Ю.А.Дрозд

МАТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И КАТЕГОРИИ МАТРИЦ

В работе [I] А.В.Ройтер дает определение матричной задачи над полем с помощью понятия бисистемы и ее представлений. Такой подход существенно опирается на выбор базиса и связан с довольно сложной вычислительной конструкцией. Поэтому его трудно распространить на другие классы задач, например, на задачи, рассмотренные в [2].

В настоящей статье дается более общее определение матричной задачи. Для задач над полем оно эквивалентно определению А.В.Ройтера, но отличается от него инвариантностью. Такое определение позволяет применить к изучению матричных задач теоретико-категорную технику. Это дает возможность, например, доказать однозначность разложения матриц в прямую сумму неразложимых для широкого класса задач, включающего, в частности, матричные задачи над полем. Кроме того, возникает естественная шкала сравнений, которая придает точный смысл утверждениям типа "задача A слабее (или сильнее) задачи Б".

§ I. Определение матричной задачи

В основу предлагаемого определения положены следующие соображения. Пусть F - свободный модуль ранга n над кольцом A, $F^* = \mathrm{Hom}_A(F, A)$ - двойственный модуль. Если в F зафиксировать базис, то матрицы размерности n над кольцом A можно отождествить с элементами тензорного произведения $F^* \otimes_A F$. При таком отождествлении множество матриц естественно превращается в бимодуль над кольцом $A_F = \mathrm{Hom}_A(F,F) \simeq \mathrm{Hom}_A(F^*, F^*)$.
Две матрицы, X и Y подобны, если в A_F есть такой обратимый элемент S, что $Y = S^{-1} X S$.

Для того, чтобы получить отсюда нужное определение, остается сделать два шага. Первый - замена свободных модулей проективными - вызван скорее соображениями удобства и достаточно очевиден. Второй шаг выглядит менее естественно, но именно он и составляет основу всего дальнейшего. Этот шаг заключается в том, что коэффициенты матриц берутся не из самого кольца A, а из некоторого A-бимодуля.

Напомним, что A-бимодуль V - это одновременно левый и правый A-модуль, в котором левое и правое умножения перестановочны: $(av)b=a(vb)$ для любых $a,b\in A$, $v\in V$. Если P – конечно-порожденный проективный левый A-модуль, $P^*=Hom_A(P,A)$ – двойственный к нему проективный правый A-модуль, то можно образовать тензорное произведение $V_P=P^*\otimes_A V\otimes_A P$. Элементы V_P мы и будем называть матрицами с коэффициентами из V, или V-матрицами.

Пусть $A_P=Hom_A(P,P)$ – кольцо эндоморфизмов модуля P. Тогда P естественно рассматривать как правый A_P-модуль, а P^* – как левый A_P-модуль. Поэтому V_P превращается в A_P-бимодуль. Две матрицы, X и Y, лежащие в V_P, назовем подобными, если в кольце A_P есть такой обратимый элемент S, что $Y=S^{-1}XS$.

Матричная задача (A,V), определенная A-бимодулем V – это задача классификации V-матриц с точностью до подобия.

Для матриц с коэффициентами в произвольном бимодуле V можно ввести понятие прямой суммы. Пусть $P=P_1\oplus P_2$. Тогда $V_P\simeq W_{11}\oplus W_{12}\oplus W_{21}\oplus W_{22}$, где $W_{ij}=P_i\otimes_A V\otimes_A P_j$ (заметим, что эта прямая сумма групп, но не модулей). В частности, определен мономорфизм $V_{P_1}\oplus V_{P_2}=W_{11}\oplus W_{22}\longrightarrow V$. Образ пары (X_1,X_2) при этом мономорфизме мы будем называть прямой суммой матриц X_1 и X_2 и обозначать $X_1\oplus X_2$. Очевидно, если $V=A$, а P_i – свободные модули, это определение превращается в обычное понятие прямой суммы матриц.

