ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
31(1967), 1415—1436

УДК 519.49

Ю. А. ДРОЗД, В. В. КИРИЧЕНКО, А. В. РОЙТЕР

О НАСЛЕДСТВЕННЫХ И БАССОВЫХ ПОРЯДКАХ

Дается критерий наследственности порядков над дедекиндовыми кольцами. Доказывается, что всякий конечнопорожденный модуль без кручения над бассовым порядком, т. е. порядком, инъективная размерность всех надколец которого равна 1, распадается в прямую сумму идеалов. Приводится локальное описание бассовых порядков.

Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо, Λ — $\mathfrak{o}$-алгебра с единицей, конечнопорожденная как $\mathfrak{o}$-модуль и без $\mathfrak{o}$-кручения. В этой ситуации естественно рассматривать «целочисленные представления» кольца Λ, т. е. конечнопорожденные Λ-модули без $\mathfrak{o}$-кручения. Такие модули, вообще говоря, устроены достаточно сложно. Естественным поэтому является выделение и изучение тех классов колец, целочисленные представления которых устроены сравнительно просто.

Очевидно, наиболее просто устроены представления наследственных колец, так как в этом (и только в этом) случае любая точная последовательность модулей представлений расщепляема.

Теории наследственных колец и в особенности наследственных порядков в последнее время посвящен целый ряд работ различных авторов, в частности, Ауслендера и Голдмана, Харада, Брумера и др.

В §§ 1—2 настоящей работы изучаются наследственные порядки, причем, в отличие от работ указанных выше авторов, используется терминология и техника теории целочисленных представлений.

В § 1 изучаются надкольца наследственных порядков и даются два критерия наследственности в терминах надколец.

В § 2 изучается локальное строение наследственных порядков.

Начиная с § 3, мы рассматриваем более широкий класс колец, которые называем бассовыми кольцами, так как аналогичные кольца в коммутативном случае изучались Бассом [1], [2].

В § 3 доказывается, что всякий неразложимый модуль представления бассова кольца есть идеал. В § 4 устанавливается, что для бассовых колец, и только для них, двусторонние дробные идеалы образуют группоид относительно правильного умножения. В §§ 5—6 изучается локальное строение бассовых колец.

§ 1. Надкольца наследственных порядков

1°. В соответствии с ([3]) будем называть $\mathfrak{o}$-кольцом (где $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо) $\mathfrak{o}$-алгебру Λ с единицей, конечнопорожденную как $\mathfrak{o}$-модуль и без $\mathfrak{o}$-кручения. Конечнопорожденный Λ-модуль без $\mathfrak{o}$-кручения будем называть модулем представления. Всякое $\mathfrak{o}$-кольцо Λ естественно погружается в конечномерную алгебру $\widetilde{\Lambda}$ над полем частных k кольца $\mathfrak{o}$, $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}} k$. Поэтому $\mathfrak{o}$-кольца мы будем называть также $\mathfrak{o}$-порядками или просто порядками. В дальнейшем мы всегда будем считать алгебру $\widetilde{\Lambda}$ полупростой и сепарабельной.

Надкольцом $\mathfrak{o}$-кольца Λ будем называть такое $\mathfrak{o}$-кольцо Γ, что $\Lambda \subset \Gamma \subset \widetilde{\Lambda}$. Если Γ_1, Γ_2 — надкольца Λ, то $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ — также надкольцо Λ. Таким образом, надкольца некоторого порядка образуют полуструктуру по пересечению (т. е. частично упорядоченное множество, любые два элемента которого имеют точную нижнюю грань). Эту полуструктуру обозначим $\mathfrak{C}(\Lambda)$. По-видимому, $\mathfrak{C}(\Lambda)$ является важным инвариантом порядка Λ. Нашей ближайшей задачей будет выяснение того, как связана наследственность $\mathfrak{o}$-кольца со строением полуструктуры надколец.

Полуструктуру (по пересечению) $\mathfrak{A}$ назовем дополнимой, если для любых двух элементов $a, b \in \mathfrak{A}$, $a < b$, найдется элемент $c \in \mathfrak{A}$ такой, что $a < c$ и $b \cap c = a$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Порядок Λ наследственен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}(\Lambda)$ — дополнимая полуструктура.*

Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ — $\mathfrak{p}$-адическое пополнение $\mathfrak{o}$, $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $A_{\mathfrak{p}} = A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ (A — Λ-модуль). $\Lambda_{\mathfrak{p}}(A_{\mathfrak{p}})$ будем называть локализацией кольца Λ (модуля A) по идеалу $\mathfrak{p}$. Некоторое свойство кольца Λ (модуля A) назовем локальным, если оно имеет место тогда и только тогда, когда им обладают все локализации кольца Λ (модуля A). В частности, наследственность порядка (как и проективность модуля) — локальное свойство [см. ([3])]. Покажем, что дополнимость $\mathfrak{C}(\Lambda)$ — локальное свойство.

Пусть M — максимальное надкольцо Λ (его существование следует из полупростоты и сепарабельности $\widetilde{\Lambda}$ — см. ([3])), $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}\,\mathfrak{o}(M/\Lambda)$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ — простые делители $\mathfrak{a}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{S}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{k} \oplus\, \mathfrak{S}(\Lambda_{\mathfrak{p}})$*.

ЛЕММА 1.2. *Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — полуструктуры с максимальными элементами, то $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ дополнима тогда и только тогда, когда дополнимы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Очевидно, если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ дополнимы, то дополнима и $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. Покажем обратное. Предположим, что $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ дополнима, а $\mathfrak{A}$ не дополнима. Тогда в $\mathfrak{A}$ найдутся элементы $a_1 > a_2$ такие, что из $a_1 \cap a_3 = a_2$ следует $a_3 = a_2$. Пусть b — максимальный элемент в $\mathfrak{B}$. Рассмотрим в $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ элементы (a_1, b) и (a_2, b), $(a_1, b) > (a_2, b)$. Тогда существует эле-

* Напомним [см. ([4])], что кардинальным произведением $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ частично упорядоченных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется множество пар (a, b), $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B}$, причем $(a, b) \leqslant (a', b')$ означает, что $a \leqslant a'$, $b \leqslant b'$.

мент (a_3, b') такой, что $(a_3, b') \neq (a_2, b)$, $(a_3, b') \cap (a_1, b) = (a_2, b)$. Но тогда $a_3 \cap a_1 = a_2$ и потому $a_3 = a_2$, $b' \geqslant b$ и, значит, $b' = b$. Следовательно, $(a_3, b') = (a_2, b)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Итак, дополнимость $\mathfrak{C}(\Lambda)$ — локальные свойства (так как среди надколец есть максимальные). Поэтому теорему 1.1 достаточно доказать в случае, когда $\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо.

Воспользуемся существующей в категориях модулей представлений двойственностью [см. (3)]. Для любого Λ-модуля представления A положим $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(A, \mathfrak{o})$. Если A — правый (левый) Λ-модуль, то A^* — левый (правый) Λ-модуль. Гомоморфизм $\varphi : A \to B$ индуцирует $\varphi^* : B^* \to A^*$; $A^{**} = A$, $\varphi^{**} = \varphi$. Если A' — подмодуль конечного индекса [см. (3)] модуля A (т. е. $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{o}}(A / A') \neq 0$), то A^* — подмодуль конечного индекса в A'^*, причем

$$(A' + A'')^* = A'^* \cap A''^*, \ (A' \cap A'')^* = A'^* + A''^*.$$

Если Γ — надкольцо Λ, то Γ^* — подмодуль конечного индекса в Λ^*. Выясним, какие именно подмодули Λ^* соответствуют надкольцам Λ. Так как всякий подмодуль конечного индекса в Λ^* соответствует надмодулю Λ и наоборот, то этот вопрос сводится к выяснению того, каким свойством должен обладать надмодуль Γ кольца Λ, чтобы быть надкольцом. Всякий гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ задается формулой $\lambda\varphi = \gamma\lambda$, где $\gamma = 1\varphi$. Наоборот, всякому элементу $\gamma \in \Gamma$ соответствует гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$. Γ будет надкольцом тогда и только тогда, когда $\gamma\Gamma \subset \Gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$, или, что то же, когда всякий гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ продолжается до эндоморфизма $\bar{\varphi} : \Gamma \to \Gamma$, т. е. допускает разложение $\varphi = \pi\bar{\varphi}$, где π — вложение Λ в Γ. Поэтому $\Gamma^* \subset \Lambda^*$ соответствует надкольцу $\Gamma \supset \Lambda$ тогда и только тогда, когда всякий гомоморфизм $\varphi^* : \Gamma^* \to \Lambda^*$ допускает разложение $\varphi^* = \bar{\varphi}^*\pi^*$, где π^* — вложение Γ^* в Λ^*, $\bar{\varphi}^* : \Gamma^* \to \Gamma^*$, т. е. $\mathrm{Im}\,\varphi^* \subset \Gamma^*$.

Подмодуль A' модуля A называется сверххарактеристическим [см. (5)], если для всякого $\varphi : A' \to A$ $\mathrm{Im}\,\varphi \subset A'$.

Итак, мы доказали

Предложение 1.3. *Функтор $*$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества надколец кольца Λ на множество сверххарактеристических подмодулей конечного индекса модуля Λ^*.*

В соответствии с (5) будем говорить, что модуль A делит модуль B, и писать $A \setminus B$, если $A\,\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) = B$, где $A\,\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) = \Sigma_{\varphi : A \to B}\,\mathrm{Im}\,\varphi$. Если модуль B нетеров, то это равносильно существованию точной последовательности $A^{(n)} \to B \to 0$, где $A^{(n)}$ — прямая сумма n экземпляров модуля A.

Сверххарактеристический подмодуль A' модуля A называется D-подмодулем [см. (6)], если он удовлетворяет следующим условиям:

D1. $A' \neq A$.

D2. $A \setminus A'$.

D3. Если X — сверххарактеристический подмодуль в A и $A' + X = A$, то $X = A$.

Легко проверить, что сумма двух D-подмодулей есть D-подмодуль. Поэтому в нетеровом модуле A существует D-подмодуль $D(A)$, содержащий все остальные D-подмодули.

