УДК 519.48

Идеалы коммутативных колец

Ю. А. Дрозд (Киев)

В основе современной теории чисел лежит хорошо известная теорема о том, что всякий идеал максимального порядка в поле алгебраических чисел обратим или, что то же, является локально главным. Обобщение этого факта привело Э. Нётер к понятию дедекиндового кольца как целозамкнутого нётерова одномерного кольца. С другой стороны, в теории бинарных квадратичных форм важную роль играет тот факт, что если A — произвольный порядок в квадратичном поле, то всякий A-идеал обратим в своем кольце множителей [3]. Как показал X. Басс [11], [12], так будет тогда и только тогда, когда всякий идеал в A имеет не более 2 образующих (в квадратичном поле это условие автоматически выполняется). Эквивалентное условие, независимо введенное З. И. Боревичем и Д. К. Фаддеевым [1], [2], состоит в том, что A_0/A, где A_0 — максимальный порядок, — циклический A-модуль. Как выяснилось в этих работах, такие кольца играют существенную роль в теории целочисленных представлений (см. также [6], где для этих колец было предложено название «бассовых»).

Естественное продолжение этих результатов получил в работе [10] Д. К. Фаддеев. Именно, он доказал, что если A — кубическое кольцо, то всякий A-идеал I над своим кольцом множителей является локально либо главным, либо двойственным к главному (такие идеалы мы будем называть *отмеченными*). Кроме того, идеал I^2 уже всегда обратим (в своем кольце множителей).

В настоящей работе (§ 3) эта теорема Д. К. Фаддеева обобщается на порядки, каждый идеал которых имеет 3 образующих (эквивалентное условие: A_0/A имеет 2 образующих). Более того, оказывается, что это условие и необходимо для того, чтобы всякий идеал был отмеченным. Если, кроме того, у A нет полей вычетов из двух элементов, это условие необходимо и для обратимости квадратов всех идеалов.

Как и теорема X. Басса, эти результаты переносятся на произвольные одномерные нётеровы кольца без нильпотентов. При этом существенную роль играет двойственность для модулей без кручения, которая строится в § 1. С ее помощью удается также дать очень короткое и простое доказательство результатов X. Басса вместе с некоторыми уточнениями, полученными в [16] и [5] (см. § 2).

Естественно возникает вопрос, нельзя ли получить аналогичные утверждения для случая, когда число образующих у A_0/A равно какому-то фиксированному числу $n>2$. Частичный ответ на него дается в § 4, где показано, что здесь локальное число точных идеалов у надколец уже зависит от поля вычетов и неограниченно возрастает с ростом числа элементов этого поля. С другой стороны, известна теорема Дейда, Таусской и Цассенхауза [13] о том, что если A — порядок в поле алгебраических чисел степени m, то идеал I^{m-1} обратим для любого I. Поскольку в этом случае $n \leqslant m-1$, возникает гипотеза, что на самом деле уже идеал I^n всегда является обратимым. Все известные автору примеры подтверждают это предположение.

Отметим наконец, что изложенные результаты легко переносятся на алгебраические кривые над произвольным полем и, более общо, на «абстрактные кривые», т. е. локально нётеровы одномерные редуцированные схемы. Соответствующие переформулировки приведены в § 5.

§ 1. Двойственность

В настоящей работе слово «кольцо» будет всегда означать коммутативное нётерово кольцо без нильпотентов. Если A — такое кольцо, то его полное кольцо частных $Q=Q(A)$ является полупростым артиновым кольцом, т. е. прямым произведением полей. При фиксированном кольце A мы будем, как правило, писать $\otimes$, Hom и т. п. вместо $\otimes_A$, Hom_A и т. п. Элемент m A-модуля M назовем *периодическим*, если $am=0$ для некоторого неделителя нуля $a \in A$; m назовем *делимым*, если в M разрешимо уравнение $ax=m$ для любого неделителя нуля $a \in A$. Через tM (δM) обозначим подмодуль всех периодических (соответственно делимых) элементов модуля M. Если $tM=0$ ($tM=M$ или $\delta M=M$), будем говорить, что M — *модуль без кручения* (соответственно *периодический или делимый**). Легко проверить, что при таких определениях имеют место все утверждения, сформулированные в [7] (глава VII, §§ 1, 2) для модулей над областями целостности. Более того, дословно сохраняются все доказательства, кроме доказательства достаточности в предложении 1.3 (модуль без кручения инъективен тогда и только тогда, когда он делим). Но если M — делимый модуль без кручения, то естественный гомоморфизм $M \to M \otimes Q$ есть изоморфизм. Поэтому любой гомоморфизм $f: I \to M$, где I — идеал A, продолжается до гомоморфизма $I \otimes Q \to M$ и, так как $I \otimes Q$ — прямое слагаемое Q, до гомоморфизма $Q \to M$. Ограничивая последний на A, мы получаем гомоморфизм $A \to M$, продолжающий f, что и доказывает инъективность M.

Следуя [8], назовем подмодуль M' модуля M *большим*, если $M' \cap M'' \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля $M'' \subset M$. Если M — модуль без кручения, то, как легко видеть, это равносильно периодичности фактор-модуля M/M'. Допуская обычную вольность речи, мы будем называть *идеалами* A все конечнопорожденные A-подмодули в Q, а *большими идеалами* — те из них, которые являются большими подмодулями, т. е. содержат неделители нуля из A. Конечно, всякий такой идеал изоморфен как модуль некоторому обычному идеалу кольца A. Конечнопорожденные периодические A-модули назовем *конечными*,

---

* Вместо «делимый» чаще говорят «полный модуль» [7], но мы предпочитаем первым термин, который нельзя спутать с полнотой в топологическом смысле.

а конечнопорожденные A-модули без кручения — A-решетками. Всякая A-решетка M естественно вкладывается в конечнопорожденный Q-модуль $M\otimes Q$ и является там большим A-подмодулем. Подрешетки в $M\otimes Q$, содержащие M, будем называть надмодулями M. В частности, подкольца в Q, содержащие A и конечнопорожденные как A-модули, назовем надкольцами A.

Нам понадобятся следующие результаты Е. Мэтлиса [14]:

1) если A — полное локальное кольцо с полем вычетов k, E — инъективная оболочка A-модуля k, то функтор $M\mapsto \hat{M}=\mathrm{Hom}(M, E)$ индуцирует двойственность категорий нётеровых и артиновых A-модулей, а естественное вложение $M\to\hat{\hat{M}}$ для модулей из этих категорий является изоморфизмом;

2) для любого максимального идеала $\mathfrak{p}\subset A$ положим $k_\mathfrak{p}=A/\mathfrak{p}$, $E_\mathfrak{p}$ — инъективная оболочка $k_\mathfrak{p}$; $E_\mathfrak{p}=\oplus_\mathfrak{p}E_\mathfrak{p}$; тогда функтор $M\mapsto\hat{M}=\mathrm{Hom}(M, E)$ является инволюцией категории A-модулей конечной длины $F(A)$.

Здесь инволюцией категории называется контравариантный функтор из этой категории в себя, квадрат которого эквивалентен тождественному функтору.

Модуль $\hat{M}$ мы будем называть модулем характеров M.

