# АНАЛІТИЧНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНО ОПУКЛИХ МНОЖИН

***Осіпчук Тетяна Михайлівна***

Встановлено гіперкомплексні аналоги відомих результатів для лінійно опуклих областей $n$-вимірного комплексного простору.

### Означення лінійної опуклості

## Простір $\mathbb{C}^n$

**Означення 1.** Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної точки $z^0 \in \partial D$ існує комплексно $n-1$-вимірна аналітична площина

$$\left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i(z_i - z_i^0) = 0 \right\},\ a_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,n},$$

що проходить через точку $z^0$ і не перетинає $D$.

**Означення 2.** Область $D \subset \mathbb{C}^n$ називається *локально лінійно опуклою*, якщо для довільної точки $z^0 \in \partial D$ існує комплексно $n-1$-вимірна аналітична площина, що проходить через точку $z^0$ і не перетинає $D$ в деякому околі цієї точки.

## Аналітичні умови локальної лінійної опуклості в просторі $\mathbb{C}^n$

Нехай

$$z_j = x_j + iy_j,\;\; \bar{z}_j = x_j - iy_j,\;\; x_j, y_j \in \mathbb{R};$$

$$x_j = \frac{z_j + \bar{z}_j}{2},\quad y_j = \frac{z_j - \bar{z}_j}{2i};\quad j = \overline{1,n},$$

і нехай

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\;\; y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n),\;\; \bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Тоді

$$\varphi(x, y) = \varphi(z, \bar{z}) = \varphi(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}.$$

При умові, що функція $\varphi$ неперервно диференційовна

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y_j}\right),\;\; j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Г. Бенке та Е. Пешль досліджували область в просторі $\mathbb{C}^2$ з межею класу $C^2$, тобто область

$$D = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \varphi(z) < 0\},$$

яка задана за допомогою функції $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ із класу $C^2$, $\varphi(z) = 0$ в точках $z \in \partial D$, при чому градієнт $\varphi$ відмінний від нуля скрізь на $\partial D$. Використовуючи позначення

$$\mathfrak{L}_\varphi := -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial \bar z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial \bar z_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial \bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial \bar z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial \bar z_2} \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_\varphi := -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial z_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial z_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\partial z_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\partial z_2} \end{vmatrix},$$

в 1935 році вони встановили такий результат:

**Теорема 1.** *Для того, щоб область $D$ була локально лінійно опуклою необхідно, щоб скрізь на її межі виконувалась умова*

$$\mathfrak{L}_\varphi \geq |\mathfrak{H}_\varphi|, \tag{2}$$

*і достатньо, щоб скрізь на $\partial D$ виконувалась умова*

$$\mathfrak{L}_\varphi > |\mathfrak{H}_\varphi|. \tag{3}$$

В 1971 році Б. С. Зіновьєв отримав наступне узагальнення даних результатів на випадок довільної розмірності $n \geq 2$.

Нехай задано область

$$D := \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\},$$

яка визначається за допомогою функції $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ із класу $C^2$, $\varphi(z) = 0$ в точках $z \in \partial D$, при чому градієнт $\varphi$ відмінний від нуля скрізь на $\partial D$.

**Теорема 2.** *Для того, щоб область $D$ була локально лінійно опуклою необхідно, щоб для кожної точки $z^0 \in \partial D$*

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \varphi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} s_j s_k \geq 0, \quad \text{\textit{де}} \quad z_{n+j} = \bar{z}_j,\ s_{n+j} = \bar{s}_j, \tag{4}$$

*для усіх векторів $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $s_j = z_j - z_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, таких, що*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(z^0)}{\partial z_j} s_j = 0, \tag{5}$$

*і достатньо, щоб для кожної точки $z^0 \in \partial D$*

$$\sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 \varphi(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} s_j s_k > 0, \quad \text{\textit{де}} \quad z_{n+j} = \bar{z}_j,\ s_{n+j} = \bar{s}_j, \tag{6}$$