Модуль представления A назовем вполне приводимым [см. ([6])], если всякая точная последовательность модулей представлений $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ расщепляема. Очевидно, полная приводимость A и A^* эквивалентна. В ([6]) доказано, что для представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом модуль $A^{(n)}$ вполне приводим при всех n тогда и только тогда, когда $D(A) = 0$. Учитывая, что наследственность Λ эквивалентна полной приводимости $\Lambda^{(n)}$ при всех n, получаем

Предложение 1.4. *Пусть Λ — порядок над полным локальным дедекиндовым кольцом. Λ наследственно тогда и только тогда, когда* $D(\Lambda^*) = 0$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.1. Пусть Λ наследственно. Ввиду леммы 1.2, алгебру $\widetilde{\Lambda}$ можно считать простой, так как если $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}_1 \oplus \widetilde{\Lambda}_2$, то $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ (Λ_i — порядок в $\widetilde{\Lambda}_i$) и $\mathfrak{C}(\Lambda) = \mathfrak{C}(\Lambda_1) \oplus \oplus \mathfrak{C}(\Lambda_2)$. Пусть Γ — надкольцо Λ. Тогда $\Lambda \diagdown \Gamma$ и существует точная последовательность $\Lambda^{(n)} \to \Gamma \to 0$, откуда $\Lambda^{(n)} = \Gamma \oplus X$, $\Lambda^{*(n)} = \Gamma^* \oplus X^*$ и потому $\Lambda^* \diagdown \Gamma^*$. Таким образом, если $\Gamma \neq \Lambda$, то Γ^* удовлетворяет условиям D1 и D2, и так как $D(\Lambda^*) = 0$, то должен найтись сверххарактеристический подмодуль $\Gamma_1{}^* \neq \Lambda^*$ такой, что $\Gamma^* \dotplus \Gamma_1{}^* = \Lambda^*$, т. е. Γ_1 — надкольцо Λ такое, что $\Gamma_1 \neq \Lambda$ и $\Gamma \cap \Gamma_1 = \Lambda$. Так как всякое надкольцо наследственного кольца также наследственно, то отсюда следует дополнимость $\mathfrak{C}(\Lambda)$.

Наоборот, пусть $\mathfrak{C}(\Lambda)$ дополнима. Тогда Λ является пересечением своих максимальных надколец: $\Lambda = \bigcap\limits_i M_i$. Если $e_1, \ldots, e_t$ — минимальные центральные идемпотенты алгебры $\widetilde{\Lambda}$, то $e_j \in M_i$ для всех i, j, откуда $e_j \in \Lambda$ и $\Lambda = \sum\limits_{j=1}^{t} \oplus \Lambda_j$, где Λ_j — порядки в простых алгебрах. Таким образом, можно считать, что уже само Λ — порядок в простой алгебре. В этом случае всякий ненулевой сверххарактеристический подмодуль в Λ^* имеет конечный индекс, т. е. имеет вид Γ^*, где Γ — надкольцо Λ. Если $\Gamma^* \neq \Lambda^*$, то $\Gamma \neq \Lambda$ и найдется надкольцо $\Gamma_1 \neq \Lambda$ такое, что $\Gamma \cap \Gamma_1 = \Lambda$, т. е. $\Gamma^* \dotplus \Gamma_1{}^* = \Lambda^*$. Значит, $D(\Lambda^*) = 0$ и Λ наследственно.

Теорема 1.1. доказана.

2°. Уточним строение полуструктуры $\mathfrak{C}(\Lambda)$. Модуль представления будем называть неприводимым, если у него нет собственных фактор-модулей представлений; это, разумеется, равносильно тому, что соответствующее матричное представление неприводимо.

Предложение 2.1. *Если Λ — наследственный порядок в простой алгебре над полем частных полного локального дедекиндова кольца, то $\mathfrak{C}(\Lambda)$ антиизоморфна полуструктуре по объединению непустых подмножеств множества из k элементов, где k — число различных неприводимых Λ-модулей представлений. В частности, кольцо Λ имеет $2^k - 1$ надкольцо, в том числе k максимальных и k минимальных надколец* *.

* Аналогичное предложение доказано Харада [([7]), теорема 3.3].

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — все различные неприводимые Λ-модули представлений. Так как все они проективны, то, по теореме Крулля — Шмидта ([8]),

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{k} \oplus A_i^{(m_i)}$$

и Λ есть кольцо множителей $\sum\limits_{i=1}^{k} \oplus A_i$ [см. ([3])]. Покажем, что если I — собственное непустое подмножество множества $[1, k]$ натуральных чисел от 1 до k, то кольцо множителей Λ_I модуля $A_I = \sum\limits_{i \in I} \oplus A_i$ не равно Λ. Действительно, если $\Lambda_I = \Lambda$, то $A_I \setminus \Lambda^*$ [см. ([3])]. Но $\Lambda \setminus \Lambda^*$, откуда $\Lambda^{(n)} = \Lambda^* \oplus X$ (так как Λ^* проективно), поэтому $\Lambda^{*(n)} = \Lambda \oplus X^*$, т. е. $\Lambda^* \setminus \Lambda$ и $\Lambda^* \setminus \Lambda$. Значит, $A_I^{(m)} = \Lambda \oplus Y$, что невозможно при $I \neq [1, k]$ в силу теоремы Крулля — Шмидта. Сопоставим всякому $\Gamma \supset \Lambda$ подмножество $I(\Gamma) \subset [1, k]$: $i \in I(\Gamma)$ означает, что A_i — Γ-модуль. Из приведенных выше рассмотрений следует, что это соответствие взаимно однозначно, что и доказывает утверждение, так как очевидно, что $\Lambda_I \cap \Lambda_J = \Lambda_{I \cup J}$.

Если Λ — наследственный порядок над произвольным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$, то Λ есть пересечение своих максимальных надколец и потому содержит все элементы $\omega \in \mathfrak{O}$, где $\mathfrak{O}$ — максимальный порядок центра алгебры $\widetilde{\Lambda}$. Поэтому все простые компоненты Λ можно считать лежащими в простой центральной алгебре. $\mathfrak{C}(\Lambda) = \sum\limits_i \oplus \mathfrak{C}(\Lambda_i)$, где Λ_i — локализации простых компонент порядка Λ, и поэтому $\mathfrak{C}(\Lambda)$ есть кардинальное произведение полуструктур, указанных в предложении 2.1.

3°. В ([7]) доказано, что если $\overline{\Lambda}$ — порядок в центральной простой алгебре над полем частных локального дедекиндова кольца, причем всякое максимальное надкольцо $M \supset \Lambda$ проективно как (правый) Λ-модуль и существует цепочка порядков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n = \Lambda$$

такая, что Δ_i имеет ровно i максимальных двухсторонних идеалов, то Λ наследственно. Мы дадим критерий наследственности, являющийся усилением и обобщением этого результата.

ТЕОРЕМА 3.1. *Порядок Λ наследственен тогда и только тогда, когда всякое максимальное надкольцо $M \supset \Lambda$ проективно как правый Λ-модуль.*

Доказательство. Поскольку наследственность, максимальность и проективность — локальные свойства, то этот критерий достаточно доказывать локально. Необходимость условия тривиальна. Докажем достаточность. Пусть A — неприводимый Λ-модуль представления, $\Lambda(A)$ — его кольцо множителей [см. (3)], $\Lambda(A)$ — обобщенное надкольцо Λ, M — максимальное надкольцо $\Lambda(A)$, являющееся прямым слагаемым некоторого максимального надкольца Λ. Так как $\Lambda(A)$ — порядок в простой алгебре, $M = X^{(n)}$ [см. (3)] и так как $\Lambda(A) \setminus X$, а X проективен, то $\Lambda(A) = X \oplus X'$, $X = e\Lambda(A)$, где e — минимальный идемпотент в $\widetilde{\Lambda}$. Положим $Y = \Lambda(A)e$. Y неприводимо, причем его кольцо множителей, как и кольцо множителей X, максимально (так как централизатор Y (9) есть $e\Lambda(A)e$, т. е. совпадает с централизатором X). $\Lambda(A) = Y \oplus Y'$ (как левый модуль), поэтому $\Lambda^*(A) = Y^* \oplus Y'^*$, кольцо множителей Y^* максимально и Y^* проективно. Но $A \setminus \Lambda^*(A)$ (см. (3)), откуда $A \setminus Y^*$ и, по теореме Крулля — Шмидта, $A = Y^*$, т. е. A проективно, что и доказывает теорему.

Заметим, что попутно мы доказали

Предложение 3.2. *Кольцо множителей $\Lambda(A)$ неприводимого модуля представления A над наследственным порядком максимально.*

§ 2. Локальное строение наследственных порядков

4°. Нам понадобятся некоторые общие сведения о проективных модулях, в частности, теория проективных накрытий, развитая Эйленбергом, Накаяма и Бассом. Пусть $\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо, Λ — $\mathfrak{o}$-порядок в полупростой сепарабельной алгебре, A — конечнопорожденный Λ-модуль. Проективный модуль $P = P(A)$ называется проективным накрытием модуля A [см. (10)], если существует эпиморфизм $\varphi : P \twoheadrightarrow A$ такой, что $\operatorname{Ker}\varphi \subset PR$ (R — радикал Джекобсона кольца Λ). Из (10) следует, что для $\mathfrak{o}$-порядков проективные накрытия существуют и единственны. Именно, если $A/AR = \sum_{i=1}^{s} \oplus U_i^{(c_i)}$, где $U_i = \bar{e}_i\overline{\Lambda}$ ($\overline{\Lambda} = \Lambda/R$, $\{\bar{e}_i\}$ — система минимальных ортогональных идемпотентов), то

$$P(A) = \sum_{i=1}^{s} \oplus P_i^{(c_i)},$$

$P_i = e_i\Lambda$ (e_i — ортогональные идемпотентные прообразы $\bar{e}_i$, которые всегда существуют (6)). Отсюда, в частности, следует, что

$$P(A \oplus B) = P(A) \oplus P(B).$$

Имеет место и несколько более точное утверждение.

