкладні проективні $\mathcal{H}_x$-модулі $P_1, P_2, \dots, P_n$ так, що $P_{i+1} = \mathcal{J}_x P_i$ при $1 \le i < n$, а $\mathcal{J}_x P_n = tP_1$, де t — уніформізуючий елемент з $\widetilde{\mathcal{O}}_x$. Виберемо нерозкладні проективні $\mathcal{H}_y$-модулі $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ так, що $P'_{i+1} = \mathcal{J}_y P'_i$ при $1 \le i < m$, а $\mathcal{J}_y P'_m = t' P'_1$, де t' — уніформізуючий елемент з $\widetilde{\mathcal{O}}_y$. Фіксуємо такі лінійні розшарування $\mathcal{P}(x,i,j)$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$, що $\mathcal{P}(x,i,j)_x = P_i$, а $\mathcal{P}(x,i,j)_y = P'_j$. Тоді кожне лінійне розшарування над $\mathcal{H}_i$ ізоморфне $\mathcal{P}(x,i,j)(d)$ для деякого d. Зауважимо, що в цьому випадку ми можемо поміняти ролями точки x та y. Тоді пучок $\mathcal{P}(x,i,j)$ перейменується в $\mathcal{P}(y,j,i)$. Позначимо $U(x,i) = P_i/\mathcal{J}_x P_x$ і $U(y,j) = P'_j/\mathcal{J}_y P'_j$.

Надалі ми фіксуємо таку нумерацію. Відповідно, нерозкладні хмарочоси з носієм x будуть представлені комплексами вигляду

$$\mathcal{P}(l,x,i): \quad 0 \to \mathcal{P}(x,i')(d) \to \mathcal{P}(x,i) \to 0$$

або

$$\mathcal{P}(l,x,i): \quad 0 \to \mathcal{P}(x,i',j)(d) \to \mathcal{P}(x,i,j) \to 0,$$

де $l = i' - i + dn$, причому в другому випадку різні індекси j дають комплекси, ізоморфні в $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$. Крім того, ці комплекси ізоморфні будь-якій своїй підкрутці.

Отже, в категорії $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ кожен комплекс ізоморфний прямій сумі зсунутих лінійних розшарувань $\mathcal{P}(x,i)(d)[r]$ або $\mathcal{P}(x,i,j)(d)[r]$ та зсунутих комплексів $\mathcal{P}(l,x,i)[r]$. У категорії $\mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}})$

образом $\mathcal{P}(x,i)[r]$ є зсунутий простий модуль $U(x,i)[r]$ над $\mathcal{H}_x$;

образом $\mathcal{P}(x,i,j)(d)[r]$ є пряма сума зсунутих простих модулів $U(x,i)(d)[r] \oplus U(y,j)(d)[r]$, відповідно, над $\mathcal{H}_x$ та $\mathcal{H}_y$;

образом комплексу $\mathcal{P}(l,x,i)[r]$ є пряма сума зсунутих простих модулів $U(x,i)[r]$ та $U(x,i')[r+1]$.

Легко переконатися, що, аналогічно [5], морфізми комплексів з $\mathcal{D}^-(\mathcal{H})$ індукують ненульові морфізми їхніх образів у $\mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}})$ лише в наступних випадках (з точністю до зсуву):

(1) морфізми $\mathcal{P}(x,i)(d) \to \mathcal{P}(x,i)(d')$ при $d \le d'$;
(2) морфізми $\mathcal{P}(x,i,j)(d) \to \mathcal{P}(x,i,j')(d')$ при $d < d'$ або $d = d'$, $j' < j$, які індукують ненульове відображення на $U(x,i)$ й нульове на $U(y,j)$;
(3) морфізми $\mathcal{P}(x,i,j)(d) \to \mathcal{P}(x,i',j)(d')$ при $d < d'$ або $d = d'$, $i' < i$, які індукують ненульове відображення на $U(y,j)$ й нульове на $U(x,i)$;
(4) морфізми $\mathcal{P}(x,i,j)(d) \to \mathcal{P}(x,i,j)(d)$, які індукують однакові відображення на $U(x,i)$ й на $U(y,j)$;
(5) морфізми $\mathcal{P}(x,i)(d) \to \mathcal{P}(l,x,i)$ або $\mathcal{P}(x,i,j) \to \mathcal{P}(l,x,i)(d)$ при довільних d та j;
(6) морфізми $\mathcal{P}(l,x,i) \to \mathcal{P}(x,i')(d)[1]$ або $\mathcal{P}(l,x,i) \to \mathcal{P}(x,i',j)(d)[1]$ при довільних d та j;
(7) морфізми $\mathcal{P}(l,x,i) \to \mathcal{P}(l_1,x,i)$ при $l_1 < l$, які індукують ненульове відображення на компоненті $U(x,i)$ й нульове на компоненті $U(x,i')[1]$;
(8) морфізми $\mathcal{P}(l,x,i) \to \mathcal{P}(l_1,x,i_1)$ при $l < l_1$, $l + i \equiv l_1 + i_1 \pmod n$, які індукують ненульове відображення на компоненті $U(x,i')[1]$ і нульове на компоненті $U(x,i)$;
(9) морфізми $\mathcal{P}(l,x,i) \to \mathcal{P}(l,x,i)$, які індукують однакові відображення на обох компонентах $U(x,i)$ та $U(x,i')$.