*для тих самих векторів $s$.*

## Простір $\mathbb{H}^n$.

Нехай $\mathbb{H}$ — алгебра кватерніонів

$$a = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

де $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, а уявні одиниці $e_i$, $i = 1, 2, 3$, задовольняють умови

$$\begin{aligned} &e_i e_i = -1, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j), \\ &e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Додавання в алгебрі $\mathbb{H}$ відбувається за правилом:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + (b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) e_1 + (a_2 + b_2) e_2 + (a_3 + b_3) e_3. \end{aligned}$$

Множення відбувається за правилом множення суми на суму. При цьому, добутки виду $a_k e_k b_l e_l$ замінюються на добутки виду $a_k b_l e_k e_l$ з урахуванням формул (7), після чого зводяться подібні доданки. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \\ = (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) + \\ + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + \\ + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + \\ + (a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3. \end{aligned}$$

Алгебра кватерніонів є асоціативною відносно множення та додавання, комутативною відносно додавання, але не є комутативною відносно множення, тобто, для довільних кватерніонів $a$, $b$, взагалі кажучи,

$$a \cdot b \neq b \cdot a.$$

Будемо розглядати векторний простір

$$\mathbb{H}^n := \underbrace{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \ldots \times \mathbb{H}}_{n}$$

та елементи цього простору $z := (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$, де

$$z_j := x_0^j + x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + x_3^j e_3 \in \mathbb{H}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Нехай

$$|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{3} \left(x_k^j\right)^2},$$

тоді околом $U(w)$ точки $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{H}^n$ є множина

$$U(w) = \{z : |z - w| < \delta\}.$$

## Лінійна опуклість в просторі $\mathbb{H}^n$

В 1985 році Г.А. Мкртчян дає наступне означення:

**Означення 3.** Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ називається *(локально) гіперкомплексно опуклою*, якщо в кожній точці $w$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega$, існує гіперплощина

$$\left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i (z_i - z_i^0) = 0 \right\}, \ a_i \in \mathbb{H}, \ i = \overline{1, n},$$

кватерніонної розмірності $n - 1$, яка проходить через точку $w \in \partial\Omega$ і не перетинає $\Omega$ (в деякому околі цієї точки).

Оскільки множення в алгебрі кватерніонів некомутативне, то в рівнянні гіперплощини є істотним порядок множення. Тому для визначеності в 1985 році Г.А. Мкртчян розглядає гіперплощини в рівнянні яких фіксована точка $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{H}^n$ множиться на точку зі змінними координатами $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$ зліва.

**Означення 4.**Область $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ називається *локально лінійно опуклою зліва (справа)*, якщо в кожній точці $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega$, існує кватерніонна гіперплощина

$$\left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n : \sum_{j=1}^{n} a_j \left(z_j - w_j\right) = 0,\ a_j \in \mathbb{H} \right\}$$

$$\left( \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n : \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - w_j\right) a_j = 0,\ a_j \in \mathbb{H} \right\} \right),$$

яка проходить через точку $w \in \partial\Omega$ і не перетинає $\Omega$ в деякому околі цієї точки.

## Задача

Знайти аналітичні умови локальної лінійної опуклості зліва (справа) області $\Omega \subset \mathbb{H}^n$, аналогічні аналітичним умовам Зіновьєва (4), (6).