Предложение 4.1. *Если $0 \to H \to P \to A \to 0$ — точная последовательность с проективным P и $A = A_1 \oplus A_2$, то $P = P_1 \oplus P_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ ($H_i \subset P_i$) и $A_i = P_i / H_i$.*

Доказательство. Ввиду (10) (лемма 2.3), можно считать, что

$$P = P(A) = P(A_1) \oplus P(A_2).$$

Но тогда имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H_1 \oplus H_2 & \to & P_1 \oplus P_2 & \to & A_1 \oplus A_2 & \to 0 \\ & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \varepsilon_A & \\ 0 \to & H & \longrightarrow & P & \longrightarrow & A & \to 0, \end{array}$$

где $P_i = P_i(A)$. α — эпиморфизм и потому (так как P нетеров) — изоморфизм, следовательно, и β — изоморфизм. Предложение доказано.

Применив только что доказанное утверждение к случаю $A = \overline{\Lambda} = \sum\limits_i \oplus U_i$ (U_i — простые $\overline{\Lambda}$-модули), $P = P(\overline{\Lambda}) = \Lambda$, $H = R$, мы получим: $\Lambda = \sum\limits_i \oplus P_i$, $R = \sum\limits_i \oplus R_i$, $P_i = P(U_i)$ — неразложимые проективные модули, $R_i = P_i R$. В силу теоремы Крулля — Шмидта, P_i исчерпывают все проективные неразложимые Λ-модули, причем $P_i \approx P_j$ тогда и только тогда, когда $U_i \approx U_j$, и R_i — единственный максимальный подмодуль в P_i.

Таким образом, доказано

Предложение 4.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между неизоморфными неразложимыми проективными Λ-модулями и неизоморфными простыми $\overline{\Lambda}$-модулями. Неразложимый проективный модуль содержит ровно один максимальный подмодуль.*

Предложение 4.3. *Если A — Λ-модуль представления, размерность которого (над $\mathfrak{o}$) не меньше максимума размерностей неразложимых проективных модулей, и A содержит ровно один максимальный подмодуль, то A проективен.*

Доказательство. $A / AR = U$ — простой $\overline{\Lambda}$-модуль. Поэтому $P(A) = P(U)$ — неразложимый проективный модуль. Но тогда из соотношения между размерностями следует, что $A \approx P(A)$.

Λ-модуль представления назовем вполне разложимым, если он распадается в прямую сумму неприводимых модулей представлений. Кольцо Λ назовем вполне разложимым, если оно вполне разложимо как Λ-модуль.

Следствие 4.4 *Вполне разложимый порядок Λ наследственен тогда и только тогда, когда каждый неприводимый Λ-модуль представления содержит ровно один максимальный подмодуль.*

5°. Следствие 4.4 дает возможность описать с точностью до изоморфизма наследственные порядки в $M_n(D)$, где D — конечномерное сепарабельное тело над полем частных полного локального дедекиндова кольца $\mathfrak{o}$, $M_n(L)$ обозначает полное матричное кольцо над некоторым кольцом L.

ТЕОРЕМА 5.1. *Всякий наследственный порядок в $M_n(D)$ изоморфен такому порядку Λ, что $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset M_n(\mathfrak{O})$ ($\mathfrak{O}$ — единственный максимальный порядок в D [11]), где Λ_0 — кольцо с $\mathfrak{O}$-базисом $c_{ij}e_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, e_{ij} — система матричных единиц $M_n(D)$, $c_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$, $c_{ij} = \pi$ (π — простой элемент $\mathfrak{O}$) при $i > j$.*

Доказательство см. в [12].

Аналогичный результат получен в ([13]), ([14]), ([15]), ([16]). Из данного в ([12]) доказательства непосредственно вытекает также следующее предложение, которое также получено рядом авторов [см., напр., ([14]), ([15])].

Предложение 5.2. *Полной системой инвариантов наследственного порядка* Λ *в* $M_n(D)$ *является набор натуральных чисел* $(m_1, \ldots, m_k)$, $m_1 + \ldots + m_k = n$, *определенный с точностью до циклической перестановки. Именно, если* A — *неприводимый* Λ-*модуль представления,* $A = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset A_{k+1} = \pi A$ — *композиционный ряд между* A *и* πA, *то за* m_i *следует принять длину над* $\mathfrak{D}$ *фактора* $A_i \,/\, A_{i+1}$.

В качестве простого следствия результатов этого параграфа приведем следующий критерий наследственности порядков в алгебре D обобщенных кватернионов над полем частных k дедекиндова кольца $\mathfrak{o}$ (характеристика $\mathfrak{o}$ отлична от 2).

Предложение 5.3. *Порядок* Λ *в алгебре обобщенных кватернионов наследственен тогда и только тогда, когда* $\Lambda = M_1 \cap M_2$, *где* M_i — *максимальные порядки, и индекс* Λ *в* M_1 (*т. е.* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{o}}\,(M_1 \,/\, \Lambda)$) *свободен от квадратов.*

Доказательство. Очевидно, условие предложения полностью локализуется, поэтому $\mathfrak{o}$ можно считать полным локальным кольцом. Но тогда либо D тело и в нем имеется только один максимальный порядок (он же — единственный наследственный порядок в D), либо $D = M_2(k)$. Тогда необходимость условия следует из теоремы 5.1. Докажем достаточность. Пусть A_i — неприводимый M_i-модуль. Очевидно, можно считать $A_1 = [e_1, e_2]$, $A_2 = [de_1, e_2]$, $d \in \mathfrak{o}$. Λ имеет базис $[e_{11}, e_{12}, de_{21}, e_{22}]$. Так как индекс Λ в M_1 свободен от квадратов, то d — простой элемент $\mathfrak{o}$ и Λ наследственно по теореме 5.1.

§ 3. Представления бассовых порядков

6°. Мы перейдем теперь к изучению некоторого более широкого класса порядков. В работе ([2]) Басс показал, что если Λ — область целостности, то для того, чтобы всякий Λ-модуль без кручения распадался в прямую сумму идеалов, необходимо и достаточно (при некоторых дополнительных ограничениях на Λ, которые всегда выполнены для $\mathfrak{o}$-колец), чтобы всякий идеал Λ имел две образующие. В ([17]) показано, что наличие двух образующих у каждого идеала является достаточным (но не необходимым) условием распадения в прямую сумму идеалов любого Λ-модуля представления, если Λ — $\mathfrak{o}$-порядок в полупростой сепарабельной алгебре. Однако, по-видимому, более естественным является некоторый другой класс порядков, в коммутативном случае совпадающий с классом порядков, у которых каждый идеал имеет две образующие, а в некоммутативном случае более широкий и содержащий, в частности, все наследственные порядки *.

Перенесем сначала на случай некоммутативных $\mathfrak{o}$-порядков определение горенштейновых колец, данное в ([2]).

* Из описания наследственных порядков (теорема 5.1) можно заключить, что у них могут быть идеалы со сколь угодно большим числом образующих.

Определение и предложение 6.1. *Порядок Λ назовем горенштейновым, если он удовлетворяет следующим равносильным условиям*:

G1. $\mathrm{r.\,inj.\,dim}_\Lambda \Lambda = 1$;

G1′. $\mathrm{l.\,inj.\,dim}_\Lambda \Lambda = 1$;

G2. $\Lambda^* \diagdown \Lambda$ *как правый Λ-модуль*;

G2′. $\Lambda^* \diagdown \Lambda$ *как левый Λ-модуль*.

Доказательство. Так как все условия предложения локальны [см. (3)], то в дальнейшем до конца доказательства мы будем считать $\mathfrak{o}$ полным локальным кольцом. G2 $\Rightarrow$ G1. Существует точная последовательность $\Lambda^{*(m)} \to \Lambda \to 0$, расщепляемая, так как Λ проективно. Поэтому $\Lambda^{*(m)} = \Lambda \oplus X$. Но для любого Λ-модуля представления B

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, \Lambda^*) = \mathrm{Ext}^1_\Lambda (\Lambda, B^*) = 0,$$

откуда $\mathrm{Ext}^1_\Lambda (B, \Lambda) = 0$ и $\mathrm{r.inj.dim}_\Lambda \Lambda = 1$. Аналогично, $G2' \Rightarrow G1'$.

G1 $\Rightarrow$ G2. Для любого левого Λ-модуля представления B

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda (\Lambda^*, B) = \mathrm{Ext}^1_\Delta (B^*, \Lambda) = 0,$$

значит, Λ^* — проективный левый Λ-модуль и потому Λ^* обратим слева [см. (3)], т. е. $\Lambda^* \diagdown \Lambda$, как правый Λ-модуль. Аналогично, G1′ $\Rightarrow$ G2′.

G2 $\Rightarrow$ G1′. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — все различные неразложимые прямые слагаемые Λ как правого Λ-модуля; $P_i = e_i\Lambda$ (e_i — идемпотент); $Q_1, \ldots, Q_m$ — различные неразложимые прямые слагаемые Λ^* как правого Λ-модуля. Так как $\Lambda^* \diagdown \Lambda$, то, по теореме Крулля — Шмидта, всякое P_i совпадает с одним из Q_j. Докажем, что $k = m$. Действительно, $Q_j^* = \Lambda e_j'$ и m есть число различных неразложимых прямых слагаемых Λ как левого Λ-модуля. Но из (9) (глава III) следует, что тогда $k = m$. Поэтому каждое Q_j совпадает с одним из P_i, Λ^* — проективный правый Λ-модуль и потому $\mathrm{l.inj.dim}_\Lambda \Lambda = 1$. Аналогично, G2′ $\Rightarrow$ G1. Предложение полностью доказано.

Из результатов (3) следует, что условие G2 (G2′) эквивалентно каждому из следующих условий:

G3. Всякий точный правый Λ-модуль представления (т. е. модуль, правое кольцо множителей которого есть Λ) делит Λ.

G3′. Всякий точный левый Λ-модуль представления делит Λ.

G4. Всякий точный правый дробный Λ-идеал в $\widetilde{\Lambda}$ обратим слева.

G4′. Всякий точный левый дробный Λ-идеал в $\widetilde{\Lambda}$ обратим справа.

Порядок Λ назовем бассовым, если Λ и все его надкольца горенштейновы. Отметим, что горенштейновость и бассовость — локальные свойства.

Наследственные порядки являются, очевидно, бассовыми. В (17) доказано, что если любое надкольцо $\Gamma \supset \Lambda$ имеет две образующие, как Λ-модуль, то Λ — бассов порядок. Для коммутативных порядков это условие и необходимо [см. (2)].