Пусть теперь A — одномерное кольцо, т. е. всякий его ненулевой простой идеал максимален. Тогда конечные A-модули — это в точности A-модули конечной длины. Если $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в A, $A_\mathfrak{p}$ — соответствующее локальное кольцо и B — целое замыкание $A_\mathfrak{p}$ в Q, то из теоремы Крулля — Акидзуки [4] следует, что B есть прямая сумма полулокальных дедекиндовых колец и, если $R=\mathrm{rad}\,B$ (радикал Джекобсона), то $\mathfrak{p}$-адическая и R-адическая топологии на B совпадают. Поэтому $\mathfrak{p}$-адическое пополнение $\bar{B}$ кольца B есть прямая сумма колец дискретного нормирования. Поскольку $\mathfrak{p}$-адическое пополнение $\bar{A}_\mathfrak{p}$ кольца $A_\mathfrak{p}$ — это подкольцо в $\bar{B}$, в $\bar{A}_\mathfrak{p}$ нет нильпотентов. Кроме того, $E_\mathfrak{p}$ естественно отождествляется с инъективной оболочкой $k_\mathfrak{p}\simeq\bar{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\bar{A}_\mathfrak{p}$ как $\bar{A}_\mathfrak{p}$-модуля.

Теорема 1. *Для любого одномерного кольца A существует эпиморфизм A-модулей $Q\to E$. Если A^* — его ядро, то функтор $M\mapsto M^*=\mathrm{Hom}(M, A^*)$ является инволюцией категории A-решеток $C(A)$, причем, если L — любой модуль с таким свойством, то $L_\mathfrak{p}\simeq A^*_\mathfrak{p}$ для всех $\mathfrak{p}$. Кроме того, если $f: N\to M$ — мономорфизм решеток с конечным коядром, то и $f^*: M^*\to N^*$ — мономорфизм с конечным коядром, причем* $\mathrm{Coker}\, f^*\simeq(\mathrm{Coker}\, f)\hat{}$.

Доказательство. Предположим вначале, что A — полное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и полем вычетов k. Положим $T=Q/A$. Очевидно, цоколь A-модуля T есть $\mathfrak{p}^{-1}/A$, где $\mathfrak{p}^{-1}=\{x\in Q\mid x\mathfrak{p}\subset A\}\simeq\mathrm{Hom}(\mathfrak{p}, A)$. Так как $\mathfrak{p}^{-1}$ — решетка, то $\mathfrak{p}^{-1}/A$ — конечный A-модуль и, как следует из [15], модуль T артинов. Тогда естественные вложения $A\to\hat{\hat{A}}$ и $T\to\hat{\hat{T}}$, а потому и $Q\to\hat{\hat{Q}}$ суть изоморфизмы. Из [7] (предложение VII.1.4) следует, что $\hat{Q}$ — делимый A-модуль без кручения, т. е.

Q-модуль. Из полупростоты Q и изоморфизма $Q \simeq \hat{\hat{Q}}$ немедленно вытекает, что $\hat{Q} \simeq Q$ и существует точная последовательность $0 \to \hat{T} \to Q \to E \to 0$.

Положим $A^* = \hat{T}$, $M^* = \mathrm{Hom}(M, A^*)$, φ_M — естественное отображение $M \to M^{**}$. Заметим, что так как Q и E инъективны, $\mathrm{inj.\,dim}\, A^* = 1$, а тогда $\mathrm{Ext}^1(M, A^*) = 0$ для любой решетки M и функтор $M \mapsto M^*$ точен на категории $C(A)$.

Вычислим гомоморфизм φ_A. $A^{**} = \mathrm{Hom}(A^*, A^*)$, а $\mathrm{Im}\ \varphi_A$ состоит из гомотетий $x \mapsto ax$ $(a \in A)$. Но всякий гомоморфизм $f: A^* \to A^*$ продолжается до $g: Q \to Q$. Переходя к модулям характеров, получим гомоморфизм $g: Q \to Q$, переводящий A в A. Отсюда сразу следует, что $\hat{g}$, а потому и g, и f — гомотетии, т. е. φ_A — изоморфизм. Поскольку функтор $M \mapsto M^*$ точен на категории $C(A)$, отсюда обычным образом вытекает, что φ_M — изоморфизм для любой решетки M.

Если $f: N \to M$ — мономорфизм решеток с конечным коядром, то, как легко видеть, f — биективный морфизм категории $C(A)$. Значит, и $f^*: M^* \to N^*$ биективен в $C(A)$, т. е. является мономорфизмом с конечным коядром. Положим $U = \mathrm{Coker}\, f$ и применим функтор $\mathrm{Hom}(U, \cdot)$ к точной последовательности $0 \to A^* \to Q \to E \to 0$. Поскольку $\mathrm{Hom}(U, Q) = 0$, получим изоморфизм $\hat{U} \simeq \mathrm{Ext}^1(U, A^*)$. С другой стороны, применяя функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, A^*)$ к точной последовательности $0 \to N \xrightarrow{f} M \to U \to 0$, получим точную последовательность $0 \to M^* \xrightarrow{f^*} N^* \to \mathrm{Ext}^1(U, A^*) \to 0$, откуда $\mathrm{Coker}\, f^* \simeq \mathrm{Ext}^1(U, A^*) \simeq \hat{U}$.

Проверим единственность A^*. Если L — произвольный модуль такой, что $\Phi = \mathrm{Hom}(\cdot, L)$ — инволюция $C(A)$, то $L = \Phi(A)$, значит, L — решетка и $\mathrm{Ext}^1(M, L) \simeq \mathrm{Ext}^1(A, \Phi(M)) = 0$ для любой решетки M. Поэтому и $\mathrm{Ext}^1(L^*, M) = 0$ для любой решетки M, значит, L^* — проективный A-модуль, и, так как A локально, $L^* \simeq A^{(n)}$ для некоторого n. Но $\mathrm{Hom}(L, L) \simeq \mathrm{Hom}(A, A) \simeq A$, откуда $n = 1$ и $L \simeq A^*$.

Пусть теперь A — произвольное одномерное кольцо. A-модули E и $T = Q/A$ периодичны, поэтому $E = \oplus_{\mathfrak{p}} \overline{E}_{\mathfrak{p}}$ и $T = \oplus_{\mathfrak{p}} \overline{T}_{\mathfrak{p}}$, где $\overline{M}_{\mathfrak{p}}$ обозначает $\overline{A}_{\mathfrak{p}}$-модуль $M \otimes \overline{A}_{\mathfrak{p}}$ (см. [4]). Но из доказанного выше следует, что существуют эпиморфизмы $\overline{T}_{\mathfrak{p}} \to \overline{E}_{\mathfrak{p}}$ для любого $\mathfrak{p}$, а потому и эпиморфизмы $T \to E$ и, тем более, $Q \to E$. Если A^* — ядро последнего эпиморфизма, то $\overline{(A^*)}_{\mathfrak{p}} \subset \overline{Q}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathrm{inj.\,dim}\, \overline{(A^*)}_{\mathfrak{p}} = 1$, откуда $\overline{(A^*)}_{\mathfrak{p}} \simeq (\overline{A}_{\mathfrak{p}})^*$. Остается заметить, что все утверждения теоремы носят локальный характер.