## Аналітичні умови локальної лінійної опуклості в просторі $\mathbb{H}^n$

Розглядається векторний простір

$$\mathbb{H}^n := \underbrace{\mathbb{H} \times \mathbb{H} \times \ldots \times \mathbb{H}}_{n}$$

та елементи цього простору $z := (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$, де

$$z_j := x_0^j + x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + x_3^j e_3 \in \mathbb{H},\ x_k^j \in \mathbb{R},\ k = \overline{0,3},\ j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо умовно спряжені кватерніони $z_j^1$, $z_j^2$, $z_j^3$ до $z_j$:

$$\begin{array}{lcl} z_j &:=& x_0^j + x_1^j e_1 + x_2^j e_2 + x_3^j e_3\,, \\ z_j^1 &:=& x_0^j + x_1^j e_1 - x_2^j e_2 - x_3^j e_3\,, \\ z_j^2 &:=& x_0^j - x_1^j e_1 + x_2^j e_2 - x_3^j e_3\,, \\ z_j^3 &:=& x_0^j - x_1^j e_1 - x_2^j e_2 + x_3^j e_3\,,\ \ j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{8}$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0,$$

тоді елементи $x_0^j$, $x_1^j e_1$, $x_2^j e_2$, $x_3^j e_3$ системи (8) можна, і до того ж єдиним чином, виразити через $z_j$, $z_j^1$, $z_j^2$, $z_j^2$. Маємо:

$$\begin{array}{ll} x_0^j &= 4^{-1}\left(z_j + z_j^1 + z_j^2 + z_j^3\right), \\ x_1^j e_1 &= 4^{-1}\left(z_j + z_j^1 - z_j^2 - z_j^3\right), \\ x_2^j e_2 &= 4^{-1}\left(z_j - z_j^1 + z_j^2 - z_j^3\right), \\ x_3^j e_3 &= 4^{-1}\left(z_j - z_j^1 - z_j^2 + z_j^3\right). \end{array}$$

Звідси, домножуючи зліва обидві частини рівнянь на відповідні вирази $-e_k$, $k = 1, 2, 3$, одержуємо:

$$\begin{array}{ll} x_0^j &= 4^{-1}\left(z_j + z_j^1 + z_j^2 + z_j^3\right), \\ x_1^j &= 4^{-1} e_1 \left(-z_j - z_j^1 + z_j^2 + z_j^3\right), \\ x_2^j &= 4^{-1} e_2 \left(-z_j + z_j^1 - z_j^2 + z_j^3\right), \\ x_3^j &= 4^{-1} e_3 \left(-z_j + z_j^1 + z_j^2 - z_j^3\right); \end{array} \tag{9}$$

або, домножуючи справа обидві частини рівнянь на ті ж самі вирази, одержуємо:

$$\begin{aligned} x_0^j &= 4^{-1}\left(z_j + z_j^1 + z_j^2 + z_j^3\right), \\ x_1^j &= 4^{-1}\left(-z_j - z_j^1 + z_j^2 + z_j^3\right) e_1, \\ x_2^j &= 4^{-1}\left(-z_j + z_j^1 - z_j^2 + z_j^3\right) e_2, \\ x_3^j &= 4^{-1}\left(-z_j + z_j^1 + z_j^2 - z_j^3\right) e_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Нехай $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$, де

$$\begin{aligned} x_0 &= (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n), \\ x_1 &= (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n), \\ x_2 &= (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n), \\ x_3 &= (x_3^1, x_3^2, \ldots, x_3^n). \end{aligned}$$

Тоді, нехай $z, z^1, z^2, z^3 \in \mathbb{H}^n$, де

$$\begin{aligned} z &= (z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ z^1 &= (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1), \\ z^2 &= (z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2), \\ z^3 &= (z_1^3, z_2^3, \ldots, z_n^3), \end{aligned}$$

$$\rho(x_0, x_1, x_2, x_3) = \rho(z, z^1, z^2, z^3) = \rho(z) : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}.$$