Предложение 6.2. *Для того чтобы порядок Λ был бассовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых Λ-модулей представлений A и B из $A \diagdown B$ следовало $A^* \diagdown B^*$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть Γ — надкольцо Λ. $\Gamma \diagdown \Gamma^*$, и, следовательно, $\Gamma^* \diagdown \Gamma$, т. е. Γ горенштейново.

Необходимость. Пусть $\Lambda_1 = \Lambda(A)$ — кольцо множителей A, $\Lambda_2 = \Lambda(B)$ — кольцо множителей B. $\Lambda_1 \diagdown A$, $A \diagdown B$, значит, $\Lambda_1 \diagdown B$ и $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. Поэтому B^* — Λ_1-модуль и $\Lambda_1 \diagdown B^*$. Но $A^* \diagdown \Lambda_1^*$ ([3]), $\Lambda_1^* \diagdown \Lambda_1$, так как Λ_1 горенштейново, откуда $A^* \diagdown \Lambda_1$ и $A^* \diagdown B^*$.

7°. ТЕОРЕМА 7.1. *Всякий модуль представления A над бассовым $\mathfrak{o}$-кольцом Λ распадается в прямую сумму идеалов.*

Если Λ — порядок над полным локальным кольцом, то доказательство легко следует из G3 и теоремы Крулля — Шмидта. Однако распадение всякого модуля представления в прямую сумму идеалов не есть, к сожалению, локальное свойство. Поэтому нам придется доказать более сильное утверждение.

Пусть $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{\Lambda}_t$ — разложение $\widetilde{\Lambda}$ в прямую сумму простых алгебр. Если A — Λ-модуль представления, то $\widetilde{A} = \mathfrak{A}_1^{(a_1)} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_t^{(a_t)}$, где $\mathfrak{A}_i$ — неприводимый $\widetilde{\Lambda}_i$-модуль. Будем писать просто

$$\widetilde{A} = (a_1, \ldots, a_t) = \mathbf{a}$$

и называть A s-членным, где $s = a_1 + \ldots + a_t$. Пусть, в частности, $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \lambda_t) = \boldsymbol{\lambda}$. Положим $I(\widetilde{A}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, где $\alpha_i = \min(a_i, \lambda_i)$; $I(\widetilde{A})$ — максимальный $\widetilde{\Lambda}$-идеал, входящий в $\widetilde{A}$ прямым слагаемым.

Предложение 7.2. *Если Λ — бассово $\mathfrak{o}$-кольцо, A — Λ-модуль представления, то $A = I \oplus A'$, причем $\widetilde{I} = I(\widetilde{A})$.*

Легко проверить, что

$$I_{\mathfrak{p}}(\widetilde{A}) = I(\widetilde{A}_{\mathfrak{p}}),$$

поэтому, учитывая результаты ([18]), достаточно доказать предложение 7.2 в предположении, что $\mathfrak{o}$ — полное локальное кольцо.

Будем называть модуль Q инъективным относительно модуля представления A, если всякую диаграмму вида

$$\begin{array}{c} 0 \to B \to A \\ \quad\downarrow \\ \quad Q \end{array}$$

в которой B и A/B — модули представлений, можно дополнить до коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Под инъективным модулем мы будем понимать в дальнейшем модуль, инъективный в категории представлений, т. е. модуль представления, инъективный относительно любого модуля представления (например, Λ^*).

ЛЕММА 7.3. *Если модуль Q инъективен относительно A, $A = B \oplus A_1$, $Q = B \oplus Q_1$, то Q_1 инъективен относительно A_1.*

Доказательство очевидно.

Перейдем к доказательству предложения 7.2. Рассмотрим $Q = A\,\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda^*)$. Q инъективен относительно A; $A \diagdown Q$ и потому $A^* \diagdown Q^*$, т. е. существует точная последовательность

$$A^{*(m)} \to Q^* \to 0.$$

Переходя к двойственным модулям, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & Q & \to & A^{(m)} \\ & & {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \\ & & Q & & \end{array}$$

(ε — тождественное отображение). Дополнив ее до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A^{(m)} \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

мы видим, что Q выделяется из $A^{(m)}$ прямым слагаемым. По теореме Крулля — Шмидта, $A = I_1 \oplus A_1$, $Q = I_1 \oplus Q_1$.

Нетрудно убедиться, что $\widetilde{Q} = (q_1, \ldots, q_t)$, где $q_i = \lambda_i$, если $a_i \neq 0$, и $q_i = 0$, если $a_i = 0$. Пусть $\widetilde{I}_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. Тогда $\widetilde{A}_1 = (a_1 - \beta_1, \ldots, a_t - \beta_t)$, $\widetilde{Q}_1 = (q_1 - \beta_1, \ldots, q_t - \beta_t)$. По лемме 7.3 Q_1 инъективен относительно A_1. Положим $Q_1' = A_1\,\mathrm{Hom}_\Lambda(A_1, Q_1)$, $\widetilde{Q}_1' = (q_1', \ldots, q_t')$, где $q_i' = q_i - \beta_i$ при $a_i - \beta_i \neq 0$ и $q_i' = 0$ при $a_i = \beta_i = 0$. Как и выше, можно показать, что $A_1 = I_2 \oplus A_2$, $Q_1' = I_2 \oplus Q_2$. Положим $Q_2' = A_2\mathrm{Hom}_\Lambda(A_2, Q_2)$ и продолжим этот процесс. В конце концов он должен оборваться. Но, очевидно, это может произойти только если на очередном шаге $Q_k' = 0$, т. е. A_k и Q_k не имеют общих рациональных компонент. Если мы положим $I = I_1 \oplus \ldots \oplus I_k$, $\widetilde{I} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, то это означает, что либо $a_i - \alpha_i = 0$, $\lambda_i - \alpha_i \geqslant 0$, либо $\lambda_i - \alpha_i = 0$, $a_i - \alpha_i \geqslant 0$ для каждого i, т. е. $\alpha_i = \min(a_i, \lambda_i)$. Таким образом, $A = I \oplus A'$, $\widetilde{I} = I(\widetilde{A})$, и предложение 7.2, а вместе с ним и теорема 7.1, доказаны.

§ 4. Мультипликативная теория идеалов

8°. В этом пункте под идеалом порядка Λ мы будем понимать двусторонний дробный Λ-идеал в $\widetilde{\Lambda}$, т. е. решетку (см. [3]) $I \subset \widetilde{\Lambda}$ такую, что $\Lambda I = I\Lambda = I$ и $\widetilde{I} = \widetilde{\Lambda}$. В [19] показано, что если порядок максимален, то его идеалы образуют группу по умножению. В [7] доказывается, что если Λ наследственно, то Λ-идеалы образуют группоид [см. [19]] относительно правильного произведения (напомним, что произведение $I_1 I_2$ называется правильным, если для любых $I_1' \supset I_1$, $I_2' \supset I_2$ из $I_1' I_2' = I_1 I_2$ следует $I_1' = I_1$, $I_2' = I_2$). Аналогичное утверждение верно и для бассовых колец. Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 8.1. *Λ-идеалы образуют группоид относительно правильного умножения тогда и только тогда, когда порядок Λ бассов.*

Доказательство. Необходимость. Если Λ-идеалы образуют группоид, то для любого идеала I правой единицей является его правое кольцо множителей $\Lambda_r(I)$. Но тогда существует I' такой, что $I'I = \Lambda_r(I)$. Полагая $I = \Gamma^*$ (Γ — произвольное надкольцо Λ), мы получим, что $\Gamma^* \diagdown \Gamma$, т. е. Γ горенштейново.

Достаточность. Если Λ бассово, I — произвольный идеал, то по G4(G4′) существуют I' и I'' такие, что $I'I = \Lambda_r(I)$, $II'' = \Lambda_l(I)$. Пусть I_1 — произвольный идеал. Произведение II_1 правильно тогда и только тогда, когда $\Lambda_r(I) = \Lambda_l(I_1)$. Необходимость этого условия очевидна, а достаточность следует из того, что если $I_2 \supset I_1$ и $II_2 = II_1$, то $I'II_2 = I'II_1$, т. е. $\Lambda_r(I)I_2 = I_1$, откуда $I_2 \subset I_1$ и $I_2 = I_1$. Выберем теперь I', I'' так, чтобы $I'I$ и II'' были правильными. Это можно сделать, положив $I' = \{x: xI \subset \Lambda_r(I)\}$, $I'' = \{y: Iy \subset \Lambda_l(I)\}$. Тогда $\Lambda_l(I') = \Lambda_r(I)$, $\Lambda_r(I'') = \Lambda_l(I)$ и, рассмотрев произведение $I'II''$, мы получим, что $I' = I''$. Учитывая, что $\Lambda_r(I)$ и $\Lambda_l(I)$ служат для I правой и левой единицами, мы видим, что Λ-идеалы образуют группоид относительно правильного произведения.

§ 5. Локальное строение бассовых порядков

9°. Мы начнем теперь изучение бассовых порядков над полным локальным дедекиндовым кольцом $\mathfrak{o}$ с тем, чтобы получить некоторое их описание.

Предложение 9.1. *Следующие условия равносильны:*

(a) *$\mathfrak{o}$-порядок Λ горенштейнов*;

(b) *всякий инъективный Λ-модуль представления проективен*;

(c) *всякий проективный Λ-модуль представления инъективен.*

Доказательство. Условия (b) и (c) — двойственные утверждения, поэтому достаточно, например, показать, что (a) $\Leftrightarrow$ (c). В силу теоремы Крулля — Шмидта неразложимый проективный модуль есть прямое слагаемое Λ, поэтому условие (c) равносильно инъективности Λ в категории представлений, т. е. тому, что Λ горенштейново (G1).

Модуль A называется нормально неразложимым [см. (5)], если из $A = B \oplus C$ и $B \diagdown C$ следует, что $C = 0$.

Предложение 9.2. *Если A — нормально неразложимый модуль представления бассова порядка Λ, $A = \sum_i \oplus A_i$ — его разложение на неразложимые, то*

$$\Lambda(A) = \sum_i \oplus A_i^{(m_i)}.$$

Доказательство. Очевидно, можно считать $\Lambda(A) = \Lambda$. Тогда $A \diagdown \Lambda$ и $\Lambda \diagdown A$. Запишем соответствующие точные последовательности:

$$A^{(m)} \to \Lambda \to 0;$$

$$\Lambda^{(n)} \to A \to 0.$$

Обе они расщепляемы: первая — так как Λ проективно, вторая — так как модуль A нормально неразложим и делит Λ (6), и наше утверждение следует из теоремы Крулля — Шмидта.