Матрицы вида $X_1\oplus X_2$ назовем разложимыми, а матрицы, которые нельзя представить в таком виде – неразложимыми.

Как будет видно в дальнейшем, при определении матричных задач естественно не ограничиваться кольцами с единицей, а ввести в рассмотрение несколько более широкий класс колец.

Кольцо A назовем кольцом с разложением единицы, если для любого конечного набора его элементов $a_1,\dots,a_n$ найдутся такие идемпотенты e и f, что $ea_i=a_i$ и $a_if=a_i$ $(i=1,\dots,n)$. Правый (левый) A-модуль M назовем унитарным, если $MA=M$ $(AM=M)$. Очевидно, если A – кольцо с единицей, это определение равносильно обычному. В дальнейшем все кольца мы будем считать кольцами с разложением единицы, а все модули - унитарными, в частности, бимодули - унитарными и слева, и справа.

Примерами колец с разложением единицы могут служить кольца функций, подчиненных условиям конечности: кольцо непрерывных функций с компактными носителями; кольцо линейных преобразований конечного ранга и т.п. Приведем еще один пример, принадлежащий Габриелю [3], и наиболее важный для нас.

Пусть $\mathbb{A}$ - аддитивная категория.*) Положим $A = \oplus \, Hom(X, Y)$ где X и Y независимо пробегают множество объектов категории $\mathbb{A}$. Для морфизмов $f \in Hom(X, Y)$ и $g \in Hom(X', Y')$ определено произведение fg, если $X = Y'$. Определим $fg = 0$, если $X \neq Y'$ и распространим эту операцию по дистрибутивности на все A. Легко проверить, что таким образом получается кольцо с разложением единицы, которое мы назовем кольцом морфизмов категории $\mathbb{A}$.

§ 2. Сравнение с бисистемами. Точность.

Если V - бимодуль над кольцом A, то правое и левое умножения на элемент $a \in A$ определяют эндоморфизмы $r(a)$ и $l(a)$ абелевой группы V. Обозначим через E кольцо эндоморфизмов V как абелевой группы. Тогда отображение $r\colon A \to E$ есть гомоморфизм, а $l\colon A \to E$ - антигомоморфизм колец. В результате получаем гомоморфизм $A \to E^{\circ} \times E$, где E° - кольцо, антиизоморфное E, элементы которого мы будем обозначать φ° ($\varphi \in E$). Образ этого гомоморфизма, $\bar{A}$, есть подкольцо в $E^{\circ} \times E$, причем из перестановочности левого и правого умножений следует, что $\bar{A}$ удовлетворяет такому условию:

если (α°, β) и (γ°, δ) лежат в $\bar{A}$, то $\alpha\delta = \delta\alpha$.

Предположим, что A - конечномерная алгебра над полем K, V - алгебра-бимодуль (т.е. $cv = vc$ при $c \in K$), конечномерный как векторное пространство над K. Такую задачу мы будем называть конечномерной матричной задачей над полем K. Тогда в качестве E можно взять кольцо линейных преобразований V, или, после выбора базиса, кольцо матриц. Если V - точный бимодуль, т.е. в A нет таких ненулевых элементов a, что $aV = Va = 0$, то отображение $A \to \bar{A}$ будет изоморфизмом. Поэтому элементы A отождествятся с парами матриц, причем эти пары образуют подпространство в $E \times E$. Если теперь проследить, как строятся модули V_p и соответствующие кольца A_p, и перейти к рассмотрению обратимых элементов этих колец, то мы получим понятие бисистемы и ее представлений, введенное в [I].

Разберем роль условия точности. Абелеву группу V можно рассматривать и как бимодуль над $\bar{A}$, очевидно, точный, который мы обозначим $\bar{V}$. Всякому проективному A-модулю P соответствует

*) Мы всегда будем предполагать, что объекты категории образуют множество.