При умові, що функція $\rho$ неперервно диференційовна маємо формули для формальних похідних першого порядку (тут $z_j^0 := z_j$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial z_j^0} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_0^j} - \frac{\partial\rho}{\partial x_1^j}e_1 - \frac{\partial\rho}{\partial x_2^j}e_2 - \frac{\partial\rho}{\partial x_3^j}e_3\right),\\
\frac{\partial\rho}{\partial z_j^1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_0^j} - \frac{\partial\rho}{\partial x_1^j}e_1 + \frac{\partial\rho}{\partial x_2^j}e_2 + \frac{\partial\rho}{\partial x_3^j}e_3\right),\\
\frac{\partial\rho}{\partial z_j^2} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_0^j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_1^j}e_1 - \frac{\partial\rho}{\partial x_2^j}e_2 + \frac{\partial\rho}{\partial x_3^j}e_3\right),\\
\frac{\partial\rho}{\partial z_j^3} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_0^j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_1^j}e_1 + \frac{\partial\rho}{\partial x_2^j}e_2 - \frac{\partial\rho}{\partial x_3^j}e_3\right),\quad j=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{11}$$

При умові, що функція $\rho$ двічі неперервно диференційовна, формальні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}$, $i,j=\overline{1,n}$, $k,l=\overline{0,3}$, функції $\rho$ виражаються через частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i\partial x_l^j}$ у наступний спосіб. Нехай

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

матриця, що відповідає системі (11) формальних частинних похідних першого порядку. Тоді, формули цієї системи можна для зручності представити у скороченому вигляді так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_j^l} = \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{3}\gamma_{lp}\frac{\partial\rho}{\partial x_l^j}e_p,\quad j=\overline{1,n},\ l=\overline{0,3}.$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i^k\partial z_j^l} := \frac{1}{16}\sum_{p,g=0}^{3}\gamma_{lp}\gamma_{kg}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k^i\partial x_l^j}e_pe_g,\ j,i=\overline{1,n},\ l,k=\overline{0,3}. \tag{12}$$

Розглядається область

$$\Omega = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{H}^n : \rho(z) < 0\},$$

яка визначається за допомогою функції $\rho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ із класу $C^2$, $\rho(w) = 0$ в точках $w \in \partial\Omega$, при чому

$$\operatorname{grad} \rho(w) = \left( \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_1}, \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_n} \right) \neq 0, \qquad w \in \partial\Omega.$$

**Теорема 3.** *Для того щоб область $\Omega$ була локально лінійно опуклою зліва (справа) необхідно, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувались нерівності*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l s_i^k \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l \geq 0, \tag{13}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} s_j^l s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} \geq 0$$

*для усіх векторів* $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$, $s_j = z_j - w_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *таких, що*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} s_j = 0 \quad \left( \sum_{j=1}^{n} s_j \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} = 0 \right),$$

*і достатньо, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувалась хоча б одна з нерівностей*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l s_i^k > 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l > 0, \tag{14}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=0}^{3} s_j^l s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} > 0$$

*для тих самих векторів $s$.*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,s_j^l\,s_i^k=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}s_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,s_j^l=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}s_j^l\,s_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i\partial x_l^j}\,(v_l^j-x_l^j)\,(v_k^i-x_k^i). \tag{15}$$

**Лема 1.** *Для повного диференціалу першого порядку* $d\rho(w)$ *функції* $\rho$ *в точці* $w$ *справедливі співвідношення*

$$d\rho(w)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_l^j}\,dx_l^j=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^l}\,dz_j^l=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{3}dz_j^l\,\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^l}. \tag{16}$$

**Лема 2.** *Для повного диференціалу другого порядку* $d^2\rho(w)$ *функції* $\rho$ *в точці* $w$ *справедливі співвідношення*

$$d^2\rho(w)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i\partial x_l^j}\,dx_l^j\,dx_k^i=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,dz_j^l\,dz_i^k=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}dz_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,dz_j^l=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=0}^{3}dz_j^l\,dz_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,. \tag{17}$$

## Критерій лінійної опуклості для обмежених повних областей Гартокса в просторі $\mathbb{H}^2$

**Означення 5.** *Повною областю Гартокса в просторі* $\mathbb{H}^n$ називається така область, яка разом з кожною своєю точкою $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n$, також містить кожну точку $(z_1, z_2, \ldots, z_n') \in \mathbb{H}^n$, де $|z_n'| \leq |z_n|$.