Замечание. Если B — надкольцо A, то символ B^* имеет двоякий смысл: $\mathrm{Hom}(B, A^*)$ и тот B-модуль, который дает инволюцию категории $C(B)$. Однако из единственности в теореме 1 следует, что эти два модуля локально изоморфны. В дальнейшем поэтому можно предполагать, что они совпадают.

Следствие 1. *Если кольцо A неразложимо, то всякая A-решетка L, для которой* $\mathrm{inj.\,dim}\, L = 1$, *локально изоморфна* $(A^*)^{(n)}$ *для некоторого n.*

Доказательство. $\operatorname{inj.dim} L=1$ означает, что $\operatorname{Ext}^1(M, L)=0$ для любой решетки M. Тогда решетка L^* проективна, и, так как A неразложимо, $L^*_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^{(n_{\mathfrak{p}})}$ для любого $\mathfrak{p}$. Но из неразложимости A вытекает, что все числа $n_{\mathfrak{p}}$ равны, что и требовалось доказать.

Обозначим через A_0 целое замыкание A в Q, через $\mu_A(M)$ — минимальное число образующих A-модуля M.

Следствие 2. *Если кольцо A полулокально, то $\mu_A(A_0)<\infty$ и $\mu_A(I) \leqslant \mu_A(A_0)=\mu(A_0/A)+1$ для любого A-идеала I.*

Доказательство. Для полулокального кольца $\mu_A(M)=\max\limits_{\mathfrak{p}} \mu_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$, поэтому A можно сразу считать полным локальным кольцом. A_0/A — подмодуль в T, значит, $\widehat{A_0/A}$ — фактор-модуль $\hat{T}=A^*$. Если A — область, отсюда сразу следует, что $\widehat{A_0/A}$, а потому и A_0/A — конечные модули, т. е. $\mu\ (A_0)<\infty$. В противном случае пусть $Q=\bigoplus\limits_{i=1}^{t} Q_i$, где Q_i — поля, A_i — проекция A на Q_i, A_{i0} — целое замыкание A_i в Q_i. Тогда $A_0=\bigoplus\limits_{i=1}^{t} A_{i0}$ и $\mu_A(A_0)=$ $=\sum\limits_{i=1}^{t} \mu_{A_i}(A_{i0})<\infty$. Равенство $\mu_A(A_0)=\mu_A(A_0/A)+1$ следует из леммы Накаяма и того, что $A \not\subset \mathfrak{p}A_0$, где $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал A.

Если $A=A_0$, то A — кольцо дискретного нормирования и всякий идеал в нем главный. В противном случае пусть $\mathfrak{f}$ — кондуктор A_0 в A. Тогда $I\mathfrak{f} \subset I\mathfrak{p} \subset I \subset IA_0$ для любого A-идеала I. Но $IA_0 \simeq A_0$, а $I\mathfrak{f}=IA_0\mathfrak{f}$, откуда $\mu_A(I)=l_A(I/\mathfrak{p}I) \leqslant l_A(A_0/\mathfrak{f})$, где $l_A(M)$, как обычно,— длина A-модуля M. Пусть $m=\max \mu_A(I)$ и J — тот идеал, на котором этот максимум достигается. Если M — подрешетка в $Q^{(n)}$, то, как легко видеть, $\mu_A(M) \leqslant mn$. Далее, $JA_0 \simeq A_0$, поэтому для некоторого n существует эпиморфизм $J^{(n)} \to A_0$. Обозначим его ядро через N. Его можно вложить в $Q^{(n-1)}$, значит, $\mu_A(N) \leqslant m(n-1)$, откуда $\mu_A(A_0) \geqslant \mu_A(J^{(n)})-\mu_A(N)=m$, что и требовалось доказать.

Положим $\mu^*(A)=\max\{\varphi_A(I) \mid I \subset A\}$. Как показано в [11], [12], если $A \neq A_0$, то $\mu^*(A)=\max_{\mathfrak{p}} \mu^*(A_{\mathfrak{p}})$. Следствие 2 означает, что $\mu^*(A)=$ $=\mu_A(A_0)$ для полулокальных колец. В общем случае возможно $\mu_A(A_0)=\infty$, однако, если $\mu_A(A_0)<\infty$, то вновь $\mu^*(A)=\mu_A(A_0)=$ $=\mu_A(A_0/A)+1$. Если же $\mu_A(A_0)=\infty$, то, во всяком случае, $\mu^*(A)=$ $=\max \mu_A(B)$, где B пробегает надкольца кольца A.

§ 2. Бассовы кольца

Начиная с этого параграфа мы будем предполагать кольцо A одномерным. Кольцом множителей идеала I назовем $O(I)=$ $=\operatorname{Hom}(I, I)$. Если I — большой идеал, то $O(I)$ — надкольцо A, в противном случае $O(I)$ — прямое слагаемое некоторого надкольца. Если $O(I)=A$, идеал I назовем точным. Очевидно, $O(I)=O(I^*)$; идеалы A и A^* всегда точны. Говорят, что идеал I делит идеал J, если $J=II'$

для некоторого I'. Легко проверить, что это эквивалентно существованию эпиморфизма $I^{(n)} \to J$ для некоторого n. Если I делит свое кольцо множителей, назовем его обратимым; если I^* обратим, назовем I кообратимым.

Для двух больших идеалов I и J положим $J:I = \{x \in Q \mid xI \subset J\}$. Очевидно, $J:I$ — большой идеал, изоморфный $\mathrm{Hom}(I, J)$; в частности, $A^*:I \simeq I^*$. Кроме того, I делит J тогда и только тогда, когда $I(J:I) = J$. Введенные понятия (кроме кообратимости) общеприняты в теории чисел и целочисленных представлений [3], [9]. Нам понадобятся также следующие простые факты, хорошо известные в теории целочисленных представлений [9], [5].

Предложение 1. *Для любых больших идеалов I и J имеем $(IJ)^* \simeq J^*:I$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что вложение $I \subset Q$ индуцирует гомоморфизм $I \otimes J \to Q \simeq Q \otimes J$ с образом IJ и конечным ядром $\mathrm{Tor}_1(Q/I, J)$. Поэтому $IJ \simeq I \otimes J/t(I \otimes J)$, и, так как A^* — решетка, $\mathrm{Hom}(IJ, A^*) \simeq \mathrm{Hom}(I \otimes J, A^*) \simeq \mathrm{Hom}(I, J^*) \simeq J^*:I$.

Следствие 1. $II^* \simeq O(I)^*$; *в частности, всякий точный A-идеал делит A^*.*

Следствие 2. *Идеал I кообратим тогда и только тогда, когда $O^*(I) \simeq I:J$ для некоторого J.*

Предложение 2. *Идеал I обратим тогда и только тогда, когда он проективен как $O(I)$-модуль. I кообратим тогда и только тогда, когда* $\mathrm{inj.\,dim}_{O(I)} I = 1$.

Доказательство следует из предложения 1.1 работы [5] и двойственности.

Предложение 3. *Пусть I — большой идеал локального кольца A. У I есть ровно один максимальный подмодуль (минимальный надмодуль) тогда и только тогда, когда $I \simeq A$ (соответственно $I \simeq A^*$).*

Доказательство. Максимальный идеал $\mathfrak{p}$ — единственный максимальный подмодуль в A. Наоборот, если $I/\mathfrak{p}I \simeq A/\mathfrak{p}$, этот изоморфизм продолжается до эпиморфизма $f: A \to I$. Но, поскольку $I \otimes Q \simeq Q$, f — изоморфизм. Второе утверждение двойственно первому.