проективный $\bar{A}$-модуль $\bar{P}=P\otimes_A \bar{A}$, причем группы матриц V_P и $\bar{V}_{\bar{P}}$ естественно изоморфны. Кроме того, существует эпиморфизм колец $A_P \longrightarrow \bar{A}_{\bar{P}}$ и элементы A_P действуют на V_P так же как их образы действуют на $\bar{V}_{\bar{P}}$. Однако не всякий обратимый элемент из $\bar{A}_{\bar{P}}$ является образом обратимого же элемента из A_P .Поэтому матрицы, подобные как элементы $\bar{V}_{\bar{P}}$, могут вовсе не быть подобными как элементы V_P , и матричная задача (A,V) не сводится к задаче $(\bar{A}, \bar{V})$.Приведем пример, иллюстрирующий этот факт.

Положим $A=\mathbb{Z}$, $V=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогда $\bar{A}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и (A,V) - это задача о приведении матриц над полем из p элементов подобными преобразованиями. Но, как хорошо известно, матрица S над полем вычетов является образом целочисленной обратимой матрицы тогда и только тогда, когда $\det S=\pm 1$. Поэтому (A,V) - это задача приведения матриц над полем из p элементов преобразованиями вида $X \longrightarrow S^{-1}XS$, где $\det S=\pm 1$. Нетрудно проверить (см.[2]), что из подобия $\bar{V}$ -матриц не следует их подобие как V -матриц: здесь возникают нетривиальные арифметические инварианты.

Есть, однако, важный случай, в котором можно ограничиться рассмотрением точных бимодулей. Это случай полусовершенного кольца A . Кольцо A (с разложением единицы) назовем п о л у с о в е р ш е н н ы м , если всякий идемпотент в нем разлагается в сумму ортогональных примитивных идемпотентов.*) Для колец с единицей это определение эквивалентно определению Басса([5]). Аналогично [5] можно показать, что над полусовершенным кольцом всякий конечнопорожденный (унитарный) модуль обладает проективным накрытием, а для конечнопорожденных проективных модулей имеет место теорема Крулля-Шмидта. Если A - полусовершенное кольцо, то такими будут и кольца A_P и $\bar{A}_{\bar{P}}$, а тогда всякий обратимый элемент из $\bar{A}_{\bar{P}}$ является образом обратимого элемента из A_P . Поэтому классы подобия V-матриц и $\bar{V}$-матриц совпадают, т.е. матричная задача (A,V) сводится к задаче $(\bar{A},\bar{V})$.

Конечномерная алгебра над полем всегда полусовершенна.Поэтому в задаче, конечномерной над некоторым полем, бимодуль V можно считать точным. Но тогда, как мы уже видели, наше определение конечномерной матричной задачи над полем фактически эквивалентно определению А.В.Ройтера, данному в [I].

Для матричных задач с полусовершенным кольцом A удобно ввести специальную запись. Назовем два идемпотента, e и ξ э к в и в а л е н т н ы м и , если $eA \simeq \xi A$. Выберем в каждом классе эквивалентности примитивных идемпотентов по одному представителю. Полученное множество $\{e_i\}$ будем называть п о л н о й с и с т е м о й примитивных идемпотентов. Положим

---

*) Напомним, что идемпотент e называется примитивным, если eAe - локальное кольцо (вполне примарное в терминологии Джекобсона [4]).

$$A_{ij} = e_i A e_j; \quad V_{ij} = e_i V e_j; \quad P_i = A e_i .$$

Всякий конечнопорожденный проективный A-модуль P однозначно разлагается в прямую сумму:

$$P \simeq P_{i_1}^{m_1} \oplus \ldots \oplus P_{i_n}^{m_n} .$$

Заметим, что $P_i^* \simeq e_i A$. Тогда всякий элемент кольца A_P и модуля V_P естественно представлять в виде блочных матриц:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \ldots & S_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n1} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $S_{k\ell}$ и $X_{k\ell}$ – матрицы размера $m_k \times m_\ell$ с коэффициентами, соответственно, из $A_{i_k i_\ell}$ и $V_{i_k i_\ell}$. При этом умножение матриц определяется обычным способом.