Довільну повну область Гартокса в $\mathbb{H}^n$ (надалі, область Гартокса) можна представити у вигляді

$$\Omega = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{H}^n : \ |z_n| < R(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})\},$$

де $R : \mathbb{H}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$.

Далі будемо працювати в просторі $\mathbb{H}^2$.

Нехай $D$ ($D \subset \mathbb{H}$) — обмежена область і $h : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, при чому функція $h(z_1) > 0$ в точках $z_1 \in D$, $h(z_1) = 0$ в точках $z_1 \in \partial D$, $h(z_1) \in C^2$ і $\dfrac{\partial h}{\partial z_1} \neq 0$ в тих точках, де $h(z_1) = 0$. Будемо розглядати обмежені області Гартокса, визначені наступним чином:

$$\Omega := \{(z_1, z_2) \in D \times \mathbb{H} : \ |z_2|^2 < h(z_1)\}. \tag{18}$$

Нехай

$$\rho(z_1, z_2) := |z_2|^2 - h(z_1).$$

Безпосередньо перевіряється, що при умовах, накладених на функцію $h(z_1)$, функція $\rho : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ належить класу $C^2$ і $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ скрізь на межі $\partial\Omega$.

Тоді область Гартокса

$$\Omega := \{z = (z_1, z_2) \in D \times \mathbb{H} : \ \rho(z) < 0\}. \tag{19}$$

має межу класу $C^2$.

**Теорема 4.** *Нехай* $\Omega$ *обмежена повна область Гартокса в просторі* $\mathbb{H}^2$ *з межею класу* $C^2$. *Для того щоб область* $\Omega$ *була лінійно опуклою зліва (чи справа) необхідно і достатньо, щоб виконувалась хоча б одна з нерівностей*

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k,l=0}^{3}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}s_j^l s_i^k \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k,l=0}^{3}s_i^k\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}s_j^l \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{k,l=0}^{3}s_j^l s_i^k\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l} \geq 0$$

*для усіх векторів* $s=(s_1,s_2)\in\mathbb{H}^2\setminus\{0\}$, *таких, що*

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j}s_j = 0 \quad \left(\sum_{j=1}^{2}s_j\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j} = 0\right),$$

## Аналітичні умови локальної узагальненої лінійної опуклості в просторі $Cl_{p,q}^m$

Нехай задано дійсний векторний простір $\mathbb{R}^n$ розмірності $n = p + q$ і в ньому деякий ортонормований базис $\{e_j\}_{j=1}^n$.

**Означення 6.** *Алгеброю Кліффорда* $Cl_{p,q}$ дійсного простору $\mathbb{R}^{p+q}$ називається асоціативна алгебра над полем дійсних чисел, породжена елементами $\{e_j\}_{j=1}^n$, що задовольняють такі умови:

$$e_j^2 = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, \ldots, p, \\ -1, & j = p+1, \ldots, p+q; \end{cases} \qquad (20)$$
$$e_j e_k + e_k e_j = 0, \qquad j \neq k.$$

Для кожної впорядкованої за зростанням підмножини $\alpha := \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k\}$ множини $N := \{1, \ldots, n\}$, де

$$1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \leq n,$$

позначають

$$e_\emptyset := 1,\ e_\alpha := e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \ldots e_{\alpha_k},\ e_N := e_1 e_2 \ldots e_n.$$

Тоді, множина елементів $\{e_\alpha : \alpha \subset N\}$ є базисом алгебри Кліффорда $Cl_{p,q}$ і $\dim Cl_{p,q} = 2^n$.

