Функциональный анализ и его приложения,
т. 6, вып. 4, 1972, 41—43

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР

Ю. А. Дрозд

Пусть даны два набора матриц одинаковой размерности: $(A_1, \ldots, A_n)$ и $(B_1, \ldots, B_n)$. Эти наборы называются *подобными*, если существует невырожденная матрица S той же размерности такая, что $B_i = SA_iS^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Классификация наборов матриц с точностью до подобия — одна из самых старых задач линейной алгебры и, по общему признанию, одна из самых безнадежных уже при $n = 2$. Поэтому естественно попытаться наложить на матрицы какие-нибудь ограничения, при которых эта задача еще поддается решению современными средствами. Самое простое из таких условий — коммутативность. Однако, как показано в [3], [4], классификация пар коммутирующих матриц фактически равносильна классификации пар произвольных матриц. С другой стороны, в [2] дана классификация пар взаимно аннулирующих матриц над алгебраически замкнутым полем. В настоящей работе будет показано, что это практически единственный случай, в котором классификация наборов коммутирующих матриц не сводится к классификации произвольных пар. Основное поле K мы будем предполагать алгебраически замкнутым.

Рассмотрим подалгебру полной матричной алгебры, порожденную матрицами $(A_1, \ldots, A_n)$ и единичной матрицей E. Набор $(A_1, \ldots, A_n)$ определяет представление этой алгебры. Подобные наборы, очевидно, дают изоморфные алгебры и эквивалентные представления. Если не накладывать на матрицы никаких условий, получается задача об описании конечномерных представлений свободной алгебры над полем K. Условия, которые мы наложим, будут иметь такой вид: $(A_1, \ldots, A_n)$ должно быть представлением некоторой фиксированной конечнопорожденной алгебры $\mathfrak{A}$ (это дает некоторые соотношения между матрицами). В дальнейшем алгебра $\mathfrak{A}$ будет предполагаться коммутативной.

Конечнопорожденная коммутативная алгебра, в силу теоремы Гильберта о базисе, нётерова. Поэтому, если M — модуль конечномерного представления алгебры $\mathfrak{A}$ (конечномерный $\mathfrak{A}$-модуль), то он разлагается в прямую сумму модулей, аннуляторы которых — примарные идеалы для некоторых максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$ [5]. Если аннулятор M есть $\mathfrak{p}$-примарный идеал ($\mathfrak{p}$ — максимальный идеал), то M можно рассматривать как модуль над $\mathfrak{p}$-адическим пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Следовательно, мы можем ограничиться случаем, когда $\mathfrak{A}$ — полная локальная алгебра с единственным максимальным идеалом R (он же — радикал Джекобсона).

Рассмотрим категорию $C(\mathfrak{A})$ конечномерных $\mathfrak{A}$-модулей и категорию C_0 пар матриц (или, что то же, конечномерных модулей над свободной K-алгеброй с двумя образующими). Алгебру назовем *сложной*, если существует функтор $F: C_0 \to C(\mathfrak{A})$, переводящий неизоморфные объекты в неизоморфные. Иными словами, это означает что классификация конечномерных $\mathfrak{A}$-модулей включает в себя классификацию пар матриц. Функтор F будем называть *функтором включения.*

Введем обозначения: $\mathfrak{A}_1 = K[X, Y]/(X^2, XY^2, Y^3)$, $\mathfrak{A}_2$ — алгебра с базисом $[1, x_0, x_1, x_2]$ и умножением $x_ix_j = 0$ для любых i, j.

Лемма. *Алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются сложными.*

Доказательство. Пусть (A_1, A_2) — произвольная пара матриц. Положим

$$B = \begin{pmatrix} c_1E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5E \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & E & E & E \\ 0 & E & E & A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

где все клетки — квадратные и одной размерности, $c_1, \ldots, c_5$ — попарно различные элементы поля K. Легко проверить, что тогда следующая пара матриц определяет представление алгебры $\mathfrak{A}_1$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & Y_3 \\ 0 & 0 & Y_1 \end{pmatrix},$$

где

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = (0 \;\; C \;\; 0).$$

Пусть $(X, \bar{Y})$ — другая пара того же вида, где в $\bar{Y}$ вместо C стоит $\bar{C}$, определяемое аналогичным образом по паре $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$. Предположим, что матрица S определяет подобие (X, Y) и $(X, \bar{Y})$. Тогда $SX = XS$ откуда следует, что S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ 0 & S_4 & S_5 \\ 0 & 0 & S_1 \end{pmatrix}$$

(разбиение — такое же, как и в матрице X).

Разобьем матрицы S_i соответственно разбиению матриц Y_i и воспользуемся равенством $SY = \bar{Y}S$. Из равенства $Y_1S_1 = S_1Y_1$ следует, что $S_1 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & U_4 & U_5 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix}$, $Y_1S_2 = 0$, откуда $S_2 = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Далее, $S_4Y_3 + S_5Y_1 = \bar{Y}_3S_1$, откуда $S_4C = \bar{C}U_4$. Наконец, $S_1Y_2 + S_2Y_3 + S_3Y_1 = Y_1S_3 + Y_2S_1$, откуда $U_4 = U_1$ и $U_1B = BU_4$. Таким образом, получаем $U_1B = BU_1$, $S_4C = \bar{C}U_1$. Первое равенство дает

$$U_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_5 \end{pmatrix}.$$

Но тогда из второго равенства следует, что $S_4 = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$, причем $T = T_k$ $(k = 1, \ldots, 5)$ и $TA_i = \bar{A}_iT$ $(i = 1, 2)$, откуда, так как T — невырожденная матрица, $\bar{A}_i = TA_iT^{-1}$ $(i = 1, 2)$.