§ 3. Разделенные задачи и бифункторы

Важный класс матричных задач возникает следующим образом. Рассматриваются два кольца, A_1 и A_2, и $A_1 - A_2$ – бимодуль V, т.е. левый A_1 – и правый A_2-модуль такой, что $(a_1 v)a_2 = a_1(v a_2)$ для любых $a_i \in A_i$, $v \in V$. Обозначим $A = A_1 \times A_2$. V можно превратить в A-бимодуль, положив

$$(a_1, a_2)v = a_1 v; \qquad v(a_1, a_2) = v a_2 .$$

Такие бимодули и определенные ими матричные задачи назовем разделенными. Нетрудно убедиться, что для конечномерных задач над полем это определение совпадает с данным в [I].

В этом случае всякий проективный A-модуль имеет вид $P_1 \oplus P_2$, где P_i – проективный A_i-модуль, причем $A_P \simeq A_{P_1} \times A_{P_2}$, а $V_P \simeq P_1^* \otimes_{A_1} V \otimes_{A_2} P_2$, т.к. $P_2^* \otimes_A V = V \otimes_A P_1 = 0$. Поэтому V_P также является разделенным бимодулем. Очевидно, матрицы X и Y подобны тогда и только тогда, когда в A_{P_1} и A_{P_2} найдутся такие обратимые элементы S и T, что $Y = SXT$. Говорят, что над V-матрицами совершаются "элементарные преобразования" слева над A_1 и справа над A_2. Если положить $A_1 = A_2 = V = K$, то получится обычная задача приведения матриц над кольцом K элементарными преобразованиями.

Для разделенных задач с полусовершенными кольцами A_1 и A_2

удобно ввести специальную запись, выбирая полные системы примитивных идемпотентов отдельно в A_1 и A_2. В этом случае матрицы, представляющие элементы из V_p будут, вообще говоря, прямоугольными.

К разделенным задачам сводится операторное изучение бифункторов, подобно тому, как это сделано в [I] для "бифункторов над полем".

Пусть $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ – аддитивные категории, $F(X_1,X_2)$ – аддитивный бифунктор, ковариантный по X_1 и контравариантный по X_2 (X_i – объект категории $\mathbb{A}_i$), со значениями в категории абелевых групп. Два элемента группы $F(X_1,X_2)$, α и β, назовем эквивалентными, если существуют автоморфизмы ξ_i $(i=1,2)$, соответственно объектов X_i, что $\beta=\xi_1\alpha\xi_2$. Задача операторного изучения бифунктора F – это описание классов эквивалентности, на которые разбиваются группы $F(X_1,X_2)$.

С бифунктором F можно связать разделенный бимодуль следующим образом. Пусть A_i – кольца морфизмов категорий $\mathbb{A}_i$. Положим $V=\oplus F(X_1,X_2)$, где X_1 и X_2 независимо пробегают множества объектов категорий $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$. Определим действие морфизма $\xi\colon Y\longrightarrow Z$ категории $\mathbb{A}_1$ на элемент $v\in F(X_1,X_2)$ по правилу:

$$\xi v=\begin{cases} F(\xi,X_2)v & ; \text{ если } Y=X_1 \\ 0 & \text{ если } Y\neq X_1\end{cases}$$

Это действие можно продолжить до структуры левого A_1-модуля на группе V. Аналогичным образом V превращается в правый A_2-модуль и тем самым, как легко видеть, в A_1–A_2-бимодуль.

Если X_i – объект категории $\mathbb{A}_i$, то $P_i=\underset{Y}{\oplus}\, Hom\,(X_i,Y)$ – циклический проективный A_i-модуль (он порождается тождественным морфизмом объекта X_i), и если $P=P_1\oplus P_2$, то $V_p=F(X_1,X_2)$. При этом подобные матрицы из V_p – это эквивалентные элементы $F(X_1,X_2)$. Поэтому операторное изучение бифунктора F сводится к разделенной матричной задаче $(A_1\times A_2,V)$. Для того, чтобы не было "лишних матриц", т.е. любой проективный A_i-модуль соответствовал какому-нибудь объекту, на категории $\mathbb{A}_i$ нужно наложить дополнительное условие. Именно, они должны быть в п о л н е а д д и т и в н ы м и в смысле следующего определения.