Це дає можливість ототожнити зведену категорію трійок $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ з деякою категорію зображень в'язки ланцюгів у розумінні [9, 10].

Означення 2.1. Визначимо в'язку ланцюгів $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ наступним чином.

Множині індексів в'язки $\mathfrak{B}$ — це множина трійок $\mathbf{I} = \{\, (x,i)[r] \,\}$, де $x \in \widetilde{\mathrm{sg}}\,\mathcal{A}$, $r \in \mathbb{Z}$, а $1 \le i \le n$, де n — кількість простих $\mathcal{H}_x$-модулів.

$\mathfrak{F}_{(x,i)[r]} = \{\, (x,i)[r] \,\}$.

$\mathfrak{E}_{(x,i,r)}$ складається з таких символів:

- четвірок $(x,i,d)[r]$ $(d \in \mathbb{Z})$, якщо x — єдина особлива точка на своїй компоненті;
- п'ятірок $(x,i,j,d)[r]$ $(d \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le m)$, якщо на цій компоненті, крім x, є інша особлива точка y, причому $\mathcal{H}_y$ має m простих модулів;
- четвірок $(l,x,i)[r]$, де $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Четвірка $(l,x,i)[r]$ символізує r-ту компоненту комплексу $\mathcal{P}(l,x,i)[r]$ при $l > 0$ й r-ту компоненту комплексу $\mathcal{P}(-l,x,i')[r-1]$, де $i' \equiv i+l \pmod n$, при $l < 0$.

Порядок на $\mathfrak{E}_{(x,i)[r]}$ визначається в такий спосіб:

- $(x,i,d)[r] < (x,i,d')[r]$ тоді й тільки тоді, коли $d < d'$;
- $(x,i,j,d)[r] < (x,i,j',d')[r]$ тоді й тільки тоді, коли $d < d'$ або $d = d'$, $j > j'$.
- $(l,x,i)[r] < (x,i,d)[r] < (l',x,i)[r]$ при довільних $l < 0$, $l' > 0$ та d;
- $(l,x,i)[r] < (x,i,j,d)[r] < (l',x,i)[r]$ при довільних $l < 0$, $l' > 0$, j та d;
- $(l,x,i)[r] < (l',x,i)[r]$ тоді й тільки тоді, коли $l < l'$.

Відношення $\sim$ визначається в такий спосіб:

- $(x,i,j,d)[r] \sim (y,j,i,d)[r]$, якщо x і y належать одній незвідній компоненті.
- $(l,x,i)[r] \sim (-l,x,i')[r+1]$, якщо $l > 0$, а $i' \equiv l+i \pmod n$.
- $(x,i)[r] \sim (x,i)[r]$, якщо існують двоє різних простих $\mathcal{S}$-модулів V та V', для яких $\bar{\pi}^*V \simeq \bar{\pi}^*V' \simeq U(x,i)$. (Нагадаємо, що таких модулів завжди не більше двох [11]).
- $(x,i) \sim (x',i')$, якщо існує такий простий $\mathcal{A}$-модуль V, що $\bar{\pi}^*V \simeq U(x,i) \oplus U(x',i')$.

З попередніх розглядів безпосередньо випливає наступний основний результат.