Таким чином, кожен елемент $a \in Cl_{p,q}$ можна подати у вигляді:

$$a = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e_k,$$

де $r = 2^n$, $a_k \in \mathbb{R}$ і $e_k$ – елементи базису алгебри Кліффорда. Елемент $a \in Cl_{p,q}$ називається *Кліффордовим числом.*

Додавання в $Cl_{p,q}$ відбувається за правилом: для довільних $a, b \in Cl_{p,q}$

$$a + b = \sum_{k=0}^{r-1} a_k e_k + \sum_{k=0}^{r-1} b_k e_k = \sum_{k=0}^{r-1} (a_k + b_k) e_k.$$

Множення відбувається за правилом множення суми на суму. При цьому, добутки виду $a_k e_k b_l e_l$ замінюються на добутки виду $a_k b_l e_k e_l$ з урахуванням формул (20), після чого зводяться подібні доданки.

Алгебра Кліффорда є асоціативною відносно множення та додавання, комутативною відносно додавання, але не є комутативною відносно множення.

В алгебрах Кліффорда існують дільники нуля. Елементи алгебри $a, b$ називаються дільниками нуля, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, але $a \cdot b = 0$.

Розглядається векторний простір

$$Cl_{p,q}^m := \underbrace{Cl_{p,q} \times Cl_{p,q} \times \ldots \times Cl_{p,q}}_{m}$$

та елементи цього простору $z := (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in Cl_{p,q}^m$, де

$$z_j := \sum_{k=0}^{r-1} x_k^j e_k \in Cl_{p,q},\ x_k^j \in \mathbb{R},\ k = \overline{0, r-1},\ j = \overline{1, n}.$$

Нехай

$$|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{r-1} \left(x_k^j\right)^2},$$

тоді околом $U(w)$ точки $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Cl_{p,q}^m$ є множина

$$U(w) = \{z : |z - w| < \delta\}.$$

**Означення 7.** Область $\Omega \subset Cl_{p,q}^m$ називається *локально узагальнено лінійно опуклою зліва (справа)*, якщо в кожній точці $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega$, існує гіперплощина

$$\left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Cl_{p,q}^m : \sum_{j=1}^{n} c_j \, (z_j - w_j) = 0, \; c_j \in Cl_{p,q} \right\}$$

$$\left( \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Cl_{p,q}^m : \sum_{j=1}^{n} (z_j - w_j) \, c_j = 0, \; c_j \in Cl_{p,q} \right\} \right),$$

яка проходить через точку $w \in \partial\Omega$ і не перетинає $\Omega$ в деякому околі цієї точки.

Зауважимо, що розмірність гіперплощин в просторі $Cl_{p,q}^m$ не менша ніж $2^n(m-1)$ за рахунок існування дільників нуля в алгебрах Кліфорда.

## Задача

Знайти аналітичні умови локальної лінійної опуклості зліва (справа) області $\Omega \subset Cl_{p,q}^m$.

Розглядаються елементи $z := (z_1, z_2, \dots, z_m) \in Cl^m_{p,q}$, де

$$z_j := x^j_0 + x^j_1 e_1 + x^j_2 e_2 + \ldots + x^j_{r-1} e_{r-1} \in Cl_{p,q}.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix}, \; \ldots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & -1 & .. & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & .. & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ 1 & -1 & .. & (-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

$$\begin{array}{lcl} z_j & := & x^j_0 + x^j_1 e_1 + \ldots + x^j_{r-2} e_{r-2} + x^j_{r-1} e_{r-1}\,, \\ z^1_j & := & x^j_0 - x^j_1 e_1 + \ldots + x^j_{r-2} e_{r-2} - x^j_{r-1} e_{r-1}\,, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ z^{r-2}_j & := & x^j_0 + x^j_1 e_1 - \ldots + (-1)^{n-1} x^j_{r-2} e_{r-2} + (-1)^{n-1} x^j_{r-1} e_{r-1}\,, \\ z^{r-1}_j & := & x^j_0 - x^j_1 e_1 + \ldots + (-1)^{n-1} x^j_{r-2} e_{r-2} + (-1)^n x^j_{r-1} e_{r-1}. \end{array}$$