А д д и т и в н а я к а т е г о р и я н а з ы в а е т с я в п о л н е а д д и т и в н о й, е с л и в н е й в с я к и й и д е м п о т е н т н ы й э н д о м о р ф и з м и м е е т я д р о. Легко видеть, что это равносильно тому, что всякий такой эндоморфизм соответствует разложению объекта в прямую сумму. Практически все аддитивные категории, встречающиеся в различных областях математики, являются вполне аддитивными.

§ 4. Категории матриц. Теорема Крулля-Шмидта

Матрицы с коэффициентами в бимодуле V удобно рассматривать как объекты некоторой категории $M(V)$. Морфизмы этой категории определяются следующим образом. Пусть P и Q – два проективных A-модуля, ξ – гомоморфизм P в Q. Он индуцирует гомоморфизм $\xi: Q^* \longrightarrow P^*$ и гомоморфизмы

$$\xi_V: V_P \longrightarrow P^* \otimes_A V \otimes_A Q;$$

$$\xi_V^*: V_Q \longrightarrow P^* \otimes_A V \otimes_A Q.$$

Для матриц $X \in V_P$, $Y \in V_Q$ положим

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \{\xi \mid \xi: P \longrightarrow Q;\ X\xi_V = \xi_V^* Y\}$$

Аксиомы категории проверяются непосредственно.

Легко видеть, что $M(V)$ – вполне аддитивная категория, причем прямая сумма матриц является их прямой суммой в категории $M(V)$. Подобные матрицы – это изоморфные объекты категории. Как следствие, получаем такой результат.

Теорема об однозначности разложения

Пусть K – полное локальное нетерево коммутативное кольцо, A – такая K-алгебра, что для любого идемпотента $e \in A$ K-модуль eAe конечнопорожден, V – алгебра-бимодуль над A, X – некоторая V-матрица,

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m$$

– два разложения матрицы X в прямую сумму неразложимых матриц. Тогда $m = n$ и, при подходящей нумерации слагаемых, матрицы X_i и Y_i подобны $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Кольцо эндоморфизмов любой матрицы в категории $M(V)$ является K-алгеброй, конечнопорожденной как K-модуль. Отсюда нетрудно заключить, используя полноту K, что оно полусовершенно. Но тогда утверждение теоремы следует, например, из теоремы 3.10.2 книги [4].

§ 5. Сравнение матричных задач

Категорная точка зрения позволяет установить для матричных задач некоторую шкалу сравнения. Пусть V и W – бимодули над кольцами A и B, F – аддитивный функтор из категории $M(V)$ в категорию $M(W)$. Будем говорить, что (A,V) – часть задачи (B,W), если из $F(X)\simeq F(Y)$ следует $X\simeq Y$; будем говорить, что (B,W) – огрубление задачи (A,V), если всякий объект из $M(W)$ изоморфен объекту вида $F(X)$. Если выполняются оба эти условия (для одного и того же функтора F), то задачи будем называть эквивалентными. Заметим, что при этом категории $M(V)$ и $M(W)$ совсем не обязаны быть эквивалентными.

Будем говорить, что задача (B,W) слабее матричной задачи (A,V), если существует последовательность задач

$$(A,V),\ (A_1,V_1),\ldots,(A_n,V_n),\ (B,W),$$

в которой каждая следующая задача является либо частью, либо огрублением предыдущей. Очевидно, что есть отношение квазипорядка. Две задачи, каждая из которых слабее другой назовем равносильными. Эквивалентные задачи равносильны, однако обратное, вообще говоря, неверно.

Приведем примеры.

