МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 37, № 3 (1985)

О СУЩЕСТВОВАНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ

Ю. А. Дрозд

Коммутативное кольцо $\mathfrak{o}$ назовем псевдонётеровым, если для любого элемента $a \in \mathfrak{o}$ во множестве простых идеалов $P(a)$, содержащих a, есть лишь конечное число минимальных элементов, причем для всякого минимального $\mathfrak{p} \in P(a)$ кольцо $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ нётерово. Нётерово кольцо всегда псевдонётерово [1], и псевдонётеровы кольца обладают многими свойствами нётеровых колец. Так, если $\mathfrak{p}$ — минимальный идеал из $P(a)$, то $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leqslant 1$ (это следует из теоремы о главных идеалах для нётеровых колец [2]), причем если a — не делитель нуля, то $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1$. Множество S минимальных простых идеалов кольца $\mathfrak{o}$ конечно, причем если $\mathfrak{o}$ редуцировано (не содержит нильпотентов), то $\bigcup_{\mathfrak{p}\in S}\mathfrak{p}$ совпадает с множеством всех делителей нуля, а полное кольцо частных $K(\mathfrak{o})$ изоморфно $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} K(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$ и т. п.

Далее $\mathfrak{o}$ всюду обозначает целостное псевдонётерово кольцо, K — его поле частных, P — множество простых идеалов высоты 1 кольца $\mathfrak{o}$. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K. Напомним, что $\mathfrak{o}$-подмодуль $M \subset V$ называется решеткой в V, если $KM = V$ и M содержится в некотором конечно-порожденном $\mathfrak{o}$-подмодуле в V [1]. Если A — конечномерная K-алгебра, то решетка Λ в A, являющаяся, кроме того, подкольцом (содержащим 1), называется $\mathfrak{o}$-порядком в A или просто порядком [3]. Порядок Λ в алгебре A называется максимальным, если не существует порядка в A, строго содержащего Λ. Легко видеть, что в каждой конечномерной K-алгебре содержится некоторый порядок.

ТЕОРЕМА. *Максимальный $\mathfrak{o}$-порядок в конечномерной K-алгебре A существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

(1) *для любого $\mathfrak{p} \in P$ алгебра $\bar{A}_{\mathfrak{p}} = A \otimes_{\mathfrak{o}} \bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$, где $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$ — $\mathfrak{p}$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ полупроста;*

(2) *для некоторого (а тогда и для любого) $\mathfrak{o}$-порядка Λ в алгебре A и всех $\mathfrak{p} \in P$, кроме конечного числа, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$-порядки $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ максимальны.*

Если эти условия выполнены, то всякий $\mathfrak{o}$-порядок в алгебре A содержится в некотором максимальном порядке.

Доказательство. Из результатов [4] следует, что данную теорему достаточно доказать для случая когда $\mathfrak{o}$ — локальное целостное нётерово кольцо размерности Крулля 1. Обозначим $\mathfrak{p}$ его максимальный идеал, $\bar{\mathfrak{o}}$ — пополнение $\mathfrak{o}$ в $\mathfrak{p}$-адической топологии, $\bar{A} = A \otimes_{\mathfrak{o}} \bar{\mathfrak{o}}$. Если в $\bar{A}$ есть нильпотентный идеал I, то для любого $\mathfrak{o}$-порядка Λ в A строго больший порядок строится следующим способом [5]. Обозначим $\bar{\Lambda}$ замыкание Λ в $\bar{A}$ и положим $L = \bar{\Lambda} \cap I$. Заметим, что $L \neq 0$, так как $K\bar{\Lambda} = \bar{A}$. Выберем какой-нибудь ненулевой элемент $a \in \mathfrak{p}$ и положим $M = \bar{\Lambda} + a^{-1}L + a^{-2}L^2 + \ldots$ (сумма конечная, так как L нильпотентен). Очевидно, M — подкольцо в $\bar{A}$, строго содержащее $\bar{\Lambda}$. Кроме того, так как $\bar{\Lambda}$, а потому и M, открыты, а A плотно в $\bar{A}$, то $M = \bar{\Gamma}$, где $\Gamma = M \cap A$. Значит, Γ — порядок в A, строго содержащий Λ.

Пусть теперь в $\bar{A}$ нет нильпотентных идеалов. Тогда $\bar{\mathfrak{o}}$ — редуцированное кольцо и из [6] следует, что целое замыкание $\mathfrak{o}$ в K — конечно-порожденный $\mathfrak{o}$-модуль. Обозначим его $\mathfrak{o}^0$. Всякий $\mathfrak{o}^0$-порядок можно рассматривать и как $\mathfrak{o}$-порядок, причем всякий $\mathfrak{o}$-порядок Λ содержится в $\mathfrak{o}^0$-порядке $\mathfrak{o}^0\Lambda$. Следовательно, максимальные $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{o}^0$-порядки — это одно и то же.