Тому, пригадавши, що $r = 2^n$, маємо:

$$\begin{array}{lcl} x^j_0 & := & \frac{1}{r}\left(z^0_j + z^1_j + \ldots + z^{r-2}_j + z^{r-1}_j\right)\,, \\ x^j_1 & := & \frac{1}{r} e^{-1}_1 \left(z^0_j - z^1_j + \ldots + z^{r-2}_j - z^{r-1}_j\right)\,, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x^j_{r-2} & := & \frac{1}{r} e^{-1}_{r-2} \left(z^0_j + z^1_j - \ldots + (-1)^{n-1} z^{r-2}_j + (-1)^{n-1} z^{r-1}_j\right)\,, \\ x^j_{r-1} & := & \frac{1}{r} e^{-1}_{r-1} \left(z^0_j - z^1_j + \ldots + (-1)^{n-1} z^{r-2}_j + (-1)^n z^{r-1}_j\right)\,, \end{array} \qquad (22)$$

або

$$
\begin{array}{lcl}
x_0^j & := & \frac{1}{r}\left(z_j^0 + z_j^1 + \ldots + z_j^{r-2} + z_j^{r-1}\right)\ , \\
x_1^j & := & \frac{1}{r}\left(z_j^0 - z_j^1 + \ldots + z_j^{r-2} - z_j^{r-1}\right) e_1^{-1}\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
x_{r-2}^j & := & \frac{1}{r}\left(z_j^0 + z_j^1 - \ldots + (-1)^{n-1} z_j^{r-2} + (-1)^{n-1} z_j^{r-1}\right) e_{r-2}^{-1}\,, \\
x_{r-1}^j & := & \frac{1}{r}\left(z_j^0 - z_j^1 + \ldots + (-1)^{n-1} z_j^{r-2} + (-1)^{n} z_j^{r-1}\right) e_{r-1}^{-1}\,,
\end{array}
\tag{23}
$$

Нехай $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1} \in \mathbb{R}^m$, де

$$
\begin{array}{ll}
x_0 & = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m), \\
x_1 & = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^m), \\
x_2 & = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^m), \\
 & \ldots \\
x_{r-1} & = (x_{r-1}^1, x_{r-1}^2, \ldots, x_{r-1}^m).
\end{array}
$$

Тоді, нехай $z, z^1, z^2, \ldots, z^{r-1} \in Cl_{p,q}^m$, де

$$
\begin{array}{ll}
z & = (z_1, z_2, \ldots, z_m), \\
z^1 & = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_m^1), \\
z^2 & = (z_1^2, z_2^2, \ldots, z_m^2), \\
 & \ldots \\
z^{r-1} & = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_m^{r-1}),
\end{array}
$$

$$
\rho(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}) = \rho(z, z^1, z^2, \ldots, z^{r-1}) = \rho(z) : Cl_{p,q}^m \to \mathbb{R}.
$$

При умові, що функція $\rho$ неперервно диференційовна маємо формули для формальних похідних першого порядку (тут $z_j^0 := z_j$):

$$\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^0} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_0^j} + \frac{e_1}{e_1^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_1^j} + \ldots + \frac{e_{r-2}}{e_{r-2}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-2}^j} + \frac{e_{r-1}}{e_{r-1}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-1}^j}\right),$$

$$\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^1} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_0^j} - \frac{e_1}{e_1^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_1^j} + \ldots + \frac{e_{r-2}}{e_{r-2}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-2}^j} - \frac{e_{r-1}}{e_{r-1}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-1}^j}e_{r-1}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^{r-2}} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_0^j} + \frac{e_1}{e_1^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_1^j} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\frac{e_{r-2}}{e_{r-2}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-2}^j} + (-1)^{n-1}\frac{e_{r-1}}{e_{r-1}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-1}^j}\right), \quad (24)$$

$$\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^{r-1}} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_0^j} - \frac{e_1}{e_1^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_1^j} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\frac{e_{r-2}}{e_{r-2}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-2}^j} + (-1)^{n}\frac{e_{r-1}}{e_{r-1}^2}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_{r-1}^j}\right).$$

Зазначимо, що $e_k^2 = \pm 1$.