Таким образом, мы получаем функтор включения (на морфизмах он определяется очевидным образом). Следовательно, $\mathfrak{A}_1$ — сложная алгебра.

Аналогично, но проще доказывается, что $\mathfrak{A}_2$ — сложная алгебра. Для этого паре (A_1, A_2) сопоставляется такое представление алгебры $\mathfrak{A}_2$:

$$x_i \to \begin{pmatrix} 0 & A_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(клетки — квадратные, $A_0 = E$). Легко проверить, что таким образом получается функтор включения.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— полная локальная алгебра над алгебраически замкнутым полем* K, *которая не является сложной. Тогда либо* $\mathfrak{A}$ *— факторалгебра алгебры* $\mathfrak{A}_0 = K[[X, Y]]/(XY)$, *либо* K *— поле характеристики 2 и* $\mathfrak{A}$ *— групповая алгебра четверной группы Клейна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если радикал R алгебры $\mathfrak{A}$ имеет больше двух образующих, то у $\mathfrak{A}$, очевидно, есть факторалгебра, изоморфная $\mathfrak{A}_2$, и потому $\mathfrak{A}$ — сложная алгебра. Следовательно, у R не более двух образующих и $\mathfrak{A} \cong K[[X, Y]]/I$. Обозначим через N максимальный идеал алгебры $K[[X,Y]]$.

Порядком степенного ряда $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$ (f_i — форма степени i) назовем наименьший номер i, для которого $f_i \neq 0$. Если в идеале I нет ни одного ряда порядка 2, то $I \subset N^3$ и у $\mathfrak{A}$ есть факторалгебра, изоморфная $\mathfrak{A}_1$, что невозможно. Если в I есть ряд порядка 1, то алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна факторалгебре алгебры $K[[X]]$ и, тем более, алгебры $\mathfrak{A}_0$. Итак, можно считать, что в I нет рядов порядка 1, но есть ряд f порядка 2.

Рассмотрим форму $f_2 = aX^2 + bXY + cY^2$. Так как поле K алгебраически замкнуто, эта форма разложима: $f_2 = g_1h_1$, где g_1 и h_1 — линейные формы.

Предположим сначала, что формы g_1 и h_1 линейно независимы, и рассмотрим многочлен $P(T) = T^2 - (g_1 + h_1)T + f$. По модулю N^3 он разлагается: $(T - g_1)(T - h_1)$. По лемме Гензеля $P(T) = (T - g)(T - h)$, причем g_1 и h_1 — начальные формы g и h. Но тогда $f = gh$, и так как g_1 и h_1 линейно независимы, существует автоморфизм кольца $K[[X, Y]]$, переводящий g в X, а h в Y. Следовательно, $\mathfrak{A}$ есть факторалгебра $\mathfrak{A}_0$.

Пусть теперь $g_1 = ch_1$, т. е. $f_2 = ch_1^2 = \varphi_1^2$, где $\varphi_1 = \sqrt{c}h_1$. Применяя, если нужно, автоморфизм кольца $K[[X, Y]]$, можно считать, что $\varphi_1 = X$. Если f — единственный с точностью до постоянного множителя ряд порядка 2, лежащий в I, то у $\mathfrak{A}$ есть факторалгебра, изоморфная $\mathfrak{A}_1$, что невозможно. Поэтому можно считать, что в I лежит еще ряд с начальной формой Y^2. Но тогда, как легко видеть, $I \supset N^3$, и за базис алгебры $\mathfrak{A}$ можно принять $[1, x, y, xy]$, где x и y — образы X и Y в $\mathfrak{A}$. Если характеристика K не равна 2, то отображение $X \to x + y$, $Y \to x - y$ индуцирует эпиморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ на $\mathfrak{A}$. Если же K — поле характеристики 2, то $[1, 1 + x, 1 + y, 1 + x + y + xy]$ — групповой базис алгебры $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}$ изоморфна групповой алгебре четверной группы Клейна. Теорема доказана.

Представления алгебры $\mathfrak{A}_0$ — это пары нильпотентных взаимно аннулирующих матриц, классификация которых дана в [2]. Представления же четверной группы Клейна описаны в [1], [4].

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию 2 февраля 1972 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б а ш е в В. А., Представление группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2, ДАН СССР **141**, № 5 (1961), 1015—1018.
2. Г е л ь ф а н д И. М., П о н о м а р е в В. А., Неразложимые представления группы Лоренца, УМН **XXIII**, вып. 2 (1968), 3—60.
3. Г е л ь ф а н д И. М., П о н о м а р е в В. А., Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве, Функц. анализ **3**, вып. 4 (1969), 81—82.
4. К р у г л я к С. А., О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p, ДАН СССР **153**, № 6 (1963), 1253—1256.
5. С е р р Ж.-П., Локальная алгебра и теория кратностей, Математика **7** : 5 (1963) 3—93.