Следствие 9.3. *Нормально неразложимый модуль представления над бассовым порядком проективен над своим кольцом множителей.*

Обозначим $A \circ B = A \operatorname{Hom}_\Lambda (A, B)$. Если Λ_i — обобщенные надкольца Λ, то, аналогично предложению 1.3, нетрудно проверить, что из $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda_2$ следует $\Lambda_2^* \circ \Lambda_1^* = \Lambda_2^*$.

Предложение 9.4. *Пусть порядок Λ бассов; A, B — неразложимые Λ-модули представлений и $A \circ B \neq B$. Тогда $A \circ B = A^{(r)}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $B \circ A = A$; тогда из предложения 9.2 следует, что $\Lambda(B) \circ \Lambda(A) = \Lambda(A)$ и потому $\Lambda^*(A) \circ \Lambda^*(B) = \Lambda^*(A)$. Но $\Lambda(A) = A^{(m)}$, а $\Lambda^*(A)$ — проективный $\Lambda(A)$-модуль, поэтому $\Lambda^*(A) = A^{(m)}$. $\Lambda^*(B) = B^{(n)}$ и $A^{(m)} \circ B^{(n)} = A^{(m)}$. Но, с другой стороны, очевидно, $A^{(m)} \circ B^{(n)} = (A \circ B)^{(n)}$, откуда, по теореме Крулля — Шмидта, $A \circ B = A^{(r)}$, где $r = m / n$.

Пусть теперь $B \circ A \neq A$. Тогда $C = A \oplus B$ — нормально неразложимый модуль,

$$C \circ A = A, \quad \Lambda(C) \circ \Lambda(A) = \Lambda(A), \quad \Lambda^*(A) \circ \Lambda^*(C) = \Lambda^*(A),$$

$$A^{(m)} \circ (A^{(n_1)} \oplus B^{(n_2)}) = A^{(n_1)} \oplus (A \circ B)^{(n_2)} = A^{(m)}, \quad A \circ B = A^{(r)}, \quad r = \frac{m - n_1}{n_2}.$$

Следствие 9.5. *Для целочисленных векторов* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_t)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_t)$ *положим* $\mathbf{a}\rho\mathbf{b}$, *если существует целое число n такое, что из $a_i \neq 0$ следует $b_i = na_i$. Тогда если A, B — неразложимые модули представлений бассова порядка Λ, $\tilde{A} = \mathbf{a}$, $\tilde{B} = \mathbf{b}$, $\tilde{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda}$, то* $\mathbf{a}\rho\boldsymbol{\lambda}$ *и либо* $\mathbf{a}\rho\mathbf{b}$, *либо* $\mathbf{b}\rho\mathbf{a}$.

Доказательство. $\mathbf{a}\rho\boldsymbol{\lambda}$ по предложению 9.2. Далее, если $A \diagdown B$ и $B \diagdown A$, то $A \approx B$ (6). Пусть $A \curlyvee B$, т. е. $A \circ B \neq B$. Тогда, по предложению 9.4, $\mathbf{a}\rho\mathbf{b}$.

Пользуясь следствием 9.4, можно дать другое доказательство теоремы 7.1 [см. (17)]. Отметим также, что предложения 9.2 и 9.4 по существу доказаны в (17).

Предложение 9.6. *Если Λ — бассов порядок, то после соответствующей перенумерации простых компонент алгебры $\tilde{\Lambda}$ всякому неразложимому Λ-модулю представления A соответствует вектор $a = (a_1, \ldots, a_t)$ одного из следующих видов:*

1) $a_j = 1, a_i = 0$ *при* $i \neq j$ $(j = 1, \ldots, t)$;

2) $a_{2l-1} = a_{2l} = 1$, $a_i = 0$ *при* $i \neq 2l - 1$, $i \neq 2l$ $(l = 1, \ldots, t_1)$;

3) $a_j = 2, a_i = 0$ *при* $i \neq j$ $(j = 2t_1 + 1, \ldots, 2t_1 + t_2)$;

$(2t_1 + t_2 \leqslant 1)$. *Кроме того, если* $\tilde{\Lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$, *то* $\lambda_{2l-1} = \lambda_{2l}$, λ_{2t_1+i} — *четное* $(1 \leqslant l \leqslant t_1, 1 \leqslant i \leqslant t_2)$. *Таким образом, все неразложимые Λ-модули представлений либо одночленные, либо двучленные.*

Доказательство. Пусть A — неразложимый Λ-модуль $\Lambda_1 = \Lambda(A)$. Тогда A проективен над Λ и, по предложению 4.2, имеет ровно один максимальный Λ_1-подмодуль. Но тогда если B — Λ_1-подмодуль A, то A / B также имеет ровно один максимальный Λ_1-подмодуль и потому неразложим.

Предположим, что $\tilde{A} = (a_1, \ldots, a_t) = \mathbf{a}$; у A есть Λ_1-фактормодуль A' такой, что $\tilde{A}' = (a_1, \ldots, a_j - 1, \ldots, a_t) = \mathbf{a}'$ (если $a_j \geqslant 1$). A' неразложим и при $a_j > 1$ $\mathbf{a}\bar{\rho}\mathbf{a}'$. По следствию 9.5 тогда $\mathbf{a}'\rho\mathbf{a}$, откуда $a_j = 2$ и $a_i = 0$ при $i \neq j$.

Пусть теперь все $a_i \leqslant 1$. Если для различных j_1, j_2, j_3 $a_{j_1} = a_{j_2} = a_{j_3} = 1$, то у A найдутся Λ_1-фактор-модули A'', A''' ($\tilde{A}'' = \mathbf{a}''$, $\tilde{A}''' = \mathbf{a}'''$) такие, что $a''_{j_1} = a''_{j_2} = a'''_{j_1} = a'''_{j_3} = 1$, для прочих же i a_i'' и a_i''' равны нулю. Но тогда $\mathbf{a}''\bar{\rho}\mathbf{a}'''$, $\mathbf{a}'''\bar{\rho}\mathbf{a}''$, что противоречит следствию 9.5. Таким образом, не более двух компонент вектора $\mathbf{a}$ отличны от нуля. Пусть $a_{j_1} = a_{j_2} = 1$. Тогда не может существовать неразложимого B такого, что $\tilde{B} = (b_1, \ldots, b_t)$, причем $b_{j_1} = 2$ или $b_{j_2} = b_{j_3} = 1$ ($j_3 \neq j_2$), так как иначе A и B не удовлетворяют следствию 9.5. Учитывая, наконец, что $\mathbf{a}\rho\lambda$, мы и приходим к сформулированному утверждению.

Разложим теперь Λ в прямую сумму неразложимых модулей. Очевидно, если $\Lambda = A \oplus B$ и $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не содержат одинаковых прямых слагаемых, то A и B — кольцевые прямые слагаемые Λ. Поэтому из описания неразложимых модулей, данного в предложении 9.6, непосредственно вытекает

Следствие 9.7. *Бассов порядок Λ распадается в кольцевую прямую сумму:*

$$\Lambda = \Lambda_1{}^1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_{t_1}{}^1 \oplus \Lambda_1{}^2 \oplus \ldots \oplus \Lambda_{t_2}{}^2 \oplus \Lambda_1{}^3 \oplus \ldots \oplus \Lambda_{t_3}{}^3$$

$(2t_1 + t_2 + t_3 = t)$, *где кольца Λ_i^1 содержат по две рациональные компоненты и имеют неразложимые представления с вектором* $(1,1)$, *кольца Λ и Λ_i^3 содержат по одной рациональной компоненте, причем Λ_i^2 имеют двучленные неразложимые модули, а у Λ_i^3 всякий неразложимый модуль одночленный, т. е. неприводимый.*

$\Lambda_i{}^1$, $\Lambda_i{}^2$, $\Lambda_i{}^3$ будем называть соответственно бассовыми порядками I, II и III типов. Все они неразложимы как кольца.

Примеры. 1) Очевидно, наследственные порядки являются бассовыми кольцами III типа.

2) Групповое кольцо Z_pG (G — циклическая группа порядка p, Z_p — кольцо целых p-адических чисел) является бассовым кольцом I типа.

3) Примерами бассовых порядков II типа могут служить те порядки в $M_2(Q_p)$ (где Q_p — поле p-адических чисел), которые имеют конечное число неразложимых p-адических представлений [см. ([20])].

4) Квадратичные Z_p-кольца [см. ([21])] являются ненаследственными бассовыми кольцами III типа.

Ниже мы покажем, что бассовы кольца I и II типов в некотором смысле сводятся к кольцам, аналогичным указанным в примерах 2) и 3), а ненаследственные бассовы кольца III типа (за небольшим исключением) — к кольцам, аналогичным указанным в примере 4).

10°. Покажем сначала, что модули над кольцами L и $M_m(L)$ устроены по сути дела одинаково.

Предложение 10.1. *Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}'$ модулей над L и $M_m(L)$ естественно эквивалентны в смысле* ([22]).

Доказательство. Пусть A — $M_m(L)$-модуль. Тогда $Ae_{11}, \ldots, Ae_{mm}$ — изоморфные L-модули. Положим $Ae_{11} = F(A)$. Если $\varphi: A \to A'$, то $(ae_{11})\varphi = (a\varphi)e_{11}$ и φ индуцирует $F(\varphi) : F(A) \to F(A')$, причем F является ковариантным функтором из $\mathbf{C}'$ в $\mathbf{C}$. Наоборот, если B — L-модуль, то рассмотрим $G(B) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, где все B_i изоморфны B, фиксируем ε_i: $B_i \approx B$ и положим $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i\varepsilon_j^{-1}$. Определим на $G(B)$ структуру $M_m(L)$-модуля, полагая для $x \in G(B)$ $xe_{ij} = x\hat{\varepsilon}_{ij}$ ($\hat{\varepsilon}_{ij}$ обозначает L-гомоморфизм $G(B) \to G(B)$, равный ε_{ij} на B_i и нулю на остальных прямых слагаемых). Если $\varphi : B \to B'$, то построим $G(\varphi)$: $G(B) \to G(B')$, положив $G(\varphi)$ на B_i равным $\varepsilon_i\varphi\varepsilon_i'^{-1}$. $G(\varphi)$ есть $M_m(L)$-гомоморфизм, и G является ковариантным функтором из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}'$. Нетрудно убедиться, что пара функторов F, G определяет естественную эквивалентность категорий.