I. В обозначениях п.2 матричная задача $(\bar{A},\bar{V})$ является огрублением задачи (A,V). Если же кольцо A полусовершенно, то эти задачи эквивалентны.

2. Пусть $\varphi: V \longrightarrow W$ – гомоморфизм A-бимодулей. Для любого проективного модуля P он индуцирует гомоморфизм $V_P \longrightarrow W_P$. Таким образом мы получаем функтор $\Phi: M(V) \longrightarrow M(W)$. Если φ – мономорфизм (эпиморфизм), то (A,V) – часть (A,W) (соответственно, (A,W) – огрубление (A,W)). Поэтому, если W – фактор бимодуля V (т.е. фактормодуль некоторого его подмодуля), то задача (A,W) слабее задачи (A,V).

3. Зафиксируем конечнопорожденный проективный A-модуль P_0 и положим $B=A_{P_0}$, $W=V_{P_0}$. Тогда для любого проективного B-модуля P модуль $P'=P_0\otimes_B P$ есть проективный A-модуль, причем $W_P\simeq V_{P'}$ и $B_P\simeq A_{P'}$. Эти изоморфизмы индуцируют функтор $F: M(W)\longrightarrow M(V)$, а задача (B,W) является частью задачи (A,V). Если же P_0 является образующим категории A-модулей [3], то задача (B,W) эквивалентна задаче (A,V).

4. Конечномерная матричная задача (A,V) над полем K, оче-

видно, является огрублением задачи (K, V). Но (K,V) – это задача о приведении n матриц над полем K одновременными подобными преобразованиями, где $n = \dim V$. Предположим для простоты, что поле K бесконечно и выберем в нем n различных элементов $c_1, \ldots, c_n$. Сопоставим набору матриц $X_1, \ldots, X_n$ пару матриц

$$\begin{pmatrix} X_1 & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & E & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & X_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & X_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c_1E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & c_3E & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_nE \end{pmatrix}$$

(E – единичная матрица данной размерности). Можно проверить, что так мы получим функтор, превращающий задачу (K, V) в часть задачи (K, U), где $\dim U = 2$ (задача о паре матриц). Следовательно, любая конечномерная задача над полем слабее задачи о паре матриц.

§ 6. Тензоры

В заключение покажем, как введенные понятия переносятся на тензоры высших валентностей. Для того, чтобы определить тензоры p раз ко- и q раз контравариантные, надо рассмотреть (p, q) -модуль над кольцом A, т.е. абелеву группу V, на которой p способами введена структура левого и q способами – правого -модуля, причем операторы, соответствующие разным способам, коммутируют. Тогда для любого проективного A -модуля P можно определить группу тензоров V_P :

$$V_P = \underbrace{P^* \otimes_A \ldots \otimes_A P^*}_{p \text{ раз}} \otimes_A V \otimes_A \underbrace{P \otimes_A \ldots \otimes_A P}_{q \text{ раз}}$$

Подобие тензоров и категория тензоров $T_p^q(V)$ определяются очевидным образом. При $p = q = 1$ получаем введенные выше матрицы. Интересно отметить, что этот случай – единственный, в котором категория $T_p^q(V)$ оказывается аддитивной. Можно сказать, что матрицы – "самый линейный" из всех объектов линейной алгебры. Возможно, именно в этом состоит причина особой роли матриц, по сравнению с другими объектами, во всех вопросах линейного характера.

ЛИТЕРАТУРА

I.А.В.Ройтер. Матричные задачи и представления бисистем. Настоящий сборник, стр. I30-I43

2. Ю.А.Дрозд, В.М.Турчин. О числе модулей в роде для целочисленных колец второго порядка, "Матем.заметки", I967,т.2, I33-I38.

3. P.Gabriel. Des categories abeliennes. "Bull. Soc.math.France", I962, v.90, 323-448.

4. Н.Джекобсон. Строение колец. М., ИЛ, I96I.

5. H.Bass. Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings. "Trans.Amer.Math.Soc.",I960, v.95, 466-488.