Пусть теперь A — полулокальное кольцо, $R = \mathrm{rad}\, A$ и $A' = O(R)$.

Предложение 4. *$A' = A$ тогда и только тогда, когда A целозамкнуто (в Q).*

Доказательство. Очевидно, можно считать кольцо A локальным, $A' = \{x \in Q \mid xR \subset R\}$ — сумма всех минимальных надмодулей R, поэтому, если $A' = A$, A является единственным минимальным надмодулем у R. Пусть M — какой-нибудь минимальный надмодуль A. Тогда $A \supset MR \supset R$, но из $MR = R$ следовало бы, что $M \subset A' = A$, значит, $MR = A$ — единственный максимальный подмодуль в M и $M \simeq A$. Отсюда $A = MR \simeq AR = R$, т. е. R — главный идеал и A — кольцо дискретного нормирования [4]. Обратное очевидно.

Предложение 5. *Если локальное кольцо A не целозамкнуто, то $A' = A:R$, $(A')^* \simeq A^*R$, $A:A' = R$ и $A^*A' \simeq R^*$.*

Доказательство. $A \supset (A:R)R \supset R$, поэтому, если $R \neq A$ (т. е. A не целозамкнуто), $(A:R)R = R$ и $A:R = R:R = A'$. Кроме того, $A^*A' \neq A^*$, значит, $R^* \subset A^*A' \subset R^*A' = R^*$ (заметим, что R^* — единственный минимальный надмодуль у A^*). Оставшиеся две формулы получаются применением предложения 1.

Напомним, что одномерное кольцо A называется горенштейновым, если $\operatorname{inj.dim} A = 1$ (см. [12]), т. е., по предложению 2, A кообратимо (как идеал). Максимальный идеал $\mathfrak{p} \subset A$ назовем критическим, если локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ не целозамкнуто, или, что то же (ввиду предложения 4), если $O(\mathfrak{p}) \neq A$.

Предложение 6 (см. [12]). *Следующие условия равносильны*:

1) *A горенштейново*;

1′) *идеал A^* обратим*;

2) *всякий точный A-идеал обратим*;

2′) *всякий точный A-идеал кообратим*;

3) $\mu_A(O(\mathfrak{p})) \leqslant 2$ *для всякого максимального идеала* $\mathfrak{p} \subset A$;

3′) $O(\mathfrak{p})/A \simeq A/\mathfrak{p}$ *для любого критического* $\mathfrak{p}$.

Доказательство. 1)⟺1′) и 2)⟺2′) ввиду двойственности. 3)⟺3′), так как для критических $\mathfrak{p}$ всегда $\mu_A(O(\mathfrak{p})) = \mu_A(O(\mathfrak{p})/A) + 1$. Далее, 1)⟺2) по следствию 1 из предложения 1. Наконец, эквивалентность 1)⟺3′) достаточно проверить для локальных колец, а тогда она следует из предложений 3 и 5.

Согласно [6], [5], будем говорить, что кольцо A бассово, если все его надкольца горенштейновы.

Теорема 2. *Следующие условия равносильны*:

1) *A бассово*;

2) *A горенштейново и для любого критического $\mathfrak{p}$ кольцо $O(\mathfrak{p})$ также горенштейново*;

3) *всякий A-идеал обратим*;

3′) *всякий A-идеал кообратим*;

4) $\mu^*(A) \leqslant 2$;

4′) *B/A — циклический A-модуль для любого надкольца B кольца A. Если целое замыкание A_0 кольца A в Q конечнопорождено как A-модуль* (*например, если A полулокально*; *см. следствие* 2 *из теоремы* 1), *эти условия равносильны еще условию*

4″) *A_0/A — циклический A-модуль.*

Доказательство. 1)⟺3)⟺3′) по предложению 6, а 4)⟺4′)⟺4″) по следствию 2 из теоремы 1.

Заметим, что все условия теоремы достаточно проверять для локализаций, поэтому далее мы будем считать, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$; $k = A/\mathfrak{p}$; $A' = O(\mathfrak{p})$. Положим также $\operatorname{rad} A' = \mathfrak{p}'$, $A'' = O(\mathfrak{p}')$, $\operatorname{rad} A'' = \mathfrak{p}''$.

Целозамкнутые кольца, очевидно, удовлетворяют всем условиям теоремы. Кроме того, ввиду следствия 2, для надколец A выполнено условие максимальности. Поэтому можно применить «нётерову индукцию», т. е. считать, что для надколец A теорема 2 верна. Тогда $4) \Rightarrow 2)$ по предложению 6 и индукции.

$2) \Rightarrow 4'')$. Если $A_0 = A'$, это следует из предложения 6. В противном случае, по предложению 4, $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, причем, ввиду горенштейновости, $\mathfrak{p} \simeq A'$ и $A'/\mathfrak{p}' \simeq A/\mathfrak{p} = k$, а $\mathfrak{p}' \simeq A''$ и является единственным минимальным A'-надмодулем у $\mathfrak{p}$. Поэтому $\mathfrak{p}A'' = \mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{p}A_0 = \mathfrak{p}'A_0$, а тогда $\mu_A(A_0/A) = l_A(A_0/\mathfrak{p}A_0) - 1 = l_{A'}(A_0/\mathfrak{p}'A_0) - 1 = \mu_{A'}(A_0/A') \leqslant 1$ (по предположению индукции).

$2) \Rightarrow 1)$. Очевидно, достаточно проверить горенштейновость A'' в случае, когда $A_0 \neq A'' \neq A'$. Тогда, как и выше, $A''/\mathfrak{p}'' \simeq A'/\mathfrak{p}' \simeq k$. Кроме того, так как A' горенштейново, $\mathfrak{p} \simeq A' \simeq (A')^*$, и, беря у этих модулей единственные минимальные A'-надмодули, мы получим, ввиду предложения 5, что $\mathfrak{p}' \simeq A'' \simeq (\mathfrak{p}')^* \simeq (A'')^*$, т. е. A'' горенштейново.

Замечание. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 4)$ и импликацию $1) \Rightarrow 3)$ доказал X. Басс [12]. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 2)$ установил Е. Мэтлис [16]. Эквивалентность $1) \Leftrightarrow 3)$ доказали В. В. Кириченко и автор [5]. Эквивалентность условий 4) и $4'')$ впервые указана З. И. Боревичем и Д. К. Фаддеевым [2].

§ 3. Основная теорема

Пусть A по-прежнему — одномерное кольцо, A_0 — его целое замыкание в Q. Идеал I назовем отмеченным, если для любого максимального идеала $\mathfrak{p} \subset A$ $A_\mathfrak{p}$-идеал $I_\mathfrak{p}$ обратим или кообратим (очевидно, это условие достаточно проверять для критических $\mathfrak{p}$). Поле k назовем 2-совершенным, если у него нет несепарабельных квадратичных расширений. В этом параграфе мы докажем следующую основную теорему.