Следствие 10.2. *Если L — $\mathfrak{o}$-кольцо, то L бассово одновременно с $M_m(L)$.*

Пусть теперь Λ — бассово кольцо I или II типа, n-членное как Λ-модуль представления. Из предложения 9.6 следует, что $n = 2m$. Пусть $\Lambda = \sum_{i=1}^{h} \oplus M_i$ — разложение Λ на неразложимые, $f_1, \ldots, f_h$ — соответствующая система ортогональных идемпотентов, $h \geqslant m$. Если M — двучленный неразложимый Λ-модуль, то $\Lambda(M) = M^{(m)}$ (предложение 9.2) и $\Lambda(M)$ содержит ровно m минимальных ортогональных идемпотентов. Так как $\Lambda(M) \supset \Lambda$, то $h \leqslant m$ и $h = m$, т. е. все M_i двучленные. Пусть $\Lambda_i = \Lambda(M_i)$. $\Lambda_i = M_i^{(m)}$, значит [см. ([9])], $\Lambda_i = M_m(L_i)$, где $L_i = f_1\Lambda_i f_1$. Для любых i, j

$$L_i = f_1\Lambda_i f_1 = f_i\Lambda_i f_i = f_i\Lambda f_i \subset f_1\Lambda_j f_1 = L_j.$$

Поэтому для всех i, j $L_i = L_j$. Это кольцо будем обозначать L. $M_m(L)$ есть надкольцо Λ, поэтому оно бассово и L бассово. При этом L неразложимо, как L-модуль, и по предложению 4.2 имеет один максимальный идеал R (радикал L).

Предложение 10.3. *Неразложимый (как модуль) немаксимальный горенштейнов порядок L имеет единственное минимальное надкольцо L_1. Радикал R кольца L является двусторонним L_1-модулем.*

Доказательство. Так как $L^* \setminus L$, то, по теореме Крулля — Шмидта, $L^* \approx L$. Поэтому в L^* есть один максимальный подмодуль, изоморфный R. Если $R \approx L$, то всякий L-идеал изоморфен L и L максимально. Поэтому $R \not\approx L$ и R не делит $L^* \approx L$. Значит, R — сверххарактеристический подмодуль в L^* и, по предложению 1.3, $R = L_1^*$, причем L_1 — надкольцо L, являющееся также его единственным минимальным надмодулем.

Предложение 10.4. *Всякое бассово кольцо* I *или* II *типа изоморфно $M_m(L)$, где L — неразложимое (как модуль) бассово кольцо (того же типа).*

Доказательство. Мы уже видели, что такое кольцо Λ есть подкольцо $M_m(L)$, содержащее полную систему ортогональных идемпотентов $f_1, \ldots, f_m$. Но эта система сопряжена в $M_m(L)$ с канонической системой $e_{11}, \ldots, e_{mm}$ [см. ([9])]. Поэтому можно считать, что $f_i = e_{ii}$. Положим $I_{ij} = f_i\Lambda f_j$. Так как можно считать, что $\Lambda(M_1) = M_m(L)$, где $M_1 = f_1\Lambda$, то

$I_{1j} = L$ для всех j; $I_{ij}I_{jk} \subset I_{ik}$, поэтому, так как $I_{ii} = L$, все I_{ij} — двусторонние L-идеалы. Полагая $i = 1$, мы получим $I_{jk} \subset L$ для всех j, k. Если все $I_{ij} = L$, то $\Lambda = M_m(L)$. Пусть найдется $I_{ij} \neq L$. Тогда $I_{ij} \subset R$ и $I_{i1} = I_{i1}I_{1j} \subset I_{ij} \subset R$. Будем считать, что $I_{i1} = L$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $I_{i1} \subset R$ при $s < i \leqslant m$. Тогда при $1 \leqslant i \leqslant s$ $I_{ij} = L$ для всех j. При $i > s$, $j \leqslant s$

$$I_{ij} = I_{ij}I_{j1} \subset I_{i1} \subset R.$$

Так как R — двусторонний L_1-модуль (L_1 — минимальное надкольцо L; см. предложение 10.3), то у Λ есть надкольцо Λ' такое, что $f_i\Lambda'f_j = L$ при $i \leqslant s$, $j \leqslant s$, $f_i\Lambda'f_j = L_1$ при $j > s$ и $f_i\Lambda'f_j = R$ при $i > s$, $j \leqslant s$. Из предыдущих рассуждений следует, что Λ' (а потому и Λ) не есть бассово. Предложение доказано.

11°. Перейдем к изучению бассовых колец III типа, т. е. вполне разложимых. Такое кольцо Λ является порядком в $M_n(D)$, где D — конечномерное сепарабельное тело над полем частных k полного локального дедекиндова кольца $\mathfrak{o}$. В D имеется один максимальный порядок $\mathfrak{D}$ ([11]). $\Lambda_0 = M_n(\mathfrak{D})$ — один из максимальных порядков в $M_n(D)$. Очевидно, можно считать, что $\Lambda \subset \Lambda_0$ и Λ содержит $e_{11}, \ldots, e_{nn}$.

Предложение 11.1. *Ненаследственное бассово кольцо* III *типа изоморфно либо $M_n(\mathfrak{D}_1)$, где $\mathfrak{D}_1$ — бассово подкольцо в $\mathfrak{D}$, либо $B_n(m, d)$, $d \geqslant 2$, где $B_n(m, d)$ — порядок с $\mathfrak{D}$-базисом $d_{ij}e_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, причем $d_{ij} = \pi^d$ при $i > m$, $j \leqslant m$, $d_{ij} = 1$ при $i \leqslant m$ или $j > m$ (π — простой элемент $\mathfrak{D}$). Все кольца $B_n(m, d)$ являются бассовыми.*

Как и в 10°, можно показать, что для всех i, j

$$e_{ii}\Lambda e_{ii} = e_{jj}\Lambda e_{jj} = \mathfrak{D}_1,$$

причем $\mathfrak{D}$ — бассов подпорядок в $\mathfrak{D}$ и если $\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}$, то $\Lambda \approx M_n(\mathfrak{D}_1)$. Поэтому будем считать, что $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$. Тогда если A — неприводимый Λ-модуль представления, то его централизатор (т. е. кольцо эндоморфизмов) есть $\mathfrak{D}$.

Предложение 11.2. *Пусть Λ — ненаследственное бассово кольцо* III *типа, причем централизатор любого неприводимого Λ-модуля представления есть $\mathfrak{D}$. Тогда:*

(a) *всякий непроективный неприводимый Λ-модуль представления A имеет два максимальных подмодуля, пересечение которых есть πA;*

(b) *Λ имеет два неизоморфных неразложимых проективных модуля.*

Наоборот, если вполне разложимое $\mathfrak{o}$-кольцо удовлетворяет условию (a), *то оно бассово.*

Доказательство. Если A — непроективный неприводимый Λ-модуль, то по предложению 4.3 он имеет по крайней мере два максимальных подмодуля B и C. Тогда $B \oplus C \searrow A$ и потому $B^* \oplus C^* \searrow A^*$, т. е. существует точная последовательность

$$(B^* \oplus C^*)^{(m)} \xrightarrow{\varphi} A^* \to 0.$$

Но всякий подмодуль A^*, изоморфный $B^*(C^*)$, имеет вид $\pi^r B^*$ $(\pi^q C^*)$. Выбирая $r(q)$ наибольшим среди тех, которые получаются при рассмотрении образов $B^*(C^*)$ при действии φ, мы найдем $\pi^r B^* \subset A^*$, $\pi^q C^* \subset A^*$ такие, что $\pi^r B^* + \pi^q C^* = A$, откуда $\pi^{-r}B \cap \pi^{-q}C = A$. Но тогда $r = q = 1$ и $B \cap C = \pi A$.

Если максимальный подмодуль $D \subset A$ отличен от B и C, то $B \cap D = C \cap D = \pi A$, откуда $A / B \approx C / \pi A \approx A / D \approx B / \pi A \approx A / C \approx D / \pi A$. Далее, если A' — максимальный подмодуль B, отличный от πA, то $A' \cap \pi A = \pi B$ и $B / A' \approx \pi A / \pi B \approx A / B$. Аналогичным образом можно показать, что для любого неприводимого модуля представления X и его максимального подмодуля Y $X / Y \approx A / B$. Принимая, в частности, за X все проективные неразложимые модули, мы получим, что кольцо $\bar{\Lambda} = \Lambda / R$ имеет один простой модуль и потому [см. ([9])] Λ — матричное кольцо над $e_{11}\Lambda e_{11} = \mathfrak{D}$, т. е. наследственно, что противоречит предположению. Таким образом, A имеет ровно два максимальных подмодуля.

Аналогично доказывается утверждение (b), если учесть, что у Λ найдется непроективный неприводимый модуль представления.

Наоборот, пусть Λ вполне разложимо и удовлетворяет условию (a). Если A — неразложимый инъективный Λ-модуль представления, то он неприводим и имеет один минимальный надмодуль (так как A^* проективен и имеет один максимальный подмодуль). Если у A есть два максимальных подмодуля B и C, то $B \cap C = \pi A$, $\pi^{-1}B \cap \pi^{-1}C = A$ и у A по крайней мере два минимальных надмодуля, что противоречит предположению. Следовательно, у A один максимальный подмодуль и A проективен. По предложению 9.1, Λ горенштейново и, так как свойство (a) выполняется и для всех надколец Λ, Λ бассово.