Теорема 2.2. *Якщо $(X,\mathcal{A})$ — вузлова некомутативна крива струнного типу, то зведена категорія трійок $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ еквівалентна повній підкатегорії категорії зображень в'язки ланцюгів $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, що складається з таких зображень M, у яких усі матриці $M_{(x,i)[r]}$ обертовні.*

Зауважимо, що оскільки йдеться про категорію $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$, в якій комплекси обмежені лише справа, то в цій теоремі, як і в теоремі 3.2 наступного розділу, треба брати до уваги й *нескінченні* зображення в'язки $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, розглянуті в [10, Appendix C]. Скінченні зображення описують об'єкти похідної категорії $\mathcal{D}^{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$ *досконалих комплексів*, тобто таких, які ізоморфні (у похідній категорії) скінченним комплексам векторних розшарувань.

Оскільки нерозкладні зображення в'язки ланцюгів — це струни й стрічки (дивись [9, 10]), причому при фіксованій розмірності кількість струн скінченна, а стрічки параметризуються елементами поля $\Bbbk$, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2.3. *Кожна вузлова некомутативна крива струнного типу є похідно ручною в розумінні* [12].

Зауваження 2.4. Нагадаємо, що досконала похідна категорія $\mathcal{D}^{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$ є *густою* (*thick*) в похідній категорії обмежених комплексів $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ [13], тому визначена факторкатегорія $\mathcal{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/\mathcal{D}^{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$, яка вимірює "нерегулярність" кривої $\mathcal{A}$, тобто те, наскіліьки вона відрізняється від такої, на якій категорія когерентних пучків має скінченну гомологічну розмірність. Оскільки в описі об'єктів з $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ параметр виникає лише в стрічках, які напевне відповідають комплексам з $\mathcal{D}^{\mathrm{per}}(\mathcal{A})$, для кривих струнного типу категорія $\mathcal{D}^{\mathrm{sg}}(\mathcal{A})$ є *дискретною*, тобто не має нетривіальних сімей неізоморфних нерозкладних комплексів.

Те саме стосується й кривих майже струнного типу, які розглядаються в наступному розділі.

3. Криві майже струнного типу

Нагадаємо, що вузлова некомутативна крива зветься кривою *майже струнного типу*, якщо всі компоненти X_k є раціональними, тобто ізоморфними $\mathbb{P}^1$, а кожен перетин $\widetilde{\mathrm{sg}}_k\,\mathcal{A} = \widetilde{\mathrm{sg}}\,\mathcal{A} \cap X_k$ містить щонайбільше 3 точки, причому якщо цих точок 3, то для двох з них алгебра $\mathcal{A}_{\pi(x)}$ є спадковою й має 2 прості модулі, тобто є Моріта-еквівалентною до алгебри $R(1;2)$ у позначеннях [1, Теорема 2.2]. Ці точки зватимемо «*зайвими*» й позначатимемо $\widetilde{\mathrm{sg}}'_k\,\mathcal{A}$ множину $\widetilde{\mathrm{sg}}_k\,\mathcal{A}$, з якої виключені зайві точки, а $\widetilde{\mathrm{sg}}'\,\mathcal{A} = \cup_k \widetilde{\mathrm{sg}}'\,\mathcal{A}$. Точку $x \in \widetilde{\mathrm{sg}}'_k\,\mathcal{A}$ назвемо *спеціальною*, якщо на компоненті X_k є зайві точки. Компоненту X_k назвемо *спеціальною*, якщо ній є спеціальні точки.

Векторні розшарування на неспеціальних компонентах $\mathcal{H}_k$ залишаються такими ж, як у випадку струнного типу. Нехай X_k — спеціальна компонента, $x \in X_k$ — спеціальна точка, а x_1, x_2 — зайві точки з компоненти X_k. Припустимо, що $\mathcal{H}_x$ має n простих модулів, тобто є Моріта еквівалентною до $R(1;n)$. Тоді з [1, 4] випливає, що нерозкладні векторні розшарування над $\mathcal{H}_k$ є такими:

(1) Лінійні розшарування $\mathcal{P}(x,i\,|\,c_1,c_2)(d)$, де $1 \le i \le n$, $d \in \mathbb{Z}$ а $c_1, c_2 \in \{\,1,2\,\}$. Це таке лінійне розшарування $\mathcal{P}$ степеня d, що $\mathcal{P}/\mathcal{J}\mathcal{P} \simeq U(x,i) \oplus U(x_1,c_1) \oplus U(x_2,c_2)$.