Теорема 3. *Рассмотрим следующие условия:*

1) $\mu^*(A) \leqslant 3$;

1′) $\mu_A(B/A) \leqslant 2$ *для любого надкольца B кольца A;*

2) *всякий A-идеал отмечен;*

3) I^2 *обратим для всякого A-идеала I.*

Тогда $1) \Leftrightarrow 1') \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$. *Если все поля вычетов $A/\mathfrak{p}$ для критических $\mathfrak{p}$ 2-совершенны, то* $2) \Rightarrow 1)$. *Если, кроме того, ни для какого критического $\mathfrak{p}$ фактор-кольцо $A/\mathfrak{p}$ не есть поле из двух элементов, то* $3) \Rightarrow 1)$.

Если, наконец, $\mu_A(A_0) < \infty$, *то* 1) *и* 1′) *эквивалентны еще условию* 1″) $\mu_A(A_0/A) \leqslant 2$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что все условия теоремы можно проверять локально, поэтому в дальнейшем будем считать, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и полем вычетов k. Кроме того, бассовы кольца, очевидно, удовлетворяют всем перечисленным условиям, поэтому A можно считать небассовым и применять «нётерову индукцию», т. е. считать, что для надколец A теорема верна. Положим $A' = O(\mathfrak{p})$, $F = A'/\mathfrak{p}$. F есть конечномерная алгебра над полем k, причем $\dim F = \mu_A(A')$. В дальнейшем мы всегда будем отождествлять $M/\mathfrak{p}M$ с $M \otimes k$.

1)$\Leftrightarrow$1′)$\Leftrightarrow$1″) по следствию 2 из теоремы 1.

2)$\Rightarrow$3). Идеал I можно считать точным и необратимым. Тогда $I\simeq A^*$. По предложению 1, $I^2\simeq(A:A^*)^*$. Поскольку A^* необратим, $A^*(A:A^*)\neq A$, а тогда $A:A^*=\mathfrak{p}:A^*$ и $I^2=I^2A'=(IA')^2$. Но IA' — это уже A'-идеал, а из индукционного предположения следует, что он обратим.

Дальнейшее доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть I — некоторый A-идеал, $J=IA'$. Тогда $J\supset I\supset\mathfrak{p}I=\mathfrak{p}J$; $I\otimes k$ — подпространство в F-модуле $J\otimes k$, содержащее систему образующих этого модуля. Наоборот, если J есть A'-идеал, V — подпространство в $J\otimes k$, содержащее систему образующих этого F-модуля, и $I=I(V)$ — прообраз V в J, то I — такой A-идеал, что $IA'=J$, а $V=I\otimes k$. Если U — другое подпространство в $J\otimes k$, содержащее систему образующих, то $I(V)\simeq I(U)$ тогда и только тогда, когда $U=\alpha V$ для некоторого обратимого элемента $\alpha\in F$. Наконец, A-идеал $I(V)$ точен тогда и только тогда, когда J — точный A'-идеал, делящий $\mathfrak{p}^*$, и из включения $\alpha V\subset V$ для какого-либо $\alpha\in F$ следует, что $\alpha\in k$.*

Все утверждения этой леммы, кроме точности A'-идеала J, очевидны. Но если I — точный A-идеал, то, по следствию 1 из предложения 1, $II^*\simeq A^*$, а тогда $JI^*\simeq A^*A'\simeq\mathfrak{p}^*$ (предложение 5) и $O(J)\subset O(\mathfrak{p}^*)=A'$, что и требовалось доказать.

Подпространство V в некотором F-модуле, содержащее систему образующих, мы будем называть порождающим. Если из $\alpha V\subset V$ следует $\alpha\in k$, будем говорить, что V точно, а подпространства V и αV, где α — обратимый элемент из F, назовем подобными. Заметим еще, что если $I=I(V)$, то, очевидно, $\mu_A(I)=\dim V$.

1)$\Rightarrow$2). Достаточно показать, что у A есть не более двух классов точных идеалов. Если $\mu_A(A')\leqslant 2$, то, по предложению 6, всякий точный идеал обратим, т. е. главный. Поэтому можно считать, что $\mu_A(A')=\dim F=3$. Тогда легко убедиться, что для F есть следующие возможности:

а) $F=k\oplus k\oplus k$;

б) $F=k\oplus k[r]$, $r^2=0$;

в) $F=k\oplus k[\alpha]$, где $k[\alpha]$ — квадратичное расширение поля k;

г) $F=k[r]$, $r^3=0$;

д) $F=k[\alpha]$ — кубическое расширение k (в этом случае α можно выбрать удовлетворяющим уравнению $\alpha^3=p\alpha+q$, где p и q — элементы поля k);

е) $F=k[r_1, r_2]$, $r_ir_j=0$ для любых i, j.

В случаях а)—д) F — прямая сумма алгебр с одним минимальным идеалом. Из предложения 3 тогда следует, что $\mathfrak{p}\simeq(A')^*$, и, по лемме, если I — точный A-идеал, то IA' обратим, т. е. $IA'\simeq A'$. Поэтому классификация точных A-идеалов сводится к классификации с точностью до подобия точных порождающих подпространств V в $A'\otimes k=F$. Если $\dim V=1$, то $I(V)$ — главный идеал, следовательно, можно считать $\dim V=2$. Но тогда легко проверить, что умножением на обратимые элементы из F подпространство V можно перевести в подпространство с базисом, имеющим вид (в зависимости от вида F):

а) e_1+e_3, e_2+e_3 (e_1, e_2, e_3 — примитивные ортогональные идемпотенты);

б) $1+r$, e (e — тот примитивный идемпотент, для которого $er=r$);

в) $1+\alpha, e$ (e — тот примитивный идемпотент, для которого $e\alpha=\alpha$);

г) $1, r$;

д) $1, \alpha$.

В случае е), если V — порождающее подпространство в F, оно содержит обратимый элемент, поэтому можно считать, что $1 \in V$, а тогда, как легко видеть, V — подалгебра в F и может быть точным, лишь если $V=k$, т. е. $I(V)=A$. Иными словами, A — единственный, с точностью до изоморфизма, точный идеал, лежащий между A' и $\mathfrak{p}$. Кроме того, $\mathfrak{p} \not\simeq (A')^*$, значит, $\mathfrak{p} \simeq A'$. Поэтому возможно еще $IA' \simeq (A')^* \simeq \mathfrak{p}^*$. Но, ввиду двойственности, A^* — единственный точный идеал, лежащий между $\mathfrak{p}^*$ и $\mathfrak{p}^*\mathfrak{p} \simeq (A')^*$, т. е. и в этом случае у A всего два класса точных идеалов.

Импликации 2)$\Rightarrow$1) и 3)$\Rightarrow$1) (при ограничениях на $A/\mathfrak{p}$, указанных в теореме) мы будем доказывать одновременно, так как из импликации 2)$\Rightarrow$3) следует, что 2)$\Rightarrow$1) нужно проверять лишь в тех случаях, когда не удается доказать, что 3)$\Rightarrow$1). Поле k будем считать 2-совершенным.