Перейдем к доказательству предложения 11.1. Если $\Lambda \not\approx M_n(\mathfrak{D}_1)$, то оно удовлетворяет условию предложения 11.2 и $\Lambda / R = \bar{A}^{(m)} \oplus \bar{B}^{(n-m)}$. Тогда

$$\Lambda = A^{(m)} \oplus B^{(n-m)}.$$

Кольцо множителей A максимально, поэтому можно считать его равным $M_n(\mathfrak{D})$. При помощи некоторой трансформации $M_n(\mathfrak{D})$ можно добиться того, чтобы $e_{11}\Lambda \approx \ldots \approx e_{mm}\Lambda \approx A$, $e_{ii}\Lambda \approx B$ при $i > m$, $A = [e_1, \ldots, e_n]$, $B = [d_1e_1, \ldots, d_ne_n]$, d_i делит d_{i-1} и не все d_i делятся на π. Пусть $d_1, \ldots, d_l$ $(l \leqslant m)$ делятся на π, $d_{l+1} = \ldots = d_n = 1$. Тогда Λ имеет $\mathfrak{D}$-базис $d_{ij}e_{ij}$, где $d_{ij} = 1$ при $i \leqslant m$ или $j > l$, d_{ij} делится на π при $i > m$, $j \leqslant l$ и $d_{ij}d_{jk}$ делится на d_{ik}. Из этих условий легко получить, что $l = m$ и все d_{ij} $(i > m, j \leqslant m)$ делятся на одну и ту же степень π (π^d), т. е. $\Lambda = B_n(m, d)$. Пользуясь предложением 11.2 легко проверить, что $B_n(m, d)$ — бассов порядок, не наследственный при $d \geqslant 2$.

Неразложимые (как модули) бассовы порядки мы будем называть первичными. Первичные бассовы порядки лежат либо в теле, либо в прямой сумме двух тел, либо в матричной алгебре второго порядка над телом. Из предложений 10.4 и 11.1 мы получаем следующую теорему редукции для бассовых порядков.

ТЕОРЕМА 11.3. *Всякий бассов порядок над полным локальным дедекиндовым кольцом есть кольцевая прямая сумма наследственных порядков, порядков, изоморфных $B_n(m, d)$, и порядков, изоморфных $M_n(L)$, где L — первичный бассов порядок.*

§ 6. Первичные бассовы порядки

12°. Установим некоторые свойства первичных бассовых порядков. В этом пункте Λ будет обозначать неразложимый $\mathfrak{o}$-порядок ($\mathfrak{o}$ — полное локальное) в D, $D_1 \oplus D_2$ или $M_2(D)$ (D, D_1, D_2 — конечномерные сепарабельные тела).

Предложение 12.1. *Следующие условия равносильны*:

(a) Λ *бассово*;

(b) *всякий Λ-модуль представления есть прямая сумма идеалов*;

(c) *всякий Λ-идеал имеет две образующих.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) по теореме 7.1.

(c) $\Rightarrow$ (a) по ([17]).

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть I — Λ-идеал, имеющий более двух образующих. Тогда $I/IR = U^{(m)}$, $m \geqslant 3$, где U — единственный простой Λ/R-модуль; $P(I) = \Lambda^{(m)}$ [см. п. 4°]. Применим к точной последовательности $0 \to B \to$ $\to P(I) \xrightarrow{\varphi} I \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(\ ,\Lambda)$. Мы будем обозначать $\mathrm{Hom}_\Lambda\,(A, \Lambda) =$ $= \hat{A}$. Имеем:

$$0 \to (\hat{I}) \xrightarrow{\hat{\varphi}} \Lambda^{(m)} \to X \to 0,$$

$X = \mathrm{Coker}\,\hat{\varphi}$. $\hat{I}$ — идеал, поэтому X — не идеал и $X = X_1 \oplus X_2$. По предложению 4.1, $\Lambda^{(m)} = P_1 \oplus P_2$, $\hat{I} = H_1 \oplus H_2$, $X_i = P_i / H_i$. Если $H_i = 0$, то $X_i = P_i$ и $\hat{P}_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$, что противоречит равенству $\Lambda^{(m)} = P(I)$.

Если $\tilde{\Lambda} = D$, то $\hat{I}$ неразложим и мы получаем противоречие.

Если $\tilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$ или $\hat{\Lambda} = M_2(D)$, то H_i — неприводимые Λ-модули и тогда либо P_1, либо P_2 имеет вид $\Lambda^{(n)}$, $n \geqslant 2$; пусть $P_1 = \Lambda^{(n)}$. Тогда X_1 — не идеал, $X_1 = X_1' \oplus X_1''$, $P_1 = P_1' \oplus P_1''$, $H_1 = H_1' \oplus H_1''$ и, как и выше, $H_1' \neq 0$, $H_1'' \neq 0$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Следствие 12.2. *Если Λ — первичный бассов порядок, M — его максимальное надкольцо, то M / Λ — циклический Λ-модуль.*

Для бассовых порядков I и III типов имеет место и обратное утверждение, аналогичное результату З. И. Боревича и Д. К. Фаддеева ([23]).

Предложение 12.3. *Если Λ — порядок в D или $D_1 \oplus D_2$, то следующие условия равносильны:*

(a) Λ — *первичный бассов порядок*;

(b) Λ *неразложимо и $\mathfrak{O} / \Lambda$ — циклический Λ-модуль ($\mathfrak{O}$ — максимальный порядок в $\tilde{\Lambda}$).*

Если $\tilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$, то (a) *и* (b) *равносильны.*

(c) Λ — *подпрямая сумма* ([9]) $\mathfrak{O}_1$ *и* $\mathfrak{O}_2$ ($\mathfrak{O}_i$ — *максимальный порядок в D_i*).

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) по следствию 12.2. Если $\tilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$, то, очевидно, (b) $\Rightarrow$ (c).

Пусть $\tilde{\Lambda} = D$. Докажем, что (b) $\Rightarrow$ (a). Максимальный порядок $\mathfrak{O}$ имеет один максимальный идеал $\pi\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\pi$. Если $\alpha \in \tilde{\Lambda}$, то $\alpha = \varepsilon\pi^t$, где ε — единица $\mathfrak{O}$, t — целое число. Обозначим $t = \nu(\alpha)$ (порядок α). Если

I — Λ-идеал, α — элемент I с наименьшим порядком, то $I \approx \alpha^{-1}I$ и $\Lambda \subset \alpha^{-1}I \subset \mathfrak{D}$. Поэтому остается показать, что если $\Lambda \subset I \subset \mathfrak{D}$, то I/Λ циклический. Пусть R — радикал Λ, $R = r_1\Lambda + \ldots + r_k\Lambda$, $r_i \in R$; $\mathfrak{D}R = R\mathfrak{D} = r_1\mathfrak{D} + \ldots + r_k\mathfrak{D} = r\mathfrak{D}$, где r — то из r_i, для которого $\nu(r_i)$ минимально. $R^m\mathfrak{D} = r^m\mathfrak{D}$, и $R^m\mathfrak{D} + \Lambda = r^m\mathfrak{D} + \Lambda = r^m\theta\Lambda + \Lambda$, если $\mathfrak{D} = \theta\Lambda + \Lambda$. Таким образом, модуль $R^m\mathfrak{D} + \Lambda/\Lambda$ циклический и его единственный максимальный подмодуль есть $R^{m+1}\mathfrak{D} + \Lambda/\Lambda$. Учитывая, что $R\mathfrak{D} + \Lambda/\Lambda$ — единственный максимальный подмодуль в $\mathfrak{D}/\Lambda$, мы видим, что если $\Lambda \subset I \subset \mathfrak{D}$, то $I = R^m\mathfrak{D} + \Lambda$ и I/Λ циклический.

Пусть теперь $\widetilde{\Lambda} = D_1 \oplus D_2$. Докажем, что (c) $\Rightarrow$ (a). Из (c) следует, что неприводимый Λ-модуль есть либо $\mathfrak{D}_1$ либо $\mathfrak{D}_2$, т. е. циклический, и так как всякий Λ-идеал I есть либо неприводимый модуль, либо расширение неприводимого с неприводимым ядром, то I имеет 2 образующих и Λ бассово.

Аналогично можно получить

Предложение 12.4. *Неразложимый порядок Λ в $M_2(D)$ бассов тогда и только тогда, когда всякий неприводимый Λ-модуль цикличен.*

В качестве простого следствия результатов этого пункта докажем следующее утверждение.

Предложение 12.5. *Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо характеристики, не равной 2, k — его поле частных, D — алгебра обобщенных кватернионов над k, Λ — $\mathfrak{o}$-порядок в D. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) *Λ — бассово кольцо;*

(b) *всякий Λ-модуль представления есть прямая сумма идеалов.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b) по теореме 7.1.

(b) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{o}$. Тогда $D_\mathfrak{p}$ есть либо тело, либо $M_2(k_\mathfrak{p})$ и по предложению 12.1 $\Lambda_\mathfrak{p}$ бассово. Остается напомнить, что бассовость — локальное свойство.

13°. Дадим описание бассовых порядков в конечномерном сепарабельном теле D над полем частных полного локального дедекиндова кольца $\mathfrak{o}$. Пусть $\mathfrak{D}$ — единственный максимальный порядок в D, π и Π — простые элементы соответственно $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{D}$, $k = \mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o}$, $K = \mathfrak{D}/\Pi\mathfrak{D}$ — конечномерное тело над k. Если Λ — бассов порядок в D, то существует цепочка бассовых порядков $\mathfrak{D} = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \ldots \supset \Lambda_s = \Lambda$, причем Λ_{i-1} — единственный минимальный надмодуль Λ_i (предложение 10.3). Положим $T = \Lambda/R$; $T_i = \Lambda_i/\Lambda_i R$ — двумерная алгебра над T. Если T_i — тело, то $\Lambda_i R \approx \Lambda_i$ — единственный максимальный идеал Λ_i и потому $\Lambda_i = \mathfrak{D}$. В противном случае $T_i = T[r]$, $r^2 = 0$. Отметим, что из доказательства предложения 12.3 следует, что $\Lambda_i = \mathfrak{D}R^i + \Lambda$.

Пусть T_0 — тело. Тогда $T_0 = K$, $\mathfrak{D}R = \mathfrak{D}\Pi$, т. е. Λ содержит элемент первого порядка. В этом случае $\Lambda_i = \mathfrak{D}\Pi^i + \Lambda$, $K \supset T$ и $[K : T] = 2$.