При умові, що функція $\rho$ двічі неперервно диференційовна, формальні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l}$, $i,j = \overline{1,m}$, $k,l = \overline{0,r-1}$, функції $\rho$ виражаються через частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i \partial x_l^j}$ у наступний спосіб.

Спочатку, для зручності, формули (24) представляються у скороченому вигляді так:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z_j^l} = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{2^n-1}\gamma_{lp}\frac{\partial\rho}{\partial x_l^j}e_p, \quad j=\overline{1,m},\ l=\overline{0,2^n-1},$$

де $\gamma_{lp}$ елементи матриці (21). Тоді,

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i^k \partial z_j^l} := \frac{1}{2^{2n}}\sum_{p,g=0}^{2n-1}\gamma_{lp}\gamma_{kg}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k^i \partial x_l^j}e_p e_g,\ j,i=\overline{1,m},\ l,k=\overline{0,2^n}.$$

Нехай

$$\Omega = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in Cl_{p,q}^m : \rho(z) < 0\}$$

область, яка визначається за допомогою функції $\rho : Cl_{p,q}^m \to \mathbb{R}$ із класу $C^2$ при чому

$$\operatorname{grad} \rho(w) = \left( \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_1}, \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_m} \right) \neq 0, \qquad w \in \partial\Omega.$$

**Теорема 5.** *Для того щоб область $\Omega$ була локально узагальнено лінійно опуклою зліва необхідно, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувались нерівності*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l s_i^k \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} s_j^l \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_i^k \geq 0, \tag{25}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} s_j^l s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} \geq 0$$

*для усіх векторів $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in Cl_{p,q}^m \setminus \{0\}$, $s_j = z_j - w_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, таких, що*

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} s_j = 0 \quad \left( \sum_{j=1}^{m} s_j \frac{\partial \rho(w)}{\partial z_j} = 0 \right),$$

*і достатньо, щоб для кожної точки $w \in \partial\Omega$ виконувалась хоча б одна з нерівностей*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_j^l s_i^k \geq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} s_j^l \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} s_i^k \geq 0, \tag{26}$$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=0}^{r-1} s_j^l s_i^k \frac{\partial^2 \rho(w)}{\partial z_i^k \partial z_j^l} \geq 0$$

*для тих самих векторів $s$.*

$$\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,s_j^l\,s_i^k=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}s_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,s_j^l=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}s_j^l\,s_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i\partial x_l^j}\,(v_l^j-x_l^j)\,(v_k^i-x_k^i).$$

**Лема 3.** *Для повного диференціалу першого порядку* $d\rho(w)$ *функції* $\rho$ *в точці* $w$ *справедливі співвідношення*

$$d\rho(w)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\partial\rho(w)}{\partial x_l^j}\,dx_l^j=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^l}\,dz_j^l=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{r-1}dz_j^l\,\frac{\partial\rho(w)}{\partial z_j^l}. \quad (27)$$

**Лема 4.** *Для повного диференціалу другого порядку* $d^2\rho(w)$ *функції* $\rho$ *в точці* $w$ *справедливі співвідношення*

$$d^2\rho(w)=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial x_k^i\partial x_l^j}\,dx_l^j\,dx_k^i=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,dz_j^l\,dz_i^k=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}dz_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,dz_j^l=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k,l=0}^{r-1}dz_j^l\,dz_i^k\,\frac{\partial^2\rho(w)}{\partial z_i^k\partial z_j^l}\,. \quad (28)$$