Положим $B=\mathfrak{p}A_0+A$. Имеем $B/\mathfrak{p}A_0 \simeq A/(A \cap \mathfrak{p}A_0)=A/\mathfrak{p}=k$, значит, B — локальное кольцо с радикалом $\mathfrak{p}A_0$, причем $\mu_A(A_0)=\mu_B(A_0)$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $A=B$, т. е. $A'=O(\mathfrak{p})=A_0$, а $F=A_0/\mathfrak{p}$. Предположим, что $\dim F=\mu_A(A_0) \geqslant 4$, но I^2 обратим для любого идеала I. Рассмотрим в F подпространство V с базисом $[1, \alpha]$ (мы будем писать $V=[1, \alpha]$ и $I(V)=I[1, \alpha]$). Если $I=I(V)$, то $I^2=I[1, \alpha, \alpha^2]$. Поскольку I^2 обратим, $V^2=[1, \alpha, \alpha^2]$ — подалгебра в F; в частности, $\alpha^3 \in V^2$.

Пусть $R=\operatorname{rad} F$, $S=F/R$. Если $r \in R$, то из включения $r^3 \in [1, r, r^2]$ следует, что $r^3=0$. Но R — главный идеал (так как в A_0 все идеалы главные), поэтому $R^3=0$. Если в F есть нетривиальный идемпотент e и $r \in (1-e)R$, положим $\alpha=e+r$; $\alpha^2=e+r^2$ и $\alpha^3=e+r^3=e$. Тогда из $\alpha^3 \in [1, \alpha, \alpha^2]$ следует, что $r^2=0$. Итак, в этом случае $R^2=0$. Предположим, наконец, что в F есть три нетривиальных ортогональных идемпотента e_1, e_2, e_3 ($e_1+e_2+e_3=1$) и $e_3R \ni r \neq 0$. Тогда, как легко видеть, $I=I[e_1+e_2+r, e_1+e_3]$ и $I^2=I[e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+r]$ — точные идеалы, в частности, I^2 необратим, что невозможно. Значит, в этом случае обязательно $R=0$.

Заметим теперь, что если $\alpha \in S$, то также $\alpha^3 \in [1, \alpha, \alpha^2]$. Поскольку поле k 2-совершенно, отсюда следует, что если K — простая компонента S, то $\dim K \leqslant 3$, кроме случая, когда $\operatorname{char} k=3$ и K — чисто несепарабельное расширение k высоты 1. Но в последнем случае, если $\dim K>3$, в K найдутся два такие элемента, α и β, не лежащие в k, что $k(\alpha) \cap k(\beta)=k$. Тогда I^2, где $I=[1, \alpha, \beta]$, необратим (так как $[1, \alpha, \beta, \alpha^2, \alpha\beta, \beta^2]$ — не подалгебра в K), что невозможно. Значит, и здесь $\dim K \leqslant 3$.

Предположим, что $S=K$. Тогда $R\neq 0$. Если $\dim K=3$, выберем $\alpha\notin k+R$, $\beta\in R$ и положим $I=I[1, \alpha, \beta]$. Тогда $I^2=I[1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta]$ необратим, поскольку $\alpha^2\beta\notin[1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta]$, что невозможно. Итак, $\dim K\leqslant 2$. Но если $K=k$, то из $R^3=0$ следует, что $\dim F\leqslant 3$, поэтому $\dim K=2$. K сепарабельно (так как k 2-совершенно), значит, можно считать, что $F=K\oplus R$. Пусть $K=k[\omega]$, где ω — корень уравнения $x^2-px+q=0$ $(p, q\in k)$, $r\in R$, $\alpha=\omega+r$. Тогда $\alpha^2=p\omega-q+2\omega r+r^2$ и $\alpha^3=(p^2-q)\omega-pq+3p\omega r-3qr+3\omega r^2$. Поскольку 1, ω, r, ωr, а если $r^2\neq 0$, то и r^2, ωr^2 линейно независимы над k, из $\alpha^3\in[1, \alpha, \alpha^2]$ вытекает $r^2=0$. Пусть $\alpha^3=a+b\alpha+c\alpha^2$. Тогда $3p=2c$, значит, $\operatorname{char} k\neq 2$ (иначе K несепарабельно); $-3q=b$, $-pb=a-qc$ и $p^2-q=b+pc$, откуда $p^2-4q=0$, что невозможно, так как это дискриминант неприводимого многочлена x^2-px+q.

Пусть теперь $S\neq K$. Покажем, что тогда $\dim K\leqslant 2$. Обозначим через e идемпотент, для которого $eS=K$, $f=1-e$, $\alpha=f+\omega$, где $\omega\in K$, и пусть минимальный многочлен $m(x)$ для ω — кубический: $m(x)=$ $=x^3-ax^2-bx-c$. Имеем $\alpha^2=f+\omega^2$; $\alpha^3=f+a\omega^2+b\omega+ce$, и, если $\alpha^3\in[1, \alpha, \alpha^2]$, то $\alpha^3=c+b\alpha+a\alpha^2$, откуда $a+b+c=1$ и $m(1)=0$, что невозможно. Аналогично можно проверить, что если S имеет три или более простые компоненты, то обязательно $K=k$.

Покажем теперь, что всегда $R=0$. Рассмотрим случай $S=K\oplus L$, причем $K=k(\omega)\neq k$ и $R\neq 0$. Если в R найдется элемент r такой, что $er=0$, где $K=eS$, $e^2=e$, то, полагая $\alpha=\omega+r$, получим $\alpha^2=\omega^2$ и $\alpha^3=\omega^3\notin$ $\notin[1, \alpha, \alpha^2]$, так как $\alpha^3\neq c\alpha^2$ при $c\in k$. В противном случае $eR\ni r\neq 0$, и, принимая $\alpha=\omega+r$, получим $\alpha^2=p\omega-qe+2\omega r$, $\alpha^3=(p^2-q)\omega-pqe+$ $+3p\omega r+3qr$, где x^2-px+q — минимальный многочлен для ω. Если $\alpha^3\in[1, \alpha, \alpha^2]$, то, поскольку элементы 1, ω, r, e, ωr линейно независимы, $\alpha^3=3q\alpha+p\alpha^2$, и, приравнивая коэффициенты при ω и ωr, получим, что $\operatorname{char} k=2$ (так как $q\neq 0$) и $p=0$, что невозможно, так как k 2-совершенно.

Если же $S=k\oplus k$, e_1, e_2 — соответствующие идемпотенты, то поскольку $R^2=0$, а $\dim F\geqslant 4$, $e_1R\ni r_1\neq 0$ и $e_2R\ni r_2\neq 0$. Тогда, полагая $\alpha=$ $=e_1+r_1+r_2$, видим, что $\alpha^2=e_1+2r_1$ и $\alpha^3=e_1+3r_1\notin[1, \alpha, \alpha^2]$.

Итак, $F=S$ и либо $F=K_1\oplus K_2$, где K_1 и K_2 — квадратичные расширения k, либо $F=k\oplus\ldots\oplus k$ (число слагаемых $n\geqslant 4$). В этом случае для доказательства импликации 3)$\Rightarrow$1) уже нужно предполагать, что k содержит больше двух элементов. Тогда, если $F=K_1\oplus K_2$, то образующие ω_i полей K_i можно выбрать так, чтобы их минимальные многочлены, $m_i(x)=x^2-a_ix+b_i$, не имели общих корней. Пусть тогда $\alpha=\omega_1+\omega_2$. $\alpha^2=a_1\omega_1-b_1e_1+a_2\omega_2-b_2e_2$, где e_i — идемпотенты такие, что $K_i=e_iF$; $\alpha^3=(a_1^2-b_1)\omega_1-a_1b_1e_1+(a_2^2-b_2)\omega_2-a_2b_2e_2$. Легко проверить, что 1, α, α^2 линейно независимы, а определитель, составленный из коэффициентов разложения 1, α, α^2, α^3 по базису e_1, ω_1, e_2, ω_2, равен результанту многочленов $m_1(x)$ и $m_2(x)$. Поэтому $\alpha^3\notin[1, \alpha, \alpha^2]$.