Кроме того, в $\mathfrak{o}^0$ есть лишь конечное число максимальных идеалов, для каждого максимального $\mathfrak{m}$ кольцо $\mathfrak{o}^0_{\mathfrak{m}}$ есть кольцо дискретного нормирования и $\mathfrak{o}^0 \otimes_{\mathfrak{o}} \bar{\mathfrak{o}} \simeq \bigoplus \bar{\mathfrak{o}}^0_{\mathfrak{m}}$, где сумма берется по всем максимальным идеалам $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}^0$ [1]. Поэтому далее можно считать, что $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^0$ — кольцо дискретного нормирования. Сопоставляя $\mathfrak{o}$-порядку $\Lambda \subset A$ $\bar{\mathfrak{o}}$-порядок $\bar{\Lambda} \subset \bar{A}$, получим взаимно однозначное соответствие, так как $\Lambda = \bar{\Lambda} \cap A$ [5], так что $\mathfrak{o}$ можно заменить на $\bar{\mathfrak{o}}$ и считать полным.

Предположим, что A — тело. Тогда, если Λ — произвольный порядок в A, а M — произвольный ненулевой Λ-подмодуль в A, то $KM = A$. В частности, если M конечнопорожден, то он является решеткой в A и если N — ненулевой подмодуль в M, то M/N — модуль конечной длины. Пусть $\Lambda \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$ — возрастающая цепочка порядков в A, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$. Всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ цел над $\mathfrak{o}$ [1], так что $\Gamma \cap K = \mathfrak{o}$ и $\Gamma \neq A$. Обозначим $T = A/\Lambda$ и применим к точной последовательности $0 \to \Lambda \to A \to T \to 0$ точный функтор $D = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(-, K/\mathfrak{o})$. Получим точную последовательность $0 \to DT \to \to DA \to D\Lambda \to 0$. Поскольку DA — полный $\mathfrak{o}$-модуль без кручения [7], его можно рассматривать как A-модуль. Кроме того, естественный гомоморфизм $X \to DDX$ является изоморфизмом для всех нётеровых и артиновых модулей [8], в частности, для Λ и T, а потому и для A. Отсюда следует, что $DA \simeq A$ и DT — решетка в A. Но Γ/Λ — собственный подмодуль в T, значит, $D(\Gamma/\Lambda)$ — собственный фактор-модуль DT, т. е. модуль конечной длины. Поэтому и Γ/Λ — модуль конечной длины, цепочка $\Lambda \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$ обрывается и в A есть максимальный порядок.

В общем случае разложим A в прямую сумму простых алгебр: $A = \bigoplus_{k=1}^{m} M_{n_k}(A_k)$, где A_k — тела. Тогда, если Δ_k — максимальные порядки в A_k, то $\Gamma = \bigoplus_{k=1}^{m} M_{n_k}(\Delta_k)$ — максимальный порядок в A [5]. Остается заметить, что если Λ — любой порядок в A, то $\Lambda\Gamma$ — решетка в A, являющаяся правым Γ-модулем, а потому ее левое кольцо множителей — максимальный порядок, очевидно, содержащий Λ [5].

Следствие 1. *Целое замыкание $\mathfrak{o}$ в K является решеткой тогда и только тогда, когда для любого $\mathfrak{p} \in P$ кольцо $\bar{\mathfrak{o}}_{\mathfrak{p}}$ редуцировано и для всех $\mathfrak{p}$, кроме конечного числа, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ есть кольцо дискретного нормирования.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{o}$ — кольцо дискретного нормирования, причем пополнение поля K по этому нормированию сепарабельно над K. Тогда в любой полупростой K-алгебре существуют максимальные порядки.*

Киевский государственный
университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило
14.02.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра.— М.: Мир, 1971.
[2] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра.— М.: Наука, 1976.
[3] Auslander M., Goldman O. Maximal orders.— Trans. Amer. Math. Soc., 1960, v. 97, p. 1—24.
[4] Дрозд Ю. А. О полугруппе дивизоров коммутативного кольца.— Тр. МИ АН СССР, 1978, т. 148, с. 156—157.
[5] Фаддеев Д. К. Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений.— Тр. МИ АН СССР, 1965, т. 80, с. 145—182.
[6] Дрозд Ю. А. Идеалы коммутативных колец.— Мат. сб., 1976, т. 101, № 3, с. 22—34.
[7] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.
[8] Matlis E. Injective modules over Noetherian rings.— Pacific. J. Math., 1958, v. 8, p. 511—528.