Пусть теперь $T_0 = T[r]$, $r^2 = 0$. Тогда $\mathfrak{D}R = \mathfrak{D}\Pi^2$ и $\Lambda_i = \mathfrak{D}\Pi^{2i} + \Lambda$. Поэтому $\mathfrak{D}\Pi + \Lambda = \mathfrak{D}$, и если Λ содержит элемент нечетного порядка m, то $\Lambda \supset \mathfrak{D}\Pi^m$. Пусть $\pi = \varepsilon\Pi^t$ (ε — единица $\mathfrak{D}$). Так как $\pi \in \Lambda$, то при нечетном t $\Lambda \supset \pi\mathfrak{D}$ и потому $s \leqslant (t-1)/2$.

Итак, для того чтобы в $\mathfrak{O}$ существовали бассовы подкольца, необходимо: либо, чтобы K содержало подтело T такое, что $[K:T]=2$, либо, если $\pi=\varepsilon\Pi^t$, чтобы $t>1$, причем при четном t могут быть сколь угодно длинные цепочки бассовых порядков, а при нечетном t их длина не превосходит $\frac{t-1}{2}$.

Если тело K сепарабельно над k, то верно и обратное. Дадим построение бассовых порядков в $\mathfrak{O}$ в этом случае.

(A). Пусть $T\subset K$ — такое подтело, что $[K:T]=2$, Λ_1 — полный прообраз T в кольце $\mathfrak{O}$. $\mathfrak{O}/\Lambda_1=K/T$ — циклический Λ_1-модуль, значит, Λ_1 бассово (предложение 12.3). Радикал $R(\Lambda_1)$ кольца Λ_1 равен $\mathfrak{O}\Pi$, $\Lambda_1/\mathfrak{O}\Pi=T$. Рассмотрим $\bar{\Lambda}_1=\Lambda_1/\Pi\Lambda_1$. Так как $R(\bar{\Lambda}_1)=\mathfrak{O}\Pi/\Pi\Lambda_1$, $\bar{\Lambda}_1/R(\bar{\Lambda}_1)=T$, то по теореме Веддербарна ([19]) $\bar{\Lambda}_1=T_1+R(\bar{\Lambda}_1)$, $T_1\approx T$. Если Λ_2 — полный прообраз T_1 в Λ_1, то $R(\Lambda_2)=\Pi\Lambda_1$, $\mathfrak{O}R(\Lambda_2)=\mathfrak{O}\Pi$, $\mathfrak{O}/\Lambda_2$ — циклический Λ_2-модуль и потому Λ_2 бассово. Повторяя этот прием, мы построим цепочку колец $\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\Lambda_3\supset\ldots$, каждое из которых бассово.

(B). Предположим, что $\pi=\varepsilon\Pi^t$, $t>1$. $\mathfrak{O}\Pi^2\supset\mathfrak{O}\pi$ и потому $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}\Pi^2=\bar{\mathfrak{O}}$ можно рассматривать как конечномерную k-алгебру. $R(\bar{\mathfrak{O}})=\mathfrak{O}\Pi/\mathfrak{O}\Pi^2$ и $\bar{\mathfrak{O}}/R(\bar{\mathfrak{O}})=K$. По теореме Веддербарна, $\bar{\mathfrak{O}}\supset K_1\approx K$, и если Λ_1 — полный прообраз K_1 в $\mathfrak{O}$, то 1 и Π являются системой образующих $\mathfrak{O}$ как Λ_1-модуля. Поэтому Λ_1 бассово. Имеем: $R(\Lambda_1)=\mathfrak{O}\Pi^2$, $\Lambda_1/R(\Lambda_1)\approx K$. Предположим, что $\varepsilon\Pi^2\Lambda_1\supset\pi\Lambda_1$ (это верно при любом четном t или при нечетном $t\geqslant 5$). Применяя тот же прием к $\bar{\Lambda}_1=\Lambda_1/\varepsilon\Pi^2\Lambda_1$, мы построим бассово кольцо $\Lambda_2\subset\Lambda_1$. Продолжая это построение, мы получим цепочку бассовых порядков $\Lambda_1\supset\Lambda_2\supset\Lambda_3\supset\ldots$, бесконечную при четном t и длины $\frac{t-1}{2}$ при нечетном t.

Отметим, что в (A) построение зависит от выбора тела $T\subset K$, а в (B) — от выбора Π. Поэтому порядки, построенные в (A), мы будем обозначать через $B_i(T)$, а порядки, построенные в (B), — через $B_i(\Pi)$. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 13.1. *Необходимым, а в случае сепарабельности K над k и достаточным для существования немаксимальных бассовых порядков в D является выполнение одного из следующих двух условий*:

(1) *в K есть подтело T такое, что $[K:T]=2$;*

(2) *если $\pi=\varepsilon\Pi^t$, то $t>1$.*

Всякий немаксимальный бассов порядок в D равен либо $B_i(T)$, либо $B_i(\Pi)$. В последнем случае при нечетном t $i\leqslant\frac{t-1}{2}$. Если K над k сепарабельно, то $B_i(T)$ и $B_i(\Pi)$ всегда существуют.

Замечание. Если D коммутативно, то, пользуясь доказанной в ([24]) леммой, можно показать достаточность условий теоремы 13.1 без предположения сепарабельности K над k.

14°. В ([20]) дано описание всех бассовых порядков Λ в $M_2(D)$ таких, что $\omega E\in\Lambda$ для всех $\omega\in\mathfrak{O}$ ($\mathfrak{O}$ — максимальный порядок в D). Именно, это те (и только те) порядки, которые имеют конечное число неразложимых модулей представлений (их список приведен в ([20])).

Предложение 14.1. *Первичный бассов порядок в $M_2(D)$ содержит все скалярные матрицы* ωE $(\omega \in \mathfrak{O})$.

Доказательство. Пусть Λ — неразложимый бассов порядок в $M_2(D)$. Тогда существует цепочка бассовых порядков $\Lambda = \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \ldots \subset \Lambda_k$ $(\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{k-1}$ неразложимы, Λ_k разложимо), где Λ_{i+1} — единственный минимальный надмодуль Λ_i (предложение 10.3). Если A — неприводимый Λ_k-модуль представления, то он и Λ-модуль. Поэтому из предложения 12.4 вытекает, что структура неприводимых Λ_k-модулей представлений линейна и потому Λ_k наследственно (следствие 4.4). Из описания наследственных порядков (теорема 5.1) видно, что Λ_k имеет не более двух неприводимых модулей представлений. Кроме того, если A — неприводимый Λ-модуль представления, то $\Lambda(A) = A^{(2)}$ (по предложению 9.2) и потому $\Lambda(A) \supset \Lambda_k$, откуда следует, что A — Λ_k-модуль, т. е. Λ также имеет не более двух неприводимых модулей представлений.

В цепочке $\Lambda = \Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_k$ найдутся кольца, содержащие все матрицы ωE $(\omega \in \mathfrak{O})$ — например, Λ_k. Очевидно, можно считать, что уже Λ_1 — такое кольцо. $\Lambda_1 \approx R$ — радикалу Λ (см. предложение 10.3), $R \supset \Pi\Lambda_1$ (Π — простой элемент $\mathfrak{O}$) и $\bar{\Lambda} = \Lambda / \Pi\Lambda_1$ есть такое подкольцо кольца $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 / \Pi\Lambda_1$, что $\bar{\Lambda}_1$ имеет две образующих как $\bar{\Lambda}$-модуль. Но, пользуясь приведенным в ([20]) списком, нетрудно проверить, что если Λ_1 — произвольный бассов порядок, содержащий ωE для всех $\omega \in \mathfrak{O}$, $\bar{\Lambda}$ — подкольцо $\bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 / \Pi\Lambda_1$, $\bar{\Lambda}_1$ имеет две образующих как $\bar{\Lambda}$-модуль и $\bar{\Lambda}$ — полный образ $\bar{\Lambda}$ в Λ_1, причем Λ не содержит все ωE, то у Λ найдется неприводимый модуль представления, не являющийся Λ_1-модулем. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Таким образом, мы получаем полное описание первичных бассовых порядков и тем самым, учитывая результаты § 5, полное описание бассовых порядков в локальном случае.

Поступило
20.IV.1967

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bass H., Torsion free and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 102, № 2 (1962), 319—327.
[2] Bass H., On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., 82 (1963), 8—27.
[3] Фаддеев Д. К., Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 145—182.
[4] Биркгоф Г., Теория структур, М., ИЛ, 1952.
[5] Ройтер А. В., Категории с делимостью и целочисленные представления, Докл. АН СССР, 153 (1963), 46—48.
[6] Ройтер А. В., Делимость в категории представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом, Укр. матем. ж., 17, № 4 (1965), 124—129.
[7] Harada M., Hereditary orders, Trans. Amer. Math. Soc., 107 (1963), 273—290.
[8] Боревич, З. И., Фаддеев Д. К., К теории гомологий конечных групп. II, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7 (1959), 72—87.
[9] Джекобсон Н., Строение колец, М., ИЛ., 1961.

[10] Bass H., Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), 466—488.

[11] Hasse K., Ueber ᵽ-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetic hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., 104 (1931), 495—534.

[12] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., Наследственные порядки, Укр. матем. ж., 19 (1967).

[13] Higikata., Sugaku no Ayumi, 10 (1963), 66—77.

[14] Harada M., Structure of hereditary orders over local rings, J. Math. Osaka City Univ., 14 (1963).

[15] Brumer A., Structure of hereditary orders, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 721—724.

[16] Anthony M. J., Hereditary orders over principal ideal domains, Dissert. Abstr., 25 (1964), 2539.

[17] Ройтер А. В., Аналог одной теоремы Басса для модулей представлений некоммутативных порядков, Докл. АН СССР, 168 (1966), 1261—1264.

[18] Фаддеев Д. К., О полугруппе родов в теории целочисленных представлений, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 (1964), 475—478.

[19] Джекобсон Н., Теория колец, М., ИЛ, 1947.

[20] Дрозд Ю. А., Кириченко В. В., О представлениях колец, лежащих в матричной алгебре второго порядка, Укр. матем. ж., 19, № 3 (1967), 107—112.

[21] Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Целочисленные представления квадратичных колец, Вестн. Ленингр. ун-та, 19 (1960), 52—64.

[22] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., ИЛ, 1961.

[23] Боревич З. И., Фаддеев Д. К., Представления порядков с циклическим индексом, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 80 (1965), 51—65.

[24] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Уточнение одной теоремы Басса, Докл. АН СССР, 176, № 2 (1967), 266—268.