Остается случай, когда в F есть 4 нетривиальных ортогональных идемпотента e_1, e_2, e_3, e_4 таких, что $e_1+e_2+e_3+e_4=1$. Положим

$V=[e_1+e_3+e_4,\ e_2+e_3+ce_4]$ $(c\neq 0,\quad c\neq 1)$, $V^2=[e_1+e_3+e_4,\ e_3+ce_4,\ e_2+e_3+c^2e_4]$. Из того, что $c\neq 0$ и $c\neq 1$, тривиально следует, что V и V^2 — точные подпространства, поэтому, если $I=I(V)$, то $I^2=I(V^2)$ необратим.

Для доказательства импликации 2)$\Rightarrow$1) нужно еще показать, что даже если k — поле из двух элементов, в последних двух случаях есть по меньшей мере два неизоморфных необратимых точных идеала. Но нетрудно убедиться, что при $F=K_1\oplus K_2$ — это идеалы $I[1,\ e_1+\omega_1]$ и $I[1,\ e_2+\omega_2]$, а при $1=e_1+e_2+e_3+e_4$ (e_i — нетривиальные ортогональные идемпотенты) — это идеалы $I[e_1+e_3+e_4,\ e_2+e_3]$ и $I[e_1+e_3+e_4,\ e_2+e_3+e_4]$. Теорема полностью доказана.

§ 4. Зависимость числа классов точных идеалов от поля вычетов

Пусть A — одномерное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и полем вычетов k, причем $O(\mathfrak{p})=A_0$ — целое замыкание A в Q и $\mu_A(A_0/A)\geqslant 3$. $F=A_0/\mathfrak{p}$ есть k-алгебра размерности $n\geqslant 4$. Нас будут интересовать идеалы I вида $I(V)$, где V — двумерное точное порождающее подпространство в F (см. лемму из § 3). Если $I_1=I[\alpha,\ \beta]$ и $I_2=I[\gamma,\ \delta]$ — два таких идеала, то из упомянутой леммы следует, что $I_1\simeq I_2$ тогда и только тогда, когда существуют обратимый элемент $\sigma\in F$ и обратимая матрица $X\in\mathrm{GL}(2,\ k)$ такие, что $(\gamma,\ \delta)=(\sigma^{-1}\alpha,\ \sigma^{-1}\beta)X$.

Множество пар $(\alpha,\ \beta)$ можно рассматривать как аффинное пространство над полем k размерности $2n$. Нетрудно убедиться, что условие «α и β линейно независимы и $[\alpha,\ \beta]$ — точное порождающее подпространство в F» выделяет в этом аффинном пространстве подмножество U, открытое в топологии Зарисского. Если U непусто, его размерность также равна $2n$. Точки из U, определяющие изоморфные идеалы, лежат на орбитах алгебраической группы $G=\mathrm{GL}(1,\ F)\times\mathrm{GL}(2,\ k)$, которая действует на U по формуле $(\alpha,\ \beta)(\sigma,\ X)=(\sigma^{-1}\alpha,\ \sigma^{-1}\beta)X$. Очевидно, подгруппа, состоящая из пар $(c,\ \mathrm{diag}\,\{c,\ c\})$, действует на U тривиально, так что фактическая размерность действующей группы равна $n+3<2n$ (так как $n\geqslant 4$). Поэтому, если U непусто, число орбит группы $G\otimes\bar{k}$ на $U\otimes\bar{k}$, где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание k, бесконечно. Более того, если поле k само бесконечно, то бесконечно уже число орбит G на U.

Если k — конечное поле, пусть $f_m(x)$ — такой многочлен степени m из $A[x]$ со старшим коэффициентом 1, который неприводим по модулю $\mathfrak{p}$, $A_m=A[x]/(f_m(x))$. Тогда A_m — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}A_m$, причем $A_m/\mathfrak{p}A_m$ — расширение степени m поля k (A_m — это «неразветвленное расширение степени m кольца A»).

Теорема 4. *Пусть A — одномерное локальное кольцо с 2-совершенным полем вычетов $k=A/\mathfrak{p}$, A_0 — его целое замыкание в Q, причем $\mu_A(A_0/A)\geqslant 3$. Если поле k бесконечно, то у A есть локальное надкольцо B, имеющее бесконечно много классов точных идеалов. Если же k конечно, то B можно выбрать так, что число классов точных идеалов у колец B_m стремится к бесконечности при $m\to\infty$.*

Доказательство. Заменяя A на $\mathfrak{p}A_0+A$, можно считать, что $O(\mathfrak{p})=A_0$. Положим тогда $B=A$. Из приведенных выше рассуждений следует, что достаточно построить хотя бы одно двумерное точное порождающее подпространство V в $F=A_0/\mathfrak{p}$.

Заметим, прежде всего, что если в F $1=e_1+e_2+e_3$ (e_i — нетривиальные ортогональные идемпотенты), то в качестве V можно взять $[e_1+e_3, e_2+e_3]$.

Рассмотрим теперь подпространство $V=[1, \alpha]$ $(\alpha\notin k)$. Если оно неточно, то $\{\beta\in F| \beta V\subset V\}=V$, значит, V — подалгебра и $\alpha^2\in V$. Положим $R=\operatorname{rad} F$, $S=F/R$. Тогда отсюда следует, что $R^2=0$, а если K — простая компонента F, то $\dim K\leqslant 2$ (из-за 2-совершенности). Кроме того, если e и f — ненулевые ортогональные идемпотенты, $\beta\in eF$ и $\alpha=f+\beta$, то $\alpha^2=f+\beta^2$ и из $\alpha^2\in[1, \alpha]$ вытекает, что $\beta^2=a\beta+be$, где $a+b=1$, что возможно лишь при $\beta\in ek$. Значит, в этом случае $F=k\oplus k$ и $\dim F=2$.

Остается случай, когда $F=S\oplus R$, $S=k(\omega)$ — квадратичное расширение k, $R\ni r\neq 0$. Положим $\alpha=\omega+r$. Имеем $\alpha^2=\omega^2+2\omega r$, и поскольку 1, ω, r, ωr линейно независимы, из $\alpha^2\in[1, \alpha]$ следует, что $\operatorname{char} k=2$ и $\omega^2\in k$, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Более тщательный (но весьма громоздкий) анализ показывает, что если k — поле из q элементов, то у A всегда есть надкольцо, имеющее по меньшей мере q классов точных неглавных идеалов.