(2) Для кожної пари $1 \le i < j \le n$ і кожного $d \in \mathbb{Z}$ ще двоє таких нерозкладних векторних розшарувань $\mathcal{P}(i,j\,|\,c)(d)$, де $c \in \{\,1,2\,\}$, що $\deg \mathcal{P}(i,j\,|\,c)(d) = 2d - c + 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(i,j\,|\,c)(d)/\mathcal{J}\mathcal{P}(i,j\,|\,c)(d) \simeq U(x,i) \oplus U(x,j) \oplus \\ \oplus U(x_1,1) \oplus U(x_1,2) \oplus U(x_2,1) \oplus U(x_2,2),\end{aligned}$$

причому існують точні послідовності

$$0 \to \mathcal{P}(j\,|\,1,2)(d) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,1)(d) \to \mathcal{P}(i\,|\,2,1)(d) \to 0, \tag{3.1}$$

$$0 \to \mathcal{P}(j\,|\,2,1)(d) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,1)(d) \to \mathcal{P}(i\,|\,1,2)(d) \to 0, \tag{3.2}$$

$$0 \to \mathcal{P}(j\,|\,1,1)(d-1) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,2)(d) \to \mathcal{P}(i\,|\,2,2)(d) \to 0, \tag{3.3}$$

$$0 \to \mathcal{P}(j\,|\,2,2)(d) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,2)(d) \to \mathcal{P}(i\,|\,1,1)(d-1) \to 0, \tag{3.4}$$

а також

$$0 \to \mathcal{P}(i\,|\,1,1)(d-1) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,1)(d) \to \mathcal{P}(j\,|\,2,2)(d+1) \to 0, \tag{3.5}$$

$$0 \to \mathcal{P}(i\,|\,2,2)(d) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,1)(d) \to \mathcal{P}(j\,|\,1,1)(d) \to 0, \tag{3.6}$$

$$0 \to \mathcal{P}(i\,|\,1,2)(d-1) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,2)(d) \to \mathcal{P}(j\,|\,2,1)(d) \to 0, \tag{3.7}$$

$$0 \to \mathcal{P}(i\,|\,2,1)(d-1) \to \mathcal{P}(i,j\,|\,2)(d) \to \mathcal{P}(j\,|\,1,2)(d \to 0). \tag{3.8}$$

Можна переконатися, що ненульові відображення в категорії $\mathcal{D}^-(\widetilde{\mathcal{S}})$ індукуються лише морфізмами, зазначені в пунктах (1–9) минулого розділу, морфізмами, які входять до послідовностей (3.1–3.8) та їх композиціями. Тому категорію $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ знову можна ототожнити з категорією зображень деякої в'язки ланцюгів $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, яка будується аналогічно струнному випадку, а саме в такий спосіб.

Означення 3.1. *Множина індексів* в'язки $\mathfrak{B}$ — це множина трійок $\mathbf{I} = \{\,(x,i)[r]\,\}$, де $x \in \widetilde{\mathrm{sg}}'\,\mathcal{A}$, $r \in \mathbb{Z}$, а $1 \le i \le n_x$, де n_x — кількість простих $\mathcal{H}_x$-модулів.

$\mathfrak{F}_{(x,i)[r]} = \{\,(x,i)[r]\,\}$.

Якщо точка x не є спеціальною, множина $\mathfrak{E}_{(x,i)[r]}$ і порядок на ній визначаються, як у струнному випадку.

Якщо точка x є спеціальною, множина $\mathfrak{E}_{(x,i)[r]}$ складається з таких символів:

- п'ятірок $(x,i,d\,|\,c)[r]$ $(d\in\mathbb{Z},\ c\in\{\,1,2\,\})$;
- шісток $((x,i,j,d\,|\,c)[r]$ $(d\in\mathbb{Z},\ c\in\{\,1,2\,\},\ j\neq i,\ 1\leq j\leq n_x)$;
- четвірок $(l,x,i)[r]$ $(l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$

Порядок на $\mathfrak{E}_{(x,i)[r]}$ при цьому визначається в такий спосіб:

- $(x,i,j,d\,|\,2)[r]<(x,i,j',d\,|\,2)[r]<(x,i,d\,|\,2)[r]<$ $<(x,i,j,d\,|\,1)[r]<(x,i,j',d\,|\,1)[r]<(x,i\,|\,1)[r]<$ $<(x,i,j,d'\,|\,2)[r]$ при довільних $d,j,d'>d,j'<j<i$;
- $(x,i,d\,|\,2)[r]<(x,i,j,d\,|\,2)[r]<(x,i,j',d\,|\,2)[r]<$ $<(x,i,d\,|\,1)[r]<(x,i,j,d\,|\,1)[r]<(x,i,j',d\,|\,1)[r]<$ $<(x,i,d'\,|\,1)[r]$ при довільних $d,j,d'>d,j>j'>i$;
- $(l,x,i)[r]<(x,i,d\,|\,c)[r]<(l',x,i)[r]$ при довільних $c,d,l<0,l'>0$;
- $(l,x,i)[r]<(x,i,j,d\,|\,c)[r]<(l',x,i)[r]$ при довільних $c,d,j,l<0,l'>0$;
- $(l,x,i)[r]<(l',x,i)[r]$ тоді й тільки тоді, коли $l<l'$.

Відношення $\sim$ визначається, як у струнному випадку, з додачею того, що $(x,i,d\,|\,c)[r]\sim(x,i,d\,|\,c)[r]$ і $(x,i,j,d\,|\,c)[r]\simeq(x,j,i,d\,|\,c)[r]$.

У цьому кодуванні символ $(x,i,d\,|\,1)$ відповідає розшаруванням $\mathcal{P}(x,i\,|\,1,2)(d)$ та $\mathcal{P}(x,i\,|\,2,1)(d)$, символ $(x,i,d\,|\,2)$ — розшаруванням $\mathcal{P}(x,i\,|\,2,2)(d)$ та $\mathcal{P}(x,i\,|\,1,1)(d-1)$, а символ $(x,i,j\,|\,c)(d)$ — розшаруванню $\mathcal{P}(x,i,j\,|\,c)(d)$ при $i<j$ і розшаруванню $\mathcal{P}(x,j,i\,|\,c)(d)$ при $i>j$.

Знов-таки, з попередніх міркувань випливає наступний результат.

Теорема 3.2. *Якщо $(X,\mathcal{A})$ — вузлова некомутативна крива майже струнного типу, то зведена категорія трійок $\overline{\mathcal{T}}(\mathcal{A})$ еквівалентна повній підкатегорії категорії зображень в'язки ланцюгів $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, що складається з таких зображень M, у яких усі матриці $M_{(x,i)[r]}$ обертовні.*

Наслідок 3.3. *Кожна вузлова некомутативна крива майже струнного типу є похідно ручною.*

Література

[1] *Drozd Y. A., Voloshyn D. E.* Vector bundles over noncommutative nodal curves // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**. – № 2. – С. 185–199.

[2] *Drozd Y., Greuel G.-M.* Tame and wild projective curves and classification of vector bundles // J. Algebra. – 2001. – **246**. – № 1. – P. 1–54.

[3] *Drozd Y., Greuel G.-M., Kashuba I.* On Cohen–Macaulay modules on surface singularities // Moscow Math. J. – 2003. – **3**. – № 2. – P. 397–418.

[4] *W. Geigle, H. Lenzing.* A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras // Singularities,

Representations and Vector Bundles. Lecture Notes in Math. Vol. 1273. – Springer–Verlag, 1987. – P. 265–297.

[5] *Burban I., Drozd Y.* Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections // Duke Math. J. – 2004. – **21**. – № 2. – P. 129–229.

[6] *Hartshorne R.* Algebraic Geometry. – Springer–Verlag, 1977. – xvi+496 p.

[7] *Lenzing H.* Hereditary categories // Handbook of Tilting Theory. London Math. Society Lecture Note Ser. Vol. 332. – Cambridge Univ. Press, 2007. – P. 105–146.

[8] *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Ройтер А. В.* О наследственных и бассовых порядках // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**. – № 6. – С. 1415–1436.

[9] *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. –**3**. – № 5. – С. 38–61.

[10] *Burban I., Drozd Y.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**. – № 1. – P. 46 – 94.

[11] *Волошин Д. Є.* Будова нодальних алгебр // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**. – № 7. – С. 880–888.

[12] *Drozd Y. A.* Derived tame and derived wild algebras // Algebra and Discrete Math. – 2004. – № 1. – P. 54–74.

[13] *Neeman A.* Triangulated Categories. – Princeton University Press, 2001. – vii+449 p.