§ 5. Глобализация: абстрактные кривые

Абстрактной кривой мы будем называть одномерную локально нётерову редуцированную схему S. Обозначим через $\mathcal{O}$ структурный пучок схемы S, $\mathcal{Q}$ — его пучок колец частных. Квазикогерентный пучок $\mathcal{O}$-модулей $\mathcal{M}$ назовем пучком без кручения (периодическим, делимым), если такими являются все его слои $\mathcal{M}_x$ (как $\mathcal{O}_x$-модули) для любой замкнутой точки $x\in S$. Из одномерности S следует, что периодический пучок $\mathcal{M}$ — это «пучок небоскребов», т. е. для любого открытого множества U имеем $\mathcal{M}(U)=\oplus\mathcal{M}_x$ (x пробегает замкнутые точки из U). Когерентные пучки без кручения назовем пучками решеток. Через $k(x)$ обозначим поле вычетов точки x, через $E(x)$ — инъективную оболочку $\mathcal{O}_x$-модуля $k(x)$ и через $\mathcal{E}$ — периодический пучок, для которого $\mathcal{E}_x\simeq E(x)$. Из результатов Е. Мэтлиса следует, что функтор $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}^{\cdot}=\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ является инволюцией категории когерентных периодических пучков.

Через $\nu: S_0\to S$ обозначим нормализацию схемы S. Структурный пучок $\mathcal{O}_0$ схемы S_0 естественно рассматривать как подпучок в $\mathcal{Q}$. Если $\mathcal{O}_1$ — пучок колец такой, что $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_0$, то ему соответствует схема S_1 и сюръективный морфизм $f: S_1\to S$, являющийся бирациональным изоморфизмом. Такие морфизмы назовем субнормальными.

В этих терминах глобализация полученных результатов приводит к следующим теоремам.

Теорема 1′. *Для всякой абстрактной кривой S существует эпиморфизм пучков $\mathcal{Q}\to\mathcal{E}$. Если $\mathcal{O}^*$ — его ядро, то функтор $\mathcal{M}\mapsto\mathcal{M}^*=\mathcal{H}om(\mathcal{M},\mathcal{O}^*)$ является инволюцией категории пучков $\mathcal{O}$-решеток, причем, если $\mathcal{L}$ — любой пучок с таким свойством, то $\mathcal{L}_x\simeq\mathcal{O}^*_x$ для всех $x\in S$. Кроме того, если $f:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ — мономорфизм пучков решеток с периодическим коядром, то и $f^*:\mathcal{M}^*\to\mathcal{N}^*$ — мономорфизм с периодическим коядром, причем* $\operatorname{Coker} f^*\simeq\widehat{\operatorname{Coker}}\, f$.

Кривая S называется горенштейновой, если все локальные кольца $\mathcal{O}_x$ горенштейновы, и *бассовой*, если все $\mathcal{O}_x$ бассовы (или, что то же, для любого конечного субнормального морфизма $\varphi:S_1\to S$ кривая S_1 горенштейнова) [5]. Очевидно, эти условия достаточно проверять для особых точек кривой. Если x — такая точка, обозначим через $\varphi_x:S(x)\to S$ субнормальный морфизм, определяемый пучком колец $\mathcal{O}'$ таким, что $\mathcal{O}'_y=\mathcal{O}_y$ при $y\neq x$ и $\mathcal{O}'_x=\mathcal{O}(\mathfrak{m}_x)$, где $\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_x$. Наконец, пучок $\mathcal{O}$-идеалов назовем обратимым (кообратимым), если таковы все его слои (это определение не согласуется с общепринятым в алгебраической геометрии; однако легко видеть, что обратимые пучки идеалов в нашем смысле — это прямые образы обычных обратимых пучков при конечных субнормальных морфизмах).

Теорема 2′. *Следующие условия равносильны*:

1) *абстрактная кривая S бассова*;

2) *S горенштейнова, и для любой особой точки x кривая S_x также горенштейнова*;

3) *всякий пучок $\mathcal{O}$-идеалов обратим*;

3′) *всякий пучок $\mathcal{O}$-идеалов кообратим*;

4) *для любого конечного субнормального морфизма $\varphi:S_1\to S$ пучок $\mathcal{O}_1/\mathcal{O}$ порождается одним глобальным сечением.*

Если нормализация $\nu:S_0\to S$ конечна, эти условия равносильны еще условию

4′) *пучок $\mathcal{O}_0/\mathcal{O}$ порождается одним глобальным сечением.*

Пучок идеалов назовем отмеченным, если все его слои обратимы или кообратимы.

Теорема 3′. *Рассмотрим следующие условия*:

1) *для любого конечного субнормального морфизма $\varphi:S_1\to S$ пучок $\mathcal{O}_1/\mathcal{O}$ порождается двумя глобальными сечениями*;

2) *всякий пучок $\mathcal{O}$-идеалов отмечен*;

3) *для всякого пучка идеалов $\mathcal{I}$ пучок $\mathcal{I}^2$ обратим.*

Тогда 1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3). *Если все поля вычетов $k(x)$ для особых точек x 2-совершенны, то* 2)$\Rightarrow$1). *Если, кроме того, ни для какой особой точки x поле $k(x)$ не состоит из 2-элементов, то* 3)$\Rightarrow$1).

Если, наконец, нормализация $\nu:S_0\to S$ конечна, то условие 1) *эквивалентно условию*

1′) *пучок $\mathcal{O}_0/\mathcal{O}$ порождается двумя глобальными сечениями.*

В заключение отметим, что если рассматривать обычные алгебраические кривые над алгебраически замкнутым полем k, то, как указано в [5], бассовы кривые — это в точности кривые с квадратичными особенностями. Аналогично, кривые, удовлетворяющие условию 1) теоремы 3′ — это, конечно, кривые с кубическими особенностями.

(Поступила в редакцию 18/XI 1974 г.)

Литература

1. **З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев,** Представления порядков с циклическим индексом, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **LXXX** (1965), 51—65.
2. **З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев,** Замечание о порядках с циклическим индексом, ДАН СССР, **164, № 2** (1965), 727—728.
3. **З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич,** Теория чисел, Москва, изд-во «Наука», 1972.
4. **Н. Бурбаки,** Коммутативная алгебра, Москва, изд-во «Мир», 1971.
5. **Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко,** О квазибассовых порядках, Изв. АН СССР, серия матем., **36** (1972), 328—370.
6. **Ю. А. Дрозд, А. В. Ройтер,** Коммутативные кольца с конечным числом целочисленных неразложимых представлений, Изв. АН СССР, серия матем., **31** (1967), 783—798.
7. **А. Картан, С. Эйленберг,** Гомологическая алгебра, Москва, ИЛ, 1960.
8. **И. Ламбек,** Кольца и модули, Москва, изд-во «Мир», 1971.
9. **Д. К. Фаддеев,** Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **LXXX** (1965), 145—182.
10. **Д. К. Фаддеев,** К теории кубических Z-колец, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **LXXX** (1965), 183—187.
11. **H. Bass,** Torsion free and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., **102** (1962), 319—327.
12. **H. Bass,** On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., **82** (1963), 8—28.
13. **E. C. Dade, O. Taussky, H. Zassenhaus,** On the theory of orders, in particular on the semigroup of ideal classes and genera of an order in an algebraic number field, Math. Ann., **148** (1962), 31—64.
14. **E. Matlis,** Injective modules over Noetherian rings, Pacific J. Math., **8** (1958), 511—528.
15. **E. Matlis,** Modules with descending chain condition, Trans. Amer. Math. Soc., **97** (1960), 495—508.
16. **E. Matlis,** The two-generator problem for ideals, Michigan Math. J., **17** (1970